

# Lumina - undă electromagnetică

## (ecuațiile luminii)

M. Penția

IFIN-HH, Departament Fizică Nucleară,  
P.O.Box MG-6, 077125, București-Măgurele, ROMANIA.  
e-mail: [pentia@nipne.ro](mailto:pentia@nipne.ro)

September 27, 2019

# Partea I

## Câmpuri de interacție

# Câmpuri de interacție

Cele patru tipuri de interacții fundamentale

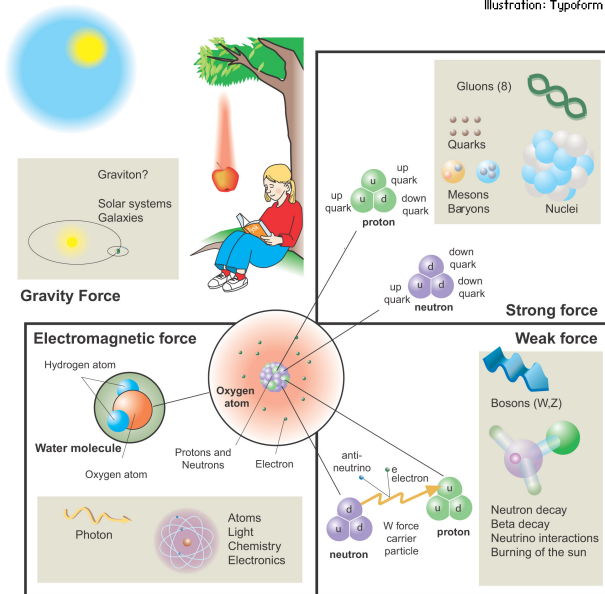
Câmpuri scalare

Câmpuri vectoriale

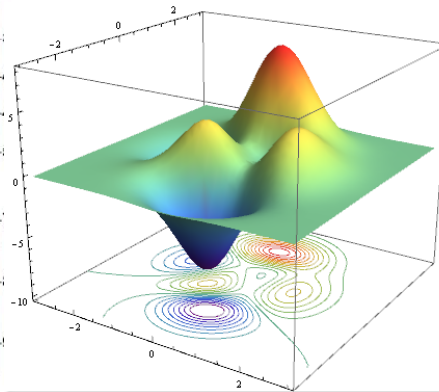
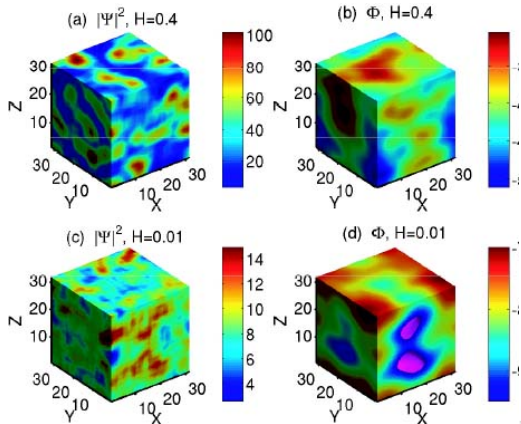
Algebra vectorială

# Cele patru tipuri de interacții fundamentale

Illustration: Typoform

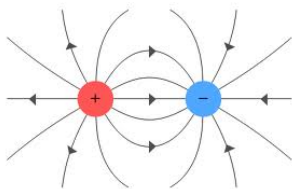
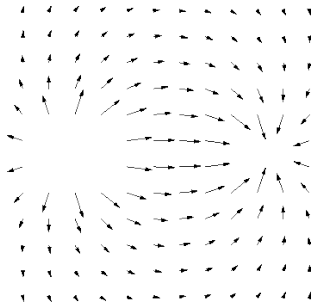
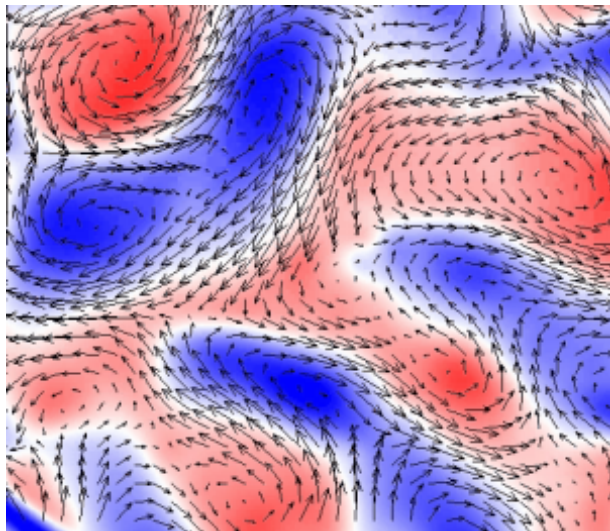


# Câmpuri scalare



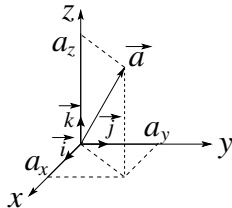
(New J. Phys. 10 (2008) 083007)

# Câmpuri vectoriale



# Algebra vectorială

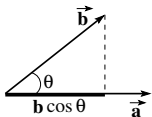
$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{cases}$$



## Produs scalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$$

măsoară paralelism vectori



Vectori paraleli:  $\theta = 0$

$$\implies \cos \theta = 1$$

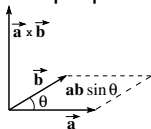
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = ab \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

## Produs vectorial

$$\vec{a} \times \vec{b} = ab \sin \theta$$

măsoară perpendicularitate vectori



Vectori perpendiculari:  $\theta = 90^\circ$

$$\implies \sin \theta = 1$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

- ▶ *Produsul mixt* a trei vectori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$  este un scalar egal cu volumul paralelipipedului construit pe acești vectori:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$$

- ▶ *Dublul produs vectorial* al vectorilor  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$  este

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = -(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a}$$

- ▶ Dacă sunt funcții de o variabilă scalară  $t$ , le putem deriva

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt} \quad ; \quad \frac{d}{dt}(\varphi\vec{a}) = \frac{d\varphi}{dt}\vec{a} + \varphi\frac{d\vec{a}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} \quad ; \quad \frac{d(\vec{a} \times \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$$

# Gradient, divergență, rotor

Cele patru tipuri de interacții fundamentale

Câmpuri scalare

Câmpuri vectoriale

Algebra vectorială

## Partea II

### Gradient, divergență, rotor

# Gradient, divergență, rotor

## Suprafețe de nivel

Gradientul unui câmp scalar

Interpretarea fizică a gradientului

## Fluxul unui vector

Divergența unui vector

Interpretarea fizică a divergenței

Teorema Gauss

Ecuția de continuitate

## Circulația pe un contur

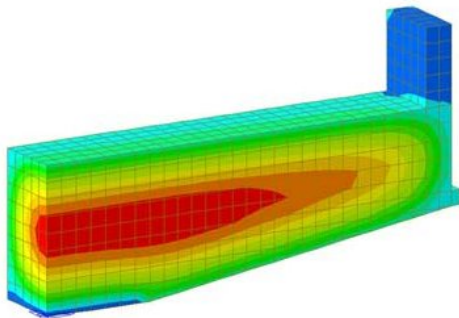
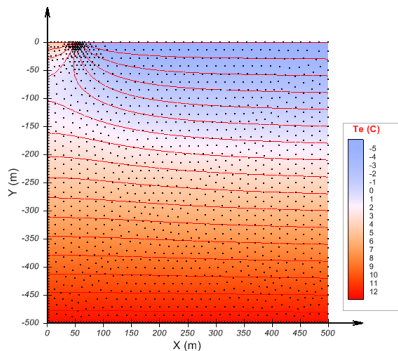
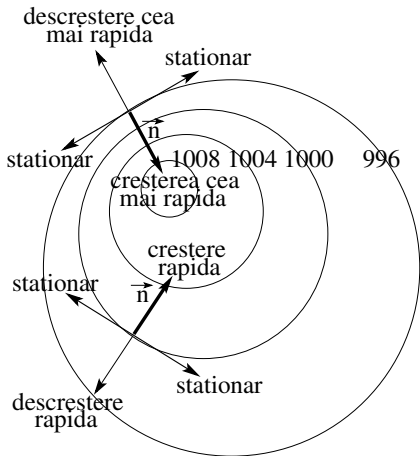
Rotorul unui vector

Interpretarea fizică a rotorului unui vector

Teorema Stokes

REZUMAT: Gradient, divergență, rotor - funcții locale

# Suprafețe de nivel (mărimi scalare)



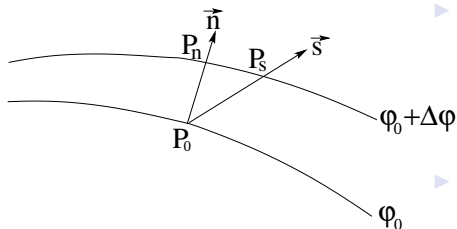
## Gradientul unui câmp scalar

- Fie un câmp scalar  $\varphi$  cu suprafețe de nivel constant - echipotențiale

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0$$

- Derivata  $\partial\varphi/\partial s$  pe direcția  $\vec{s}$ .

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi_s - \varphi_0}{\Delta s}$$



$$\Delta s \equiv P_0 P_s = \frac{P_0 P_n}{\cos(\vec{s}, \vec{n})}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial s} &= \lim_{P_0 P_s \rightarrow 0} \frac{\varphi_s - \varphi_0}{P_0 P_s} \\ &= \lim_{P_0 P_n \rightarrow 0} \left( \frac{\varphi_n - \varphi_0}{P_0 P_n} \right) \cos(\vec{s}, \vec{n}) \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cos(\vec{s}, \vec{n}) \end{aligned}$$

- DEFINITIE:

Gradientul scalarului  $\varphi$ , este vectorul,

$$\boxed{\text{grad } \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \vec{n}}$$

- Atunci, derivata  $\partial\varphi/\partial s$  pe direcția  $\vec{s}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = |\text{grad } \varphi| \cos(\vec{s}, \vec{n}) = \text{grad}_s \varphi$$

este proiecția vectorului gradient pe direcția  $\vec{s}$ .

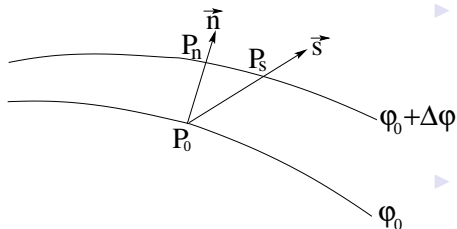
## Gradientul unui câmp scalar

- ▶ Fie un câmp scalar  $\varphi$  cu *suprafețe de nivel constant - echipotențiale*

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0$$

- ▶ Derivata  $\partial\varphi/\partial s$  pe direcția  $\vec{s}$ .

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi_s - \varphi_0}{\Delta s}$$



$$\Delta s \equiv P_0 P_s = \frac{P_0 P_n}{\cos(\vec{s}, \vec{n})}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial s} &= \lim_{P_0 P_s \rightarrow 0} \frac{\varphi_s - \varphi_0}{P_0 P_s} \\ &= \lim_{P_0 P_n \rightarrow 0} \left( \frac{\varphi_n - \varphi_0}{P_0 P_n} \right) \cos(\vec{s}, \vec{n}) \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cos(\vec{s}, \vec{n}) \end{aligned}$$

- ▶ DEFINITIE:

*Gradientul scalarului  $\varphi$ , este vectorul,*

$$\boxed{\text{grad } \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \vec{n}}$$

- ▶ Atunci, derivata  $\partial\varphi/\partial s$  pe direcția  $\vec{s}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = |\text{grad } \varphi| \cos(\vec{s}, \vec{n}) = \text{grad}_s \varphi$$

este proiecția vectorului gradient pe direcția  $\vec{s}$ .

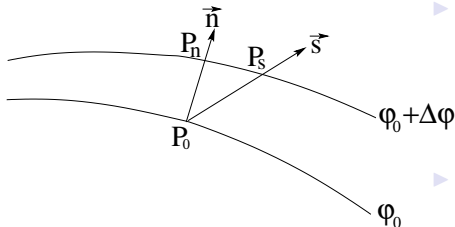
## Gradientul unui câmp scalar

- ▶ Fie un câmp scalar  $\varphi$  cu *suprafețe de nivel constant - echipotențiale*

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0$$

- ▶ Derivata  $\partial\varphi/\partial s$  pe direcția  $\vec{s}$ .

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi_s - \varphi_0}{\Delta s}$$



$$\Delta s \equiv P_0 P_s = \frac{P_0 P_n}{\cos(\vec{s}, \vec{n})}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial s} &= \lim_{P_0 P_s \rightarrow 0} \frac{\varphi_s - \varphi_0}{P_0 P_s} \\ &= \lim_{P_0 P_n \rightarrow 0} \left( \frac{\varphi_n - \varphi_0}{P_0 P_n} \right) \cos(\vec{s}, \vec{n}) \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cos(\vec{s}, \vec{n}) \end{aligned}$$

- ▶ DEFINITIE:

*Gradientul scalarului  $\varphi$ , este vectorul,*

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \vec{n}$$

- ▶ Atunci, derivata  $\partial\varphi/\partial s$  pe direcția  $\vec{s}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = |\text{grad } \varphi| \cos(\vec{s}, \vec{n}) = \text{grad}_s \varphi$$

este proiecția vectorului gradient pe direcția  $\vec{s}$ .

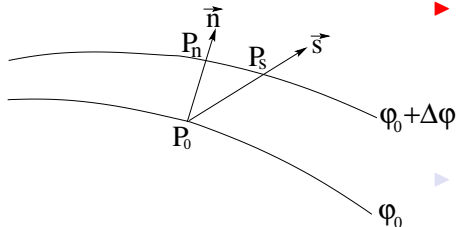
## Gradientul unui câmp scalar

- ▶ Fie un câmp scalar  $\varphi$  cu *suprafețe de nivel constant - echipotențiale*

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0$$

- ▶ Derivata  $\partial\varphi/\partial s$  pe direcția  $\vec{s}$ .

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi_s - \varphi_0}{\Delta s}$$



$$\Delta s \equiv P_0 P_s = \frac{P_0 P_n}{\cos(\vec{s}, \vec{n})}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial s} &= \lim_{P_0 P_s \rightarrow 0} \frac{\varphi_s - \varphi_0}{P_0 P_s} \\ &= \lim_{P_0 P_n \rightarrow 0} \left( \frac{\varphi_n - \varphi_0}{P_0 P_n} \right) \cos(\vec{s}, \vec{n}) \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cos(\vec{s}, \vec{n}) \end{aligned}$$

- ▶ **DEFINIȚIE:**

*Gradientul scalarului  $\varphi$ , este vectorul,*

$$\mathit{grad} \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \vec{n}$$

- ▶ Atunci, derivata  $\partial\varphi/\partial s$  pe direcția  $\vec{s}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = |\mathit{grad} \varphi| \cos(\vec{s}, \vec{n}) = \mathit{grad}_s \varphi$$

este proiecția vectorului gradient pe direcția  $\vec{s}$ .

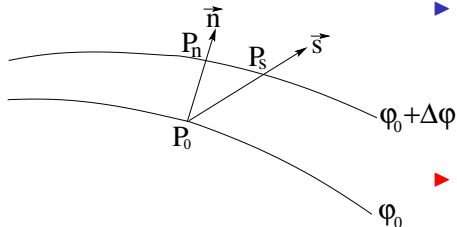
## Gradientul unui câmp scalar

- ▶ Fie un câmp scalar  $\varphi$  cu *suprafețe de nivel constant - echipotențiale*

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0$$

- ▶ Derivata  $\partial\varphi/\partial s$  pe direcția  $\vec{s}$ .

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi_s - \varphi_0}{\Delta s}$$



$$\Delta s \equiv P_0 P_s = \frac{P_0 P_n}{\cos(\vec{s}, \vec{n})}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial s} &= \lim_{P_0 P_s \rightarrow 0} \frac{\varphi_s - \varphi_0}{P_0 P_s} \\ &= \lim_{P_0 P_n \rightarrow 0} \left( \frac{\varphi_n - \varphi_0}{P_0 P_n} \right) \cos(\vec{s}, \vec{n}) \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cos(\vec{s}, \vec{n}) \end{aligned}$$

- ▶ DEFINITIE:

*Gradientul scalarului  $\varphi$ , este vectorul,*

$$\boxed{\text{grad } \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \vec{n}}$$

- ▶ Atunci, derivata  $\partial\varphi/\partial s$  pe direcția  $\vec{s}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = |\text{grad } \varphi| \cos(\vec{s}, \vec{n}) = \text{grad}_s \varphi$$

este proiecția vectorului gradient pe direcția  $\vec{s}$ .

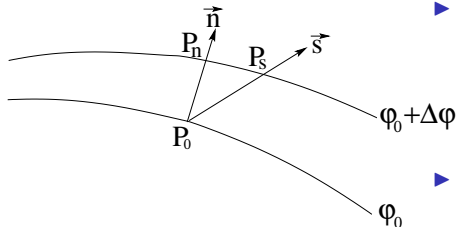
## Gradientul unui câmp scalar

- ▶ Fie un câmp scalar  $\varphi$  cu *suprafețe de nivel constant - echipotențiale*

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0$$

- ▶ Derivata  $\partial\varphi/\partial s$  pe direcția  $\vec{s}$ .

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi_s - \varphi_0}{\Delta s}$$



$$\Delta s \equiv P_0 P_s = \frac{P_0 P_n}{\cos(\vec{s}, \vec{n})}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial s} &= \lim_{P_0 P_s \rightarrow 0} \frac{\varphi_s - \varphi_0}{P_0 P_s} \\ &= \lim_{P_0 P_n \rightarrow 0} \left( \frac{\varphi_n - \varphi_0}{P_0 P_n} \right) \cos(\vec{s}, \vec{n}) \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cos(\vec{s}, \vec{n}) \end{aligned}$$

- ▶ DEFINITIE:

*Gradientul scalarului  $\varphi$ , este vectorul,*

$$\boxed{\mathit{grad} \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \vec{n}}$$

- ▶ Atunci, derivata  $\partial\varphi/\partial s$  pe direcția  $\vec{s}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = |\mathit{grad} \varphi| \cos(\vec{s}, \vec{n}) = \mathit{grad}_s \varphi$$

este proiecția vectorului gradient pe direcția  $\vec{s}$ .

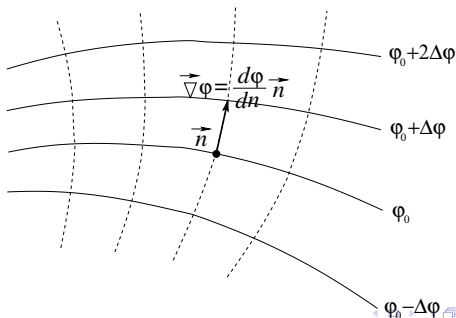
Dacă luăm direcția  $\vec{s}$  cea  $\vec{i}$  a axei  $x$ , apoi  $\vec{j}$  a axei  $y$  și  $\vec{k}$  a axei  $z$ ,

$$\text{grad}_x \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \text{grad}_y \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \text{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

atunci, vectorul *gradient* al scalarului  $\varphi$ , exprimat cu operatorul  $\vec{\nabla}$  este

$$\text{grad } \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$$

$$|\text{grad } \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}$$



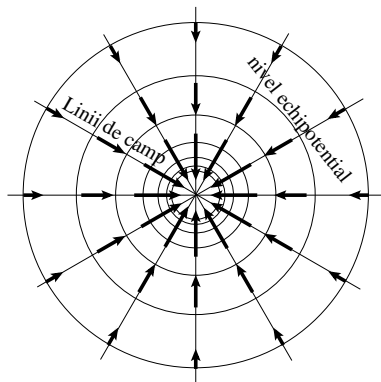
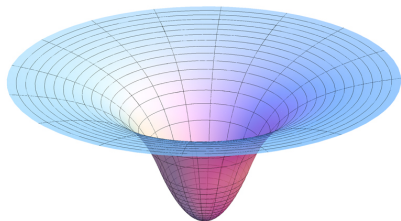
# Interpretarea fizică a gradientului

- ▶ In concluzie, *gradientul mărimii scalare*  $\varphi$ , într-un punct  $(x, y, z)$  este vectorul de modul  $\partial\varphi/\partial n$ , dirijat după normala la suprafața de potențial  $\varphi = \text{const.}$ , în sensul creșterii lui  $\varphi$ .

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \vec{n}$$

- ▶ In coordonate carteziene, vectorul *gradient* se exprimă, pe componente, sub forma

$$\text{grad} \equiv \vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i}, \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}, \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$$



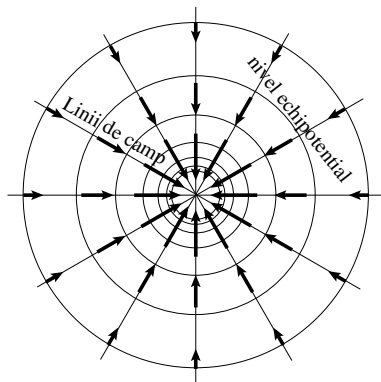
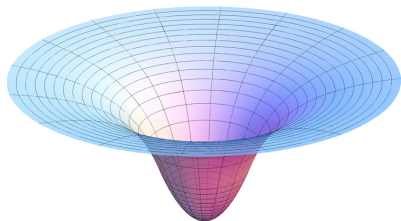
# Interpretarea fizică a gradientului

- ▶ In concluzie, *gradientul mărimii scalare*  $\varphi$ , într-un punct  $(x, y, z)$  este vectorul de modul  $\partial\varphi/\partial n$ , dirijat după normala la suprafața de potențial  $\varphi = \text{const.}$ , în sensul creșterii lui  $\varphi$ .

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{n}$$

- ▶ In coordonate carteziene, vectorul *gradient* se exprimă, pe componente, sub forma

$$\text{grad} \equiv \vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i}, \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}, \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$$



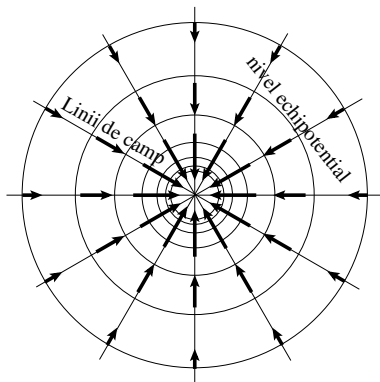
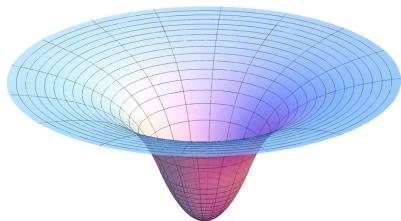
## Interpretarea fizică a gradientului

- ▶ In concluzie, *gradientul mărimii scalare*  $\varphi$ , într-un punct  $(x, y, z)$  este vectorul de modul  $\partial\varphi/\partial n$ , dirijat după normala la suprafața de potențial  $\varphi = \text{const.}$ , în sensul creșterii lui  $\varphi$ .

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{n}$$

- ▶ In coordonate carteziene, vectorul *gradient* se exprimă, pe componente, sub forma

$$\text{grad} \equiv \vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i}, \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}, \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$$



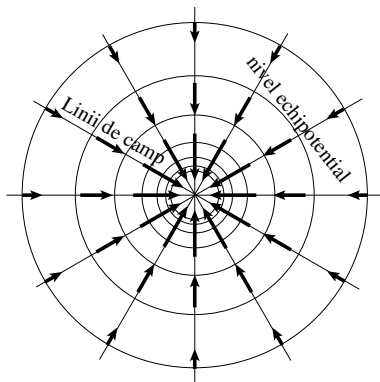
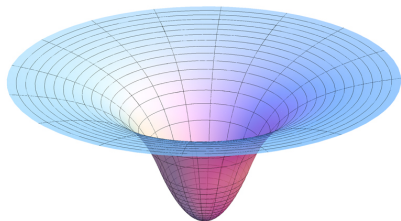
## Interpretarea fizică a gradientului

- ▶ In concluzie, *gradientul mărimii scalare*  $\varphi$ , într-un punct  $(x, y, z)$  este vectorul de modul  $\partial\varphi/\partial n$ , dirijat după normala la suprafața de potențial  $\varphi = \text{const.}$ , în sensul creșterii lui  $\varphi$ .

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{n}$$

- ▶ In coordonate carteziene, vectorul *gradient* se exprimă, pe componente, sub forma

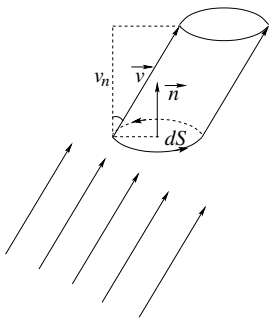
$$\text{grad} \equiv \vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i}, \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}, \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right)$$



# Fluxul unui vector printr-o suprafață

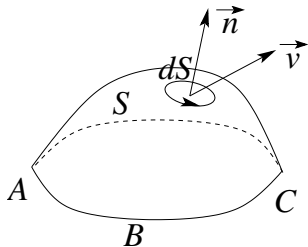
- ▶ Un fluid cu un câmp de viteze  $\vec{v}$ , are un flux prin  $dS$  dat de volumul de fluid ce trece prin  $dS$  în unitate de timp.

$$d\phi = \vec{v} \cdot d\vec{S} = v_n dS = v \cos(\vec{v}, \vec{n}) dS$$



- ▶ Fluxul total de fluid prin suprafața  $S$ ,

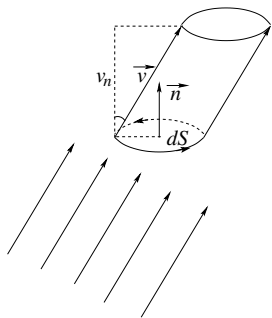
$$\phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_S v \cos(\vec{v}, \vec{n}) dS$$



# Fluxul unui vector printr-o suprafață

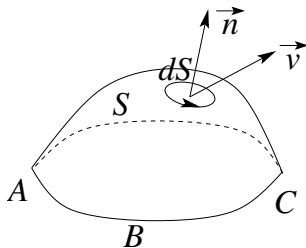
- ▶ Un fluid cu un câmp de viteze  $\vec{v}$ , are un flux prin  $dS$  dat de volumul de fluid ce trece prin  $dS$  în unitate de timp.

$$d\phi = \vec{v} \cdot d\vec{S} = v_n dS = v \cos(\vec{v}, \vec{n}) dS$$



- ▶ Fluxul total de fluid prin suprafața  $S$ ,

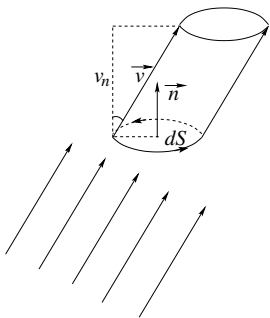
$$\phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_S v \cos(\vec{v}, \vec{n}) dS$$



# Fluxul unui vector printr-o suprafață

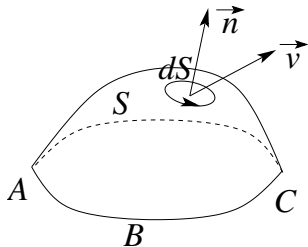
- ▶ Un fluid cu un câmp de viteze  $\vec{v}$ , are un flux prin  $dS$  dat de volumul de fluid ce trece prin  $dS$  în unitate de timp.

$$d\phi = \vec{v} \cdot d\vec{S} = v_n dS = v \cos(\vec{v}, \vec{n}) dS$$



- ▶ Fluxul total de fluid prin suprafața  $S$ ,

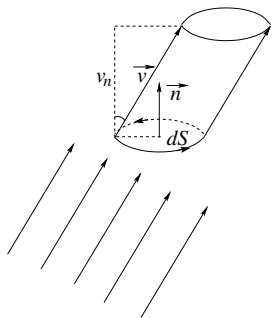
$$\phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_S v \cos(\vec{v}, \vec{n}) dS$$



## Fluxul unui vector printr-o suprafață

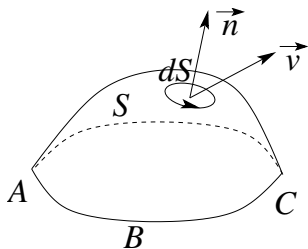
- ▶ Un fluid cu un câmp de viteze  $\vec{v}$ , are un flux prin  $dS$  dat de volumul de fluid ce trece prin  $dS$  în unitate de timp.

$$d\phi = \vec{v} \cdot d\vec{S} = v_n dS = v \cos(\vec{v}, \vec{n}) dS$$

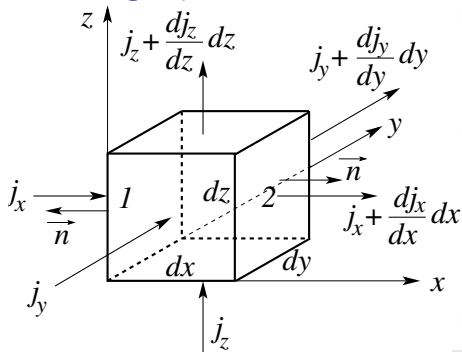


- ▶ Fluxul total de fluid prin suprafața  $S$ ,

$$\phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_S v \cos(\vec{v}, \vec{n}) dS$$



## Divergența unui vector



- ▶ Fluxul printr-un elem.de suprafață  $d\vec{S}$

$$d\phi = \frac{dq}{dt} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Fluxul prin fața 1 și 2, pe axa x, este

$$d\phi_{1x} = -j_x dy dz$$

$$d\phi_{2x} = \left( j_x + \frac{\partial j_x}{\partial x} dx \right) dy dz$$

- ▶ Fluxul total pe direcția x

$$d\phi_x = d\phi_{1x} + d\phi_{2x} = \frac{\partial j_x}{\partial x} dx dy dz$$

- ▶ Similar, fluxurile pe axele y și z

$$d\phi_y = \frac{\partial j_y}{\partial y} dy dz dx$$

$$d\phi_z = \frac{\partial j_z}{\partial z} dz dx dy$$

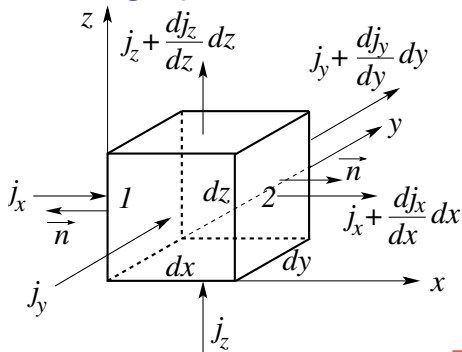
- ▶ Fluxul vectorului  $\vec{j}$  prin suprafața închisă a cubului elementar,

$$d\phi = \underbrace{\left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right)}_{\text{div } \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j}} \underbrace{dx dy dz}_{dV}$$

- ▶ DIVERGENTA vectorului  $\vec{j}$ ,

$$\text{div } \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

## Divergența unui vector



► Fluxul printr-un elem.de suprafață  $d\vec{S}$

$$d\phi = \frac{dq}{dt} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

► Fluxul prin fața 1 și 2, pe axa x, este

$$d\phi_{1x} = -j_x dy dz$$

$$d\phi_{2x} = \left( j_x + \frac{\partial j_x}{\partial x} dx \right) dy dz$$

► Fluxul total pe direcția x

$$d\phi_x = d\phi_{1x} + d\phi_{2x} = \frac{\partial j_x}{\partial x} dx dy dz$$

► Similar, fluxurile pe axele y și z

$$d\phi_y = \frac{\partial j_y}{\partial y} dy dz dx$$

$$d\phi_z = \frac{\partial j_z}{\partial z} dz dx dy$$

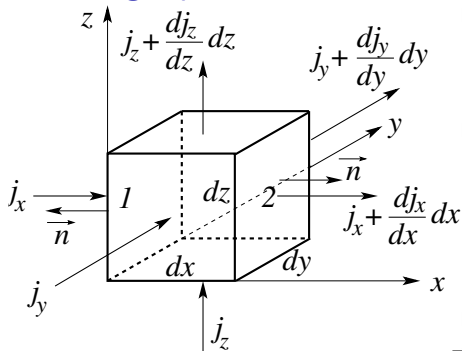
► Fluxul vectorului  $\vec{j}$  prin suprafața închisă a cubului elementar,

$$d\phi = \underbrace{\left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right)}_{\text{div } \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j}} \underbrace{dx dy dz}_{dV}$$

► DIVERGENTA vectorului  $\vec{j}$ ,

$$\text{div } \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

## Divergența unui vector



- ▶ Fluxul printr-un elem.de suprafață  $d\vec{S}$

$$d\phi = \frac{dq}{dt} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Fluxul prin fața 1 și 2, pe axa x, este

$$d\phi_{1x} = -j_x dy dz$$

$$d\phi_{2x} = \left( j_x + \frac{\partial j_x}{\partial x} dx \right) dy dz$$

- ▶ Fluxul total pe direcția x

$$d\phi_x = d\phi_{1x} + d\phi_{2x} = \frac{\partial j_x}{\partial x} dx dy dz$$

- ▶ Similar, fluxurile pe axele y și z

$$d\phi_y = \frac{\partial j_y}{\partial y} dy dz dx$$

$$d\phi_z = \frac{\partial j_z}{\partial z} dz dx dy$$

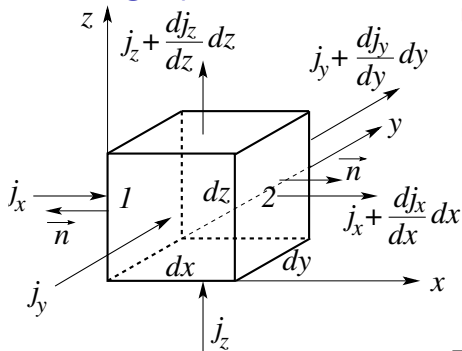
- ▶ Fluxul vectorului  $\vec{j}$  prin suprafața închisă a cubului elementar,

$$d\phi = \underbrace{\left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right)}_{\text{div } \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j}} \underbrace{dx dy dz}_{dV}$$

- ▶ DIVERGENTA vectorului  $\vec{j}$ ,

$$\text{div } \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

## Divergența unui vector



- Fluxul printr-un elem.de suprafață  $d\vec{S}$

$$d\phi = \frac{dq}{dt} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- Fluxul prin fața 1 și 2, pe axa x, este

$$d\phi_{1x} = -j_x dy dz$$

$$d\phi_{2x} = \left( j_x + \frac{\partial j_x}{\partial x} dx \right) dy dz$$

- Fluxul total pe direcția x

$$d\phi_x = d\phi_{1x} + d\phi_{2x} = \frac{\partial j_x}{\partial x} dx dy dz$$

- Similar, fluxurile pe axele y și z

$$d\phi_y = \frac{\partial j_y}{\partial y} dy dz dx$$

$$d\phi_z = \frac{\partial j_z}{\partial z} dz dx dy$$

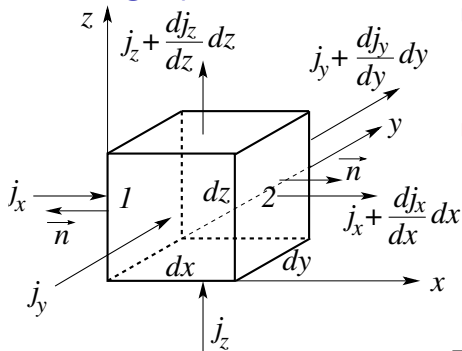
- Fluxul vectorului  $\vec{j}$  prin suprafața închisă a cubului elementar,

$$d\phi = \underbrace{\left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right)}_{\text{div } \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j}} \underbrace{dx dy dz}_{dV}$$

- DIVERGENTA vectorului  $\vec{j}$ ,

$$\text{div } \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

## Divergența unui vector



- Fluxul printr-un elem.de suprafață  $d\vec{S}$

$$d\phi = \frac{dq}{dt} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- Fluxul prin fața 1 și 2, pe axa x, este

$$d\phi_{1x} = -j_x dy dz$$

$$d\phi_{2x} = \left( j_x + \frac{\partial j_x}{\partial x} dx \right) dy dz$$

- Fluxul total pe direcția x

$$d\phi_x = d\phi_{1x} + d\phi_{2x} = \frac{\partial j_x}{\partial x} dx dy dz$$

- Similar, fluxurile pe axele y și z

$$d\phi_y = \frac{\partial j_y}{\partial y} dy dz dx$$

$$d\phi_z = \frac{\partial j_z}{\partial z} dz dx dy$$

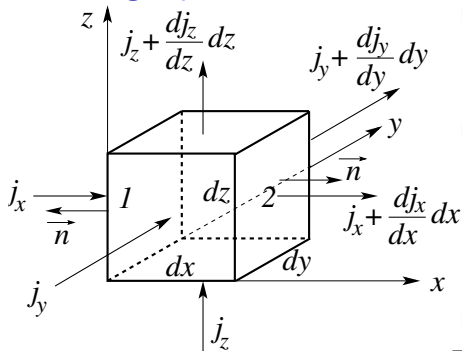
- Fluxul vectorului  $\vec{j}$  prin suprafața închisă a cubului elementar,

$$d\phi = \underbrace{\left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right)}_{\text{div } \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j}} \underbrace{dx dy dz}_{dV}$$

- DIVERGENTA vectorului  $\vec{j}$ ,

$$\text{div } \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

## Divergența unui vector



- ▶ Fluxul printr-un elem.de suprafață  $d\vec{S}$

$$d\phi = \frac{dq}{dt} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Fluxul prin fața 1 și 2, pe axa x, este

$$d\phi_{1x} = -j_x dy dz$$

$$d\phi_{2x} = \left( j_x + \frac{\partial j_x}{\partial x} dx \right) dy dz$$

- ▶ Fluxul total pe direcția x

$$d\phi_x = d\phi_{1x} + d\phi_{2x} = \frac{\partial j_x}{\partial x} dx dy dz$$

- ▶ Similar, fluxurile pe axele y și z

$$d\phi_y = \frac{\partial j_y}{\partial y} dy dz dx$$

$$d\phi_z = \frac{\partial j_z}{\partial z} dz dx dy$$

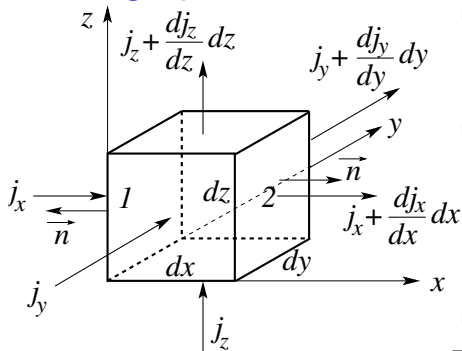
- ▶ Fluxul vectorului  $\vec{j}$  prin suprafața închisă a cubului elementar,

$$d\phi = \underbrace{\left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right)}_{\text{div } \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j}} \underbrace{dx dy dz}_{dV}$$

- ▶ DIVERGENTA vectorului  $\vec{j}$ ,

$$\text{div } \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

## Divergența unui vector



- ▶ Fluxul printr-un elem.de suprafață  $d\vec{S}$

$$d\phi = \frac{dq}{dt} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Fluxul prin fața 1 și 2, pe axa x, este

$$d\phi_{1x} = -j_x dy dz$$

$$d\phi_{2x} = \left( j_x + \frac{\partial j_x}{\partial x} dx \right) dy dz$$

- ▶ Fluxul total pe direcția x

$$d\phi_x = d\phi_{1x} + d\phi_{2x} = \frac{\partial j_x}{\partial x} dx dy dz$$

- ▶ Similar, fluxurile pe axele y și z

$$d\phi_y = \frac{\partial j_y}{\partial y} dy dz dx$$

$$d\phi_z = \frac{\partial j_z}{\partial z} dz dx dy$$

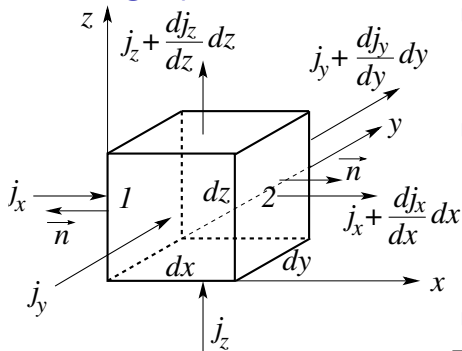
- ▶ Fluxul vectorului  $\vec{j}$  prin suprafața închisă a cubului elementar,

$$d\phi = \underbrace{\left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right)}_{\text{div } \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j}} \underbrace{dx dy dz}_{dV}$$

- ▶ **DIVERGENTA** vectorului  $\vec{j}$ ,

$$\text{div } \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

## Divergența unui vector



- ▶ Fluxul printr-un elem.de suprafață  $d\vec{S}$

$$d\phi = \frac{dq}{dt} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Fluxul prin fața 1 și 2, pe axa x, este

$$d\phi_{1x} = -j_x dy dz$$

$$d\phi_{2x} = \left( j_x + \frac{\partial j_x}{\partial x} dx \right) dy dz$$

- ▶ Fluxul total pe direcția x

$$d\phi_x = d\phi_{1x} + d\phi_{2x} = \frac{\partial j_x}{\partial x} dx dy dz$$

- ▶ Similar, fluxurile pe axele y și z

$$d\phi_y = \frac{\partial j_y}{\partial y} dy dz dx$$

$$d\phi_z = \frac{\partial j_z}{\partial z} dz dx dy$$

- ▶ Fluxul vectorului  $\vec{j}$  prin suprafața închisă a cubului elementar,

$$d\phi = \underbrace{\left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right)}_{\text{div } \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j}} \underbrace{dx dy dz}_{dV}$$

- ▶ DIVERGENTA vectorului  $\vec{j}$ ,

$$\text{div } \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

# Interpretarea fizică a divergenței

- ▶ Fluxul  $d\phi$  printr-o suprafață închisă infinit mică de formă arbitrară

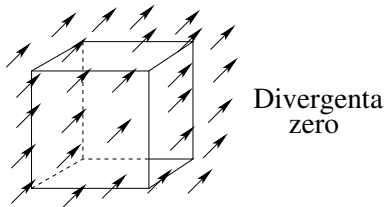
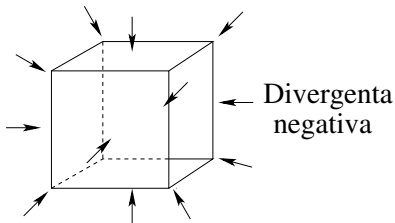
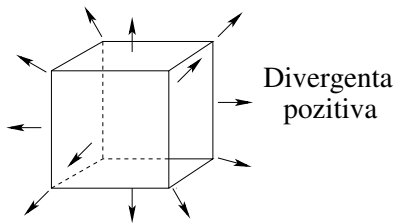
$$d\phi = \oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

- ▶ De aici interpretarea divergenței ca

$$\operatorname{div} \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{j} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

măsoară intensitatea sursei, de exemplu cantitatea de fluid ce iese din unitatea de volum.

- ▶ După semnul divergenței, intensitatea surselor poate fi atât pozitivă cât și negativă. Câmpurile vectoriale care au  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  se numesc *solenoidale*.



# Interpretarea fizică a divergenței

- Fluxul  $d\phi$  printr-o suprafață închisă infinit mică de formă arbitrară

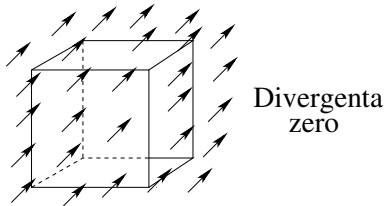
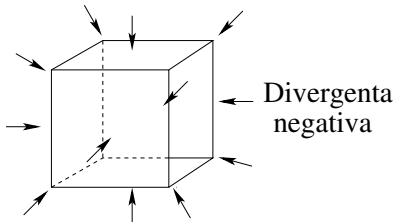
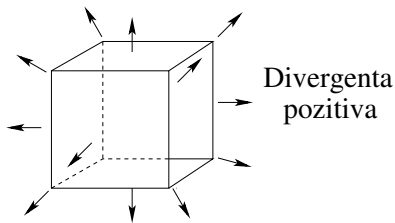
$$d\phi = \oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

- De aici interpretarea divergenței ca

$$\operatorname{div} \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{j} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

măsoară intensitatea sursei, de exemplu cantitatea de fluid ce iese din unitatea de volum.

- După semnul divergenței, intensitatea surselor poate fi atât pozitivă cât și negativă. Câmpurile vectoriale care au  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  se numesc *solenoidale*.



## Interpretarea fizică a divergenței

- ▶ Fluxul  $d\phi$  printr-o suprafață închisă infinit mică de formă arbitrară

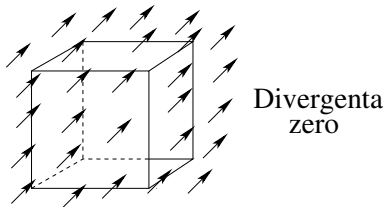
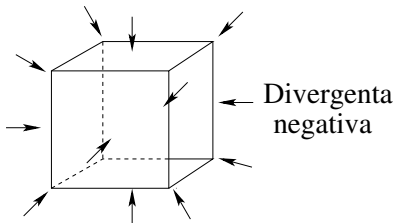
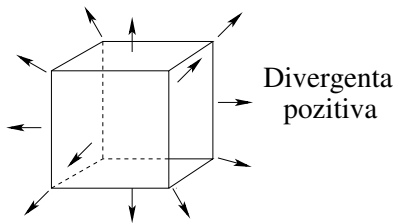
$$d\phi = \oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

- ▶ De aici interpretarea divergenței ca

$$\operatorname{div} \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{j} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

măsoară intensitatea sursei, de exemplu cantitatea de fluid ce iese din unitatea de volum.

- ▶ După semnul divergenței, intensitatea surselor poate fi atât pozitivă cât și negativă. Câmpurile vectoriale care au  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  se numesc *solenoidale*.



## Interpretarea fizică a divergenței

- ▶ Fluxul  $d\phi$  printr-o suprafață închisă infinit mică de formă arbitrară

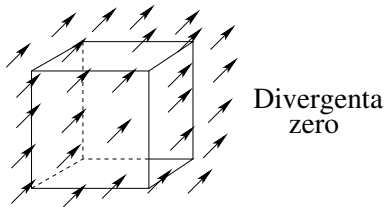
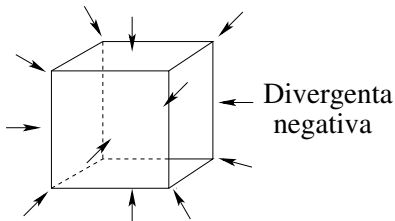
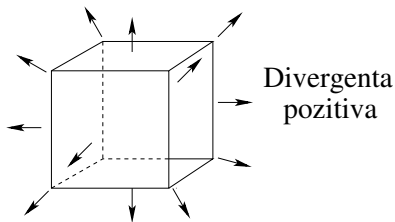
$$d\phi = \oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

- ▶ De aici interpretarea divergenței ca

$$\operatorname{div} \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{j} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

măsoară intensitatea sursei, de exemplu cantitatea de fluid ce iese din unitatea de volum.

- ▶ După semnul divergenței, intensitatea surselor poate fi atât pozitivă cât și negativă. Câmpurile vectoriale care au  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  se numesc *solenoidale*.



## Interpretarea fizică a divergenței

- ▶ Fluxul  $d\phi$  printr-o suprafață închisă infinit mică de formă arbitrară

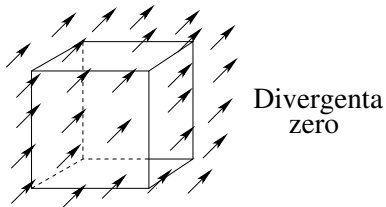
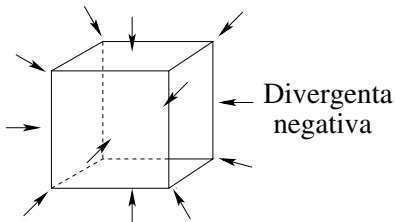
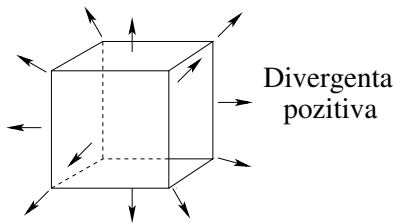
$$d\phi = \oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

- ▶ De aici interpretarea divergenței ca

$$\operatorname{div} \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{j} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

măsoară intensitatea sursei, de exemplu cantitatea de fluid ce iese din unitatea de volum.

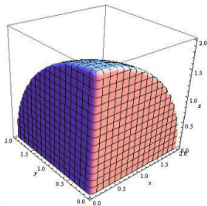
- ▶ După semnul divergenței, intensitatea surselor poate fi atât pozitivă cât și negativă. Câmpurile vectoriale care au  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  se numesc *solenoidale*.



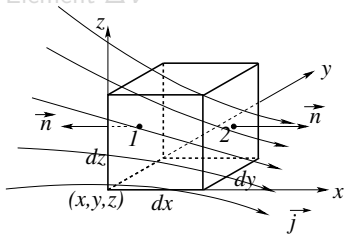
# Teorema Gauss

- ▶ Fluxul  $\phi$  printr-o suprafață  $S$  ce delimitează volumul  $V$ , este suma fluxurilor elementare  $\Delta\phi$  prin  $\Delta V$ .

- ▶ Suprafață închisă  $S$



- ▶ Element  $\Delta V$



- ▶ Elementul de flux  $\Delta\phi$  prin suprafețele cubului elementar, este

$$\Delta\phi = \oint_{\Delta V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Dar, am văzut, fluxul  $\Delta\phi$  prin element  $\Delta V$ , exprimat prin divergență, este,

$$\Delta\phi = (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

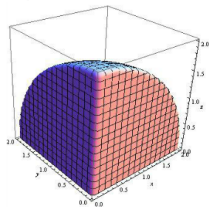
- ▶ Integrând pe suprafața închisă  $S$ , ce delimitează volumul  $V$ , ținând cont că elementele de flux prin fețele cuburilor alăturate se anulează reciproc (au normalele de sens opus), rămâne fluxul prin suprafața exterioară  $S$ , obținem Teorema Gauss

$$\phi = \sum \Delta\phi \rightarrow \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

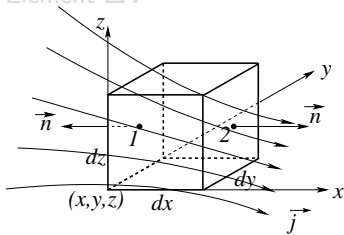
# Teorema Gauss

- ▶ Fluxul  $\phi$  printr-o suprafață  $S$  ce delimitează volumul  $V$ , este suma fluxurilor elementare  $\Delta\phi$  prin  $\Delta V$ .

- ▶ Suprafață închisă  $S$



- ▶ Element  $\Delta V$



- ▶ Elementul de flux  $\Delta\phi$  prin suprafețele cubului elementar, este

$$\Delta\phi = \oint_{\Delta V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Dar, am văzut, fluxul  $\Delta\phi$  prin element  $\Delta V$ , exprimat prin divergență, este,

$$\Delta\phi = (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

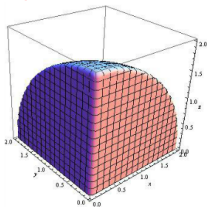
- ▶ Integrând pe suprafața închisă  $S$ , ce delimitează volumul  $V$ , ținând cont că elementele de flux prin fețele cuburilor alăturate se anulează reciproc (au normalele de sens opus), rămâne fluxul prin suprafața exterioară  $S$ , obținem Teorema Gauss

$$\phi = \sum \Delta\phi \rightarrow \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

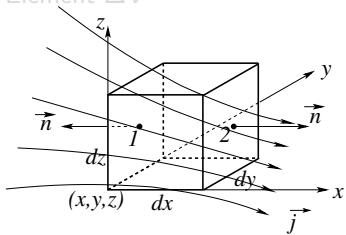
# Teorema Gauss

- ▶ Fluxul  $\phi$  printr-o suprafață  $S$  ce delimitează volumul  $V$ , este suma fluxurilor elementare  $\Delta\phi$  prin  $\Delta V$ .

- ▶ **Suprafață închisă  $S$**



- ▶ **Element  $\Delta V$**



- ▶ Elementul de flux  $\Delta\phi$  prin suprafețele cubului elementar, este

$$\Delta\phi = \oint_{\Delta V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Dar, am văzut, fluxul  $\Delta\phi$  prin element  $\Delta V$ , exprimat prin divergență, este,

$$\Delta\phi = (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

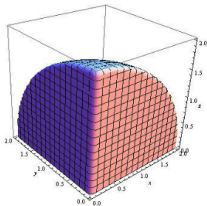
- ▶ Integrând pe suprafața închisă  $S$ , ce delimitează volumul  $V$ , ținând cont că elementele de flux prin fețele cuburilor alăturate se anulează reciproc (au normalele de sens opus), rămâne fluxul prin suprafața exterioară  $S$ , obținem Teorema Gauss

$$\phi = \sum \Delta\phi \rightarrow \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

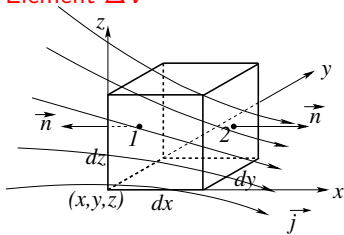
# Teorema Gauss

- ▶ Fluxul  $\phi$  printr-o suprafață  $S$  ce delimitează volumul  $V$ , este suma fluxurilor elementare  $\Delta\phi$  prin  $\Delta V$ .

- ▶ Suprafață închisă  $S$



- ▶ Element  $\Delta V$



- ▶ Elementul de flux  $\Delta\phi$  prin suprafețele cubului elementar, este

$$\Delta\phi = \oint_{\Delta V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Dar, am văzut, fluxul  $\Delta\phi$  prin element  $\Delta V$ , exprimat prin divergență, este,

$$\Delta\phi = (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

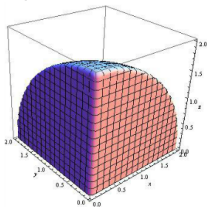
- ▶ Integrând pe suprafața închisă  $S$ , ce delimitează volumul  $V$ , ținând cont că elementele de flux prin fețele cuburilor alăturate se anulează reciproc (au normalele de sens opus), rămâne fluxul prin suprafața exterioară  $S$ , obținem Teorema Gauss

$$\phi = \sum \Delta\phi \rightarrow \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

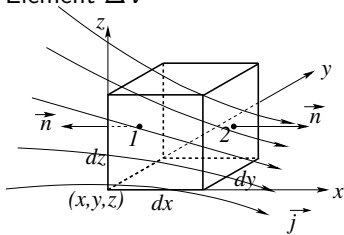
# Teorema Gauss

- ▶ Fluxul  $\phi$  printr-o suprafață  $S$  ce delimitează volumul  $V$ , este suma fluxurilor elementare  $\Delta\phi$  prin  $\Delta V$ .

- ▶ Suprafață închisă  $S$



- ▶ Element  $\Delta V$



- ▶ Elementul de flux  $\Delta\phi$  prin suprafețele cubului elementar, este

$$\Delta\phi = \oint_{\Delta V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Dar, am văzut, fluxul  $\Delta\phi$  prin element  $\Delta V$ , exprimat prin divergență, este,

$$\Delta\phi = (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

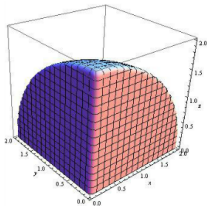
- ▶ Integrând pe suprafața închisă  $S$ , ce delimitează volumul  $V$ , ținând cont că elementele de flux prin fețele cuburilor alăturate se anulează reciproc (au normalele de sens opus), rămâne fluxul prin suprafața exterioară  $S$ , obținem Teorema Gauss

$$\phi = \sum \Delta\phi \rightarrow \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

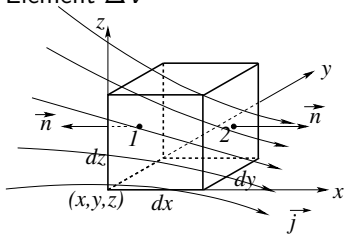
# Teorema Gauss

- ▶ Fluxul  $\phi$  printr-o suprafață  $S$  ce delimitează volumul  $V$ , este suma fluxurilor elementare  $\Delta\phi$  prin  $\Delta V$ .

- ▶ Suprafață închisă  $S$



- ▶ Element  $\Delta V$



- ▶ Elementul de flux  $\Delta\phi$  prin suprafețele cubului elementar, este

$$\Delta\phi = \oint_{\Delta V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Dar, am văzut, fluxul  $\Delta\phi$  prin element  $\Delta V$ , exprimat prin divergență, este,

$$\Delta\phi = (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

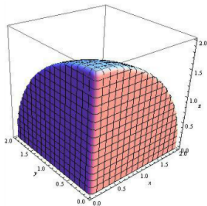
- ▶ Integrând pe suprafața închisă  $S$ , ce delimitează volumul  $V$ , ținând cont că elementele de flux prin fețele cuburilor alăturate se anulează reciproc (au normalele de sens opus), rămâne fluxul prin suprafața exterioară  $S$ , obținem Teorema Gauss

$$\phi = \sum \Delta\phi \rightarrow \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

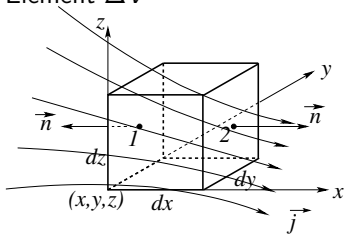
# Teorema Gauss

- ▶ Fluxul  $\phi$  printr-o suprafață  $S$  ce delimitează volumul  $V$ , este suma fluxurilor elementare  $\Delta\phi$  prin  $\Delta V$ .

- ▶ Suprafață închisă  $S$



- ▶ Element  $\Delta V$



- ▶ Elementul de flux  $\Delta\phi$  prin suprafețele cubului elementar, este

$$\Delta\phi = \oint_{\Delta V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Dar, am văzut, fluxul  $\Delta\phi$  prin element  $\Delta V$ , exprimat prin divergență, este,

$$\Delta\phi = (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

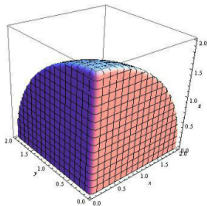
- ▶ Integrând pe suprafața închisă  $S$ , ce delimitează volumul  $V$ , ținând cont că elementele de flux prin fețele cuburilor alăturate se anulează reciproc (au normalele de sens opus), rămâne fluxul prin suprafața exterioară  $S$ , obținem Teorema Gauss

$$\phi = \sum \Delta\phi \rightarrow \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

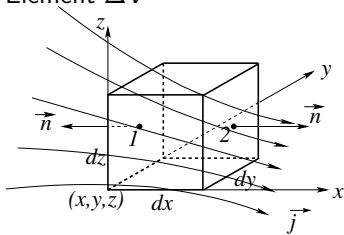
# Teorema Gauss

- ▶ Fluxul  $\phi$  printr-o suprafață  $S$  ce delimitează volumul  $V$ , este suma fluxurilor elementare  $\Delta\phi$  prin  $\Delta V$ .

- ▶ Suprafață închisă  $S$



- ▶ Element  $\Delta V$



- ▶ Elementul de flux  $\Delta\phi$  prin suprafețele cubului elementar, este

$$\Delta\phi = \oint_{\Delta V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Dar, am văzut, fluxul  $\Delta\phi$  prin element  $\Delta V$ , exprimat prin divergență, este,

$$\Delta\phi = (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

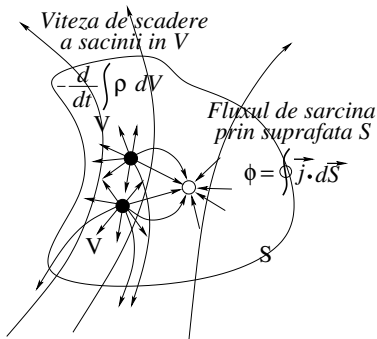
- ▶ Integrând pe suprafața închisă  $S$ , ce delimitează volumul  $V$ , ținând cont că elementele de flux prin fețele cuburilor alăturate se anulează reciproc (au normalele de sens opus), rămâne fluxul prin suprafața exterioară  $S$ , obținem Teorema Gauss

$$\phi = \sum \Delta\phi \rightarrow \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV$$

## Ecuția de continuitate

- ▶ Un flux net de curent  $\vec{j}$  ca sarcina/(cm<sup>2</sup> sec) ce iese din suprafața închisă  $S$ , este egal cu scăderea  $-dq/dt$  a sarcinii  $q = \int_V \rho dV$  din volumul interior

$$\phi = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$$



- ▶ Fluxul net de sarcină ce iese prin suprafața  $S$  a volumului  $V$ , conform teoremei Gauss este,

$$\phi = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV$$

- ▶ Dacă sarcina este distribuită cu densitatea  $\rho$ , atunci,

$$\frac{dq}{dt} = \int_V \frac{d\rho}{dt} dV$$

- ▶ Înlocuind în expresia fluxului de la început și identificând termenii de sub integrală, obținem,

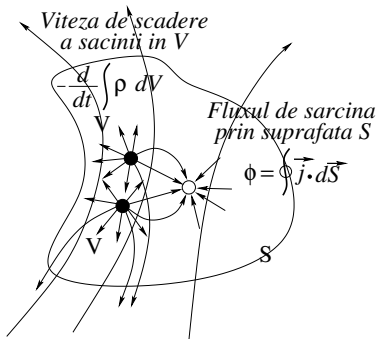
$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Aceasta este *ecuația de continuitate* și exprimă legea de conservare a sarcinii.

## Ecuția de continuitate

- ▶ Un flux net de curent  $\vec{j}$  ca sarcina/(cm<sup>2</sup> sec) ce iese din suprafața închisă  $S$ , este egal cu scăderea  $-dq/dt$  a sarcinii  $q = \int_V \rho dV$  din volumul interior

$$\phi = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$$



- ▶ Fluxul net de sarcină ce iese prin suprafața  $S$  a volumului  $V$ , conform teoremei Gauss este,

$$\phi = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV$$

- ▶ Dacă sarcina este distribuită cu densitatea  $\rho$ , atunci,

$$\frac{dq}{dt} = \int_V \frac{d\rho}{dt} dV$$

- ▶ Înlocuind în expresia fluxului de la început și identificând termenii de sub integrală, obținem,

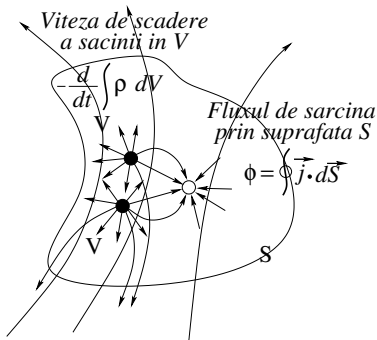
$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Aceasta este *ecuația de continuitate* și exprimă legea de conservare a sarcinii.

## Ecuția de continuitate

- ▶ Un flux net de curent  $\vec{j}$  ca sarcina/(cm<sup>2</sup> sec) ce iese din suprafața închisă  $S$ , este egal cu scăderea  $-dq/dt$  a sarcinii  $q = \int_V \rho dV$  din volumul interior

$$\phi = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$$



- ▶ Fluxul net de sarcină ce iese prin suprafața  $S$  a volumului  $V$ , conform teoremei Gauss este,

$$\phi = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV$$

- ▶ Dacă sarcina este distribuită cu densitatea  $\rho$ , atunci,

$$\frac{dq}{dt} = \int_V \frac{d\rho}{dt} dV$$

- ▶ Înlocuind în expresia fluxului de la început și identificând termenii de sub integrală, obținem,

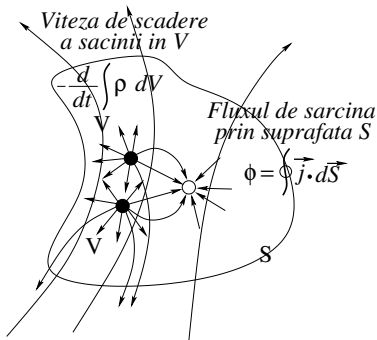
$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Aceasta este *ecuația de continuitate* și exprimă legea de conservare a sarcinii.

## Ecuția de continuitate

- ▶ Un flux net de curent  $\vec{j}$  ca sarcina/(cm<sup>2</sup> sec) ce iese din suprafața închisă  $S$ , este egal cu scăderea  $-dq/dt$  a sarcinii  $q = \int_V \rho dV$  din volumul interior

$$\phi = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$$



- ▶ Fluxul net de sarcină ce iese prin suprafața  $S$  a volumului  $V$ , conform teoremei Gauss este,

$$\phi = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV$$

- ▶ Dacă sarcina este distribuită cu densitatea  $\rho$ , atunci,

$$\frac{dq}{dt} = \int_V \frac{d\rho}{dt} dV$$

- ▶ Înlocuind în expresia fluxului de la început și identificând termenii de sub integrală, obținem,

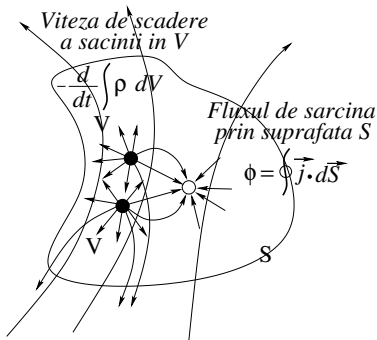
$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Aceasta este *ecuația de continuitate* și exprimă legea de conservare a sarcinii.

## Ecuția de continuitate

- ▶ Un flux net de curent  $\vec{j}$  ca sarcina/(cm<sup>2</sup> sec) ce iese din suprafața închisă  $S$ , este egal cu scăderea  $-dq/dt$  a sarcinii  $q = \int_V \rho dV$  din volumul interior

$$\phi = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$$



- ▶ Fluxul net de sarcină ce iese prin suprafața  $S$  a volumului  $V$ , conform teoremei Gauss este,

$$\phi = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV$$

- ▶ Dacă sarcina este distribuită cu densitatea  $\rho$ , atunci,

$$\frac{dq}{dt} = \int_V \frac{d\rho}{dt} dV$$

- ▶ Înlocuind în expresia fluxului de la început și identificând termenii de sub integrală, obținem,

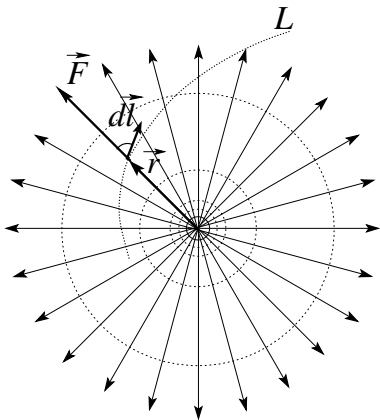
$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Aceasta este *ecuția de continuitate* și exprimă legea de conservare a sarcinii.

## Circulația pe un contur

- Fie curba  $L$  și un câmp vectorial  $\vec{F}(\vec{r})$ .  
Lucrul mecanic elementar  $\vec{F} \cdot d\vec{l} = F_l dl$ .  
*Integrala curbilinie de-a lungul curbei  $L$*

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_L F_l dl$$



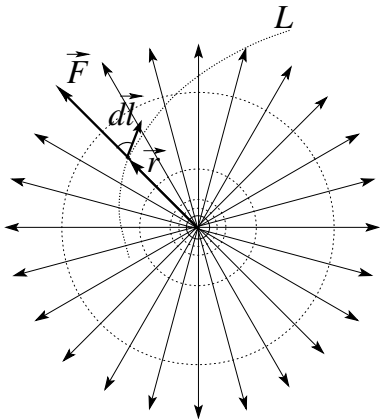
- Dacă curba  $L$  este închisă, integrala se numește *circulația* vectorului  $\vec{F}$  pe conturul  $L$ , adică,

$$C(\vec{F}) = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_L F_l dl$$

## Circulația pe un contur

- Fie curba  $L$  și un câmp vectorial  $\vec{F}(\vec{r})$ .  
Lucrul mecanic elementar  $\vec{F} \cdot d\vec{l} = F_l dl$ .  
*Integrala curbilinie de-a lungul curbei  $L$*

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_L F_l dl$$



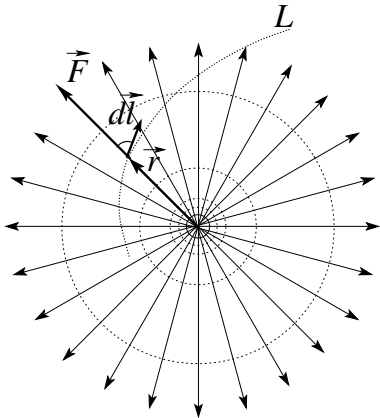
- Dacă curba  $L$  este închisă, integrala se numește *circulația* vectorului  $\vec{F}$  pe conturul  $L$ , adică,

$$C(\vec{F}) = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_L F_l dl$$

## Circulația pe un contur

- Fie curba  $L$  și un câmp vectorial  $\vec{F}(\vec{r})$ .  
Lucrul mecanic elementar  $\vec{F} \cdot d\vec{l} = F_l dl$ .  
*Integrala curbilinie de-a lungul curbei  $L$*

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_L F_l dl$$



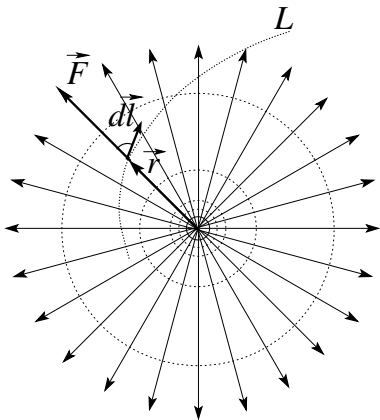
- Dacă curba  $L$  este închisă, integrala se numește *circulația* vectorului  $\vec{F}$  pe conturul  $L$ , adică,

$$C(\vec{F}) = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_L F_l dl$$

## Circulația pe un contur

- Fie curba  $L$  și un câmp vectorial  $\vec{F}(\vec{r})$ .  
Lucrul mecanic elementar  $\vec{F} \cdot d\vec{l} = F_l dl$ .  
*Integrala curbilinie de-a lungul curbei  $L$*

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_L F_l dl$$



- Dacă curba  $L$  este închisă, integrala se numește *circulația* vectorului  $\vec{F}$  pe conturul  $L$ , adică,

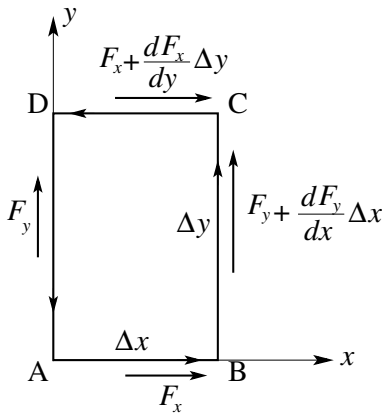
$$C(\vec{F}) = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_L F_l dl$$

## Rotorul unui vector

- Circulația pe conturul infinitesimal ABCD din planul  $xy$  este,

$$\Delta C = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_A^B F_x dx + \int_B^C F_y dy + \int_C^D F_x dx + \int_D^A F_y dy$$



- Sumarea pe laturile contur ABCD (normala  $\vec{n}$  paralelă cu axa  $z$ ) dă

$$\Delta C_z = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$= F_x \Delta x + \left( F_y + \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y$$

$$- \left( F_x + \frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x - F_y \Delta y$$

- Notăm  $\Delta S_z = \Delta x \Delta y$ . Circulația pe conturul cu  $\vec{n}$  paralel cu axa  $z$ ,

$$\Delta C_z = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta S_z$$

- la fel obținem și  $\Delta C_x$  și  $\Delta C_y$ ,

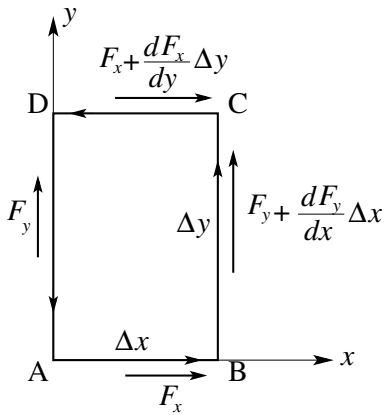
$$\Delta C_x = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \Delta S_x$$

$$\Delta C_y = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \Delta S_y$$

## Rotorul unui vector

- Circulația pe conturul infinitesimal ABCD din planul  $xy$  este,

$$\begin{aligned}\Delta C &= \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_A^B F_x dx + \int_B^C F_y dy + \int_C^D F_x dx + \int_D^A F_y dy\end{aligned}$$



- Sumarea pe laturile contur ABCD (normala  $\vec{n}$  paralelă cu axa  $z$ ) dă

$$\begin{aligned}\Delta C_z &= \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= F_x \Delta x + \left( F_y + \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \\ &\quad - \left( F_x + \frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x - F_y \Delta y\end{aligned}$$

- Notăm  $\Delta S_z = \Delta x \Delta y$ . Circulația pe conturul cu  $\vec{n}$  paralel cu axa  $z$ ,

$$\Delta C_z = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta S_z$$

- la fel obținem și  $\Delta C_x$  și  $\Delta C_y$ ,

$$\Delta C_x = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \Delta S_x$$

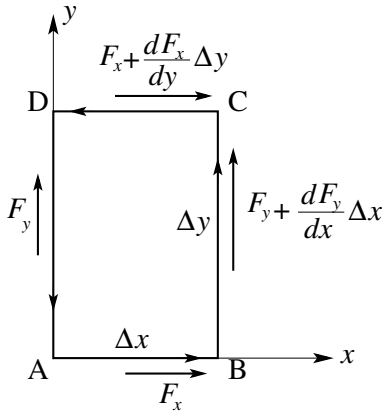
$$\Delta C_y = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \Delta S_y$$

## Rotorul unui vector

- Circulația pe conturul infinitezimal ABCD din planul  $xy$  este,

$$\Delta C = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_A^B F_x dx + \int_B^C F_y dy + \int_C^D F_x dx + \int_D^A F_y dy$$



- Sumarea pe laturile contur ABCD (normala  $\vec{n}$  paralelă cu axa  $z$ ) dă

$$\Delta C_z = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$= F_x \Delta x + \left( F_y + \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y$$

$$- \left( F_x + \frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x - F_y \Delta y$$

Notăm  $\Delta S_z = \Delta x \Delta y$ . Circulația pe conturul cu  $\vec{n}$  paralel cu axa  $z$ ,

$$\Delta C_z = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta S_z$$

- la fel obținem și  $\Delta C_x$  și  $\Delta C_y$ ,

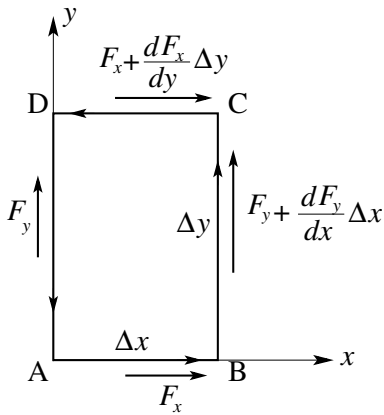
$$\Delta C_x = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \Delta S_x$$

$$\Delta C_y = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \Delta S_y$$

## Rotorul unui vector

- Circulația pe conturul infinitesimal ABCD din planul  $xy$  este,

$$\Delta C = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ = \int_A^B F_x dx + \int_B^C F_y dy + \int_C^D F_x dx + \int_D^A F_y dy$$



- Sumarea pe laturile contur ABCD (normala  $\vec{n}$  paralelă cu axa  $z$ ) dă

$$\Delta C_z = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ = F_x \Delta x + \left( F_y + \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \\ - \left( F_x + \frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x - F_y \Delta y$$

- Notăm  $\Delta S_z = \Delta x \Delta y$ . Circulația pe conturul cu  $\vec{n}$  paralel cu axa  $z$ ,

$$\Delta C_z = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta S_z$$

- la fel obținem și  $\Delta C_x$  și  $\Delta C_y$ ,

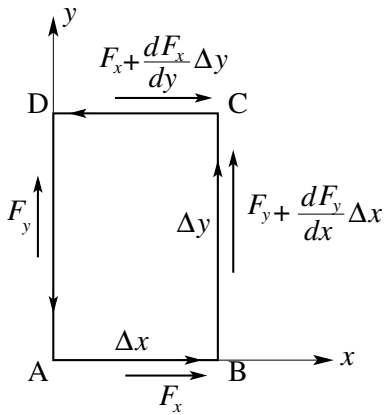
$$\Delta C_x = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \Delta S_x$$

$$\Delta C_y = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \Delta S_y$$

## Rotorul unui vector

- Circulația pe conturul infinitesimal ABCD din planul  $xy$  este,

$$\Delta C = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ = \int_A^B F_x dx + \int_B^C F_y dy + \int_C^D F_x dx + \int_D^A F_y dy$$



- Sumarea pe laturile contur ABCD (normala  $\vec{n}$  paralelă cu axa  $z$ ) dă

$$\Delta C_z = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ = F_x \Delta x + \left( F_y + \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \\ - \left( F_x + \frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x - F_y \Delta y$$

- Notăm  $\Delta S_z = \Delta x \Delta y$ . Circulația pe conturul cu  $\vec{n}$  paralel cu axa  $z$ ,

$$\Delta C_z = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta S_z$$

- la fel obținem și  $\Delta C_x$  și  $\Delta C_y$ ,

$$\Delta C_x = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \Delta S_x$$

$$\Delta C_y = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \Delta S_y$$

## Rotorul unui vector

►  $\Delta C_x$ ,  $\Delta C_y$  și  $\Delta C_z$  sunt componentele elementului de circulație  $\Delta C$ , exprimat ca produsul scalar  $(\text{rot } \vec{F}) \cdot \Delta \vec{S}$ , cu vectorul  $\text{rot } \vec{F}$ , notat  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ , de componente

$$\begin{cases} \text{rot}_x \vec{F} = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \text{rot}_y \vec{F} = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \text{rot}_z \vec{F} = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{cases}$$

scris sub forma de determinant

$$\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

unde  $\vec{i}, \vec{j}$  și  $\vec{k}$  sunt versorii axelor.

► Acum, circulația vectorului  $\vec{F}$  pe un contur închis infinitezimal se poate scrie sub forma,

$$\begin{aligned} \Delta C &= \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \Delta \vec{S} \\ &= \text{rot}_n \vec{F} \Delta S \end{aligned}$$

unde trebuie să înțelegem prin  $\vec{n}$  normala pozitivă la suprafața  $\Delta S$ .

## Rotorul unui vector

►  $\Delta C_x$ ,  $\Delta C_y$  și  $\Delta C_z$  sunt componentele elementului circulație  $\Delta C$ , exprimat ca produsul scalar ( $\text{rot } \vec{F}$ ) $\cdot\Delta\vec{S}$ , cu vectorul  $\text{rot } \vec{F}$ , notat  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ , de componente

$$\begin{cases} \text{rot}_x \vec{F} = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \text{rot}_y \vec{F} = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \text{rot}_z \vec{F} = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{cases}$$

scris sub forma de determinant

$$\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

unde  $\vec{i}, \vec{j}$  și  $\vec{k}$  sunt versorii axelor.

► Acum, circulația vectorului  $\vec{F}$  pe un contur închis infinitezimal se poate scrie sub forma,

$$\begin{aligned} \Delta C &= \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \Delta\vec{S} \\ &= \text{rot}_n \vec{F} \Delta S \end{aligned}$$

unde trebuie să înțelegem prin  $\vec{n}$  normala pozitivă la suprafața  $\Delta S$ .

## Rotorul unui vector

►  $\Delta C_x$ ,  $\Delta C_y$  și  $\Delta C_z$  sunt componentele elementului circulație  $\Delta C$ , exprimat ca produsul scalar  $(\text{rot } \vec{F}) \cdot \Delta \vec{S}$ , cu vectorul  $\text{rot } \vec{F}$ , notat  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ , de componente

$$\begin{cases} \text{rot}_x \vec{F} = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \text{rot}_y \vec{F} = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \text{rot}_z \vec{F} = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{cases}$$

scris sub forma de determinant

$$\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

unde  $\vec{i}, \vec{j}$  și  $\vec{k}$  sunt versorii axelor.

► Acum, circulația vectorului  $\vec{F}$  pe un contur închis infinitezimal se poate scrie sub forma,

$$\begin{aligned} \Delta C &= \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \Delta \vec{S} \\ &= \text{rot}_n \vec{F} \Delta S \end{aligned}$$

unde trebuie să înțelegem prin  $\vec{n}$  normala pozitivă la suprafața  $\Delta S$ .

## Rotorul unui vector

►  $\Delta C_x$ ,  $\Delta C_y$  și  $\Delta C_z$  sunt componentele elementului circulație  $\Delta C$ , exprimat ca produsul scalar  $(\text{rot } \vec{F}) \cdot \Delta \vec{S}$ , cu vectorul  $\text{rot } \vec{F}$ , notat  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ , de componente

$$\begin{cases} \text{rot}_x \vec{F} = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \text{rot}_y \vec{F} = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \text{rot}_z \vec{F} = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{cases}$$

scris sub forma de determinant

$$\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

unde  $\vec{i}, \vec{j}$  și  $\vec{k}$  sunt versorii axelor.

► Acum, circulația vectorului  $\vec{F}$  pe un contur închis infinitezimal se poate scrie sub forma,

$$\begin{aligned} \Delta C &= \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \Delta \vec{S} \\ &= \text{rot}_n \vec{F} \Delta S \end{aligned}$$

unde trebuie să înțelegem prin  $\vec{n}$  normala pozitivă la suprafața  $\Delta S$ .

## Interpretarea fizică a rotorului unui vector

- Pentru un element  $\Delta S \rightarrow 0$  avem

$$dC = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_n \Delta S$$

- De aici interpretarea rotorului ca

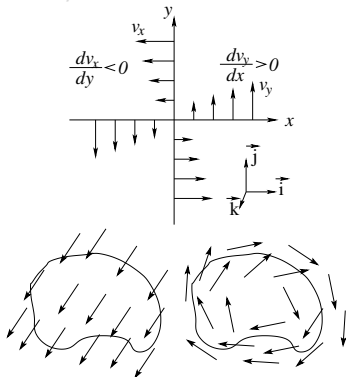
$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta S}$$

vectorul  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$  pe o direcție  $\vec{n}$ , exprimă circulația vectorului  $\vec{F}$  (de exemplu, lucrul mecanic efectuat la mișcarea) pe un contur închis, pe unitatea de suprafață  $\Delta S$  cuprinsă de contur.

- Să luăm, de exemplu, componenta vectorului rotor pe direcția  $z$

$$\text{rot}_z \vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Dacă avem un curent de fluid cu un câmp de viteze  $\vec{v}$  ce are  $\partial v_y / \partial x > 0$  și  $\partial v_x / \partial y < 0$ , acesta va începe să se rotească în jurul direcției  $\vec{k}$ . Suma lor este  $\text{rot}_z \vec{v}$ .



$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{v} \neq 0$$

## Interpretarea fizică a rotorului unui vector

- Pentru un element  $\Delta S \rightarrow 0$  avem

$$dC = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_n \Delta S$$

- De aici interpretarea rotorului ca

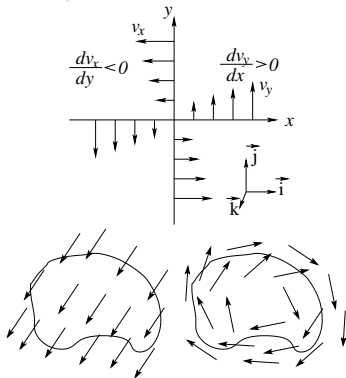
$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta S}$$

vectorul  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$  pe o direcție  $\vec{n}$ , exprimă circulația vectorului  $\vec{F}$  (de exemplu, lucrul mecanic efectuat la mișcarea) pe un contur închis, pe unitatea de suprafață  $\Delta S$  cuprinsă de contur.

- Să luăm, de exemplu, componenta vectorului rotor pe direcția  $z$

$$\text{rot}_z \vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Dacă avem un curent de fluid cu un câmp de viteze  $\vec{v}$  ce are  $\partial v_y / \partial x > 0$  și  $\partial v_x / \partial y < 0$ , acesta va începe să se rotească în jurul direcției  $\vec{k}$ . Suma lor este  $\text{rot}_z \vec{v}$ .



$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{v} \neq 0$$

## Interpretarea fizică a rotorului unui vector

- ▶ Pentru un element  $\Delta S \rightarrow 0$  avem

$$dC = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_n \Delta S$$

- ▶ De aici interpretarea rotorului ca

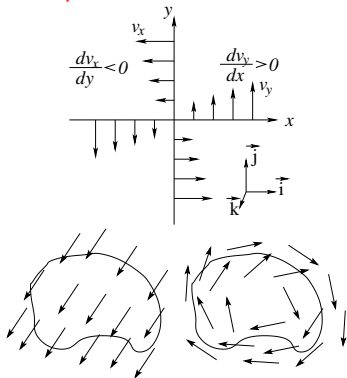
$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta S}$$

vectorul  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$  pe o direcție  $\vec{n}$ , exprimă circulația vectorului  $\vec{F}$  (de exemplu, lucrul mecanic efectuat la mișcarea) pe un contur închis, pe unitatea de suprafață  $\Delta S$  cuprinsă de contur.

- ▶ Să luăm, de exemplu, componenta vectorului rotor pe direcția  $z$

$$\text{rot}_z \vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Dacă avem un curent de fluid cu un câmp de viteze  $\vec{v}$  ce are  $\partial v_y / \partial x > 0$  și  $\partial v_x / \partial y < 0$ , acesta va începe să se rotească în jurul direcției  $\vec{k}$ . Suma lor este  $\text{rot}_z \vec{v}$ .



$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} \neq 0$$

## Interpretarea fizică a rotorului unui vector

- Pentru un element  $\Delta S \rightarrow 0$  avem

$$dC = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = (\vec{\nabla} \times \vec{F})_n \Delta S$$

- De aici interpretarea rotorului ca

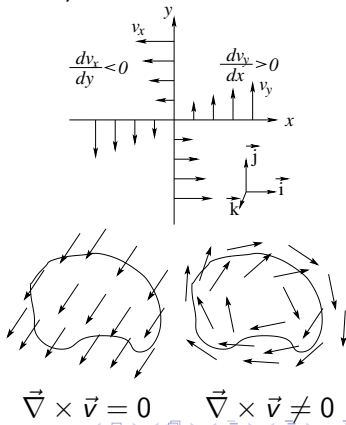
$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta S}$$

vectorul  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$  pe o direcție  $\vec{n}$ , exprimă circulația vectorului  $\vec{F}$  (de exemplu, lucrul mecanic efectuat la mișcarea) pe un contur închis, pe unitatea de suprafață  $\Delta S$  cuprinsă de contur.

- Să luăm, de exemplu, componenta vectorului rotor pe direcția  $z$

$$\text{rot}_z \vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

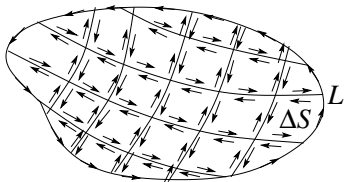
Dacă avem un curent de fluid cu un câmp de viteze  $\vec{v}$  ce are  $\partial v_y / \partial x > 0$  și  $\partial v_x / \partial y < 0$ , acesta va începe să se rotească în jurul direcției  $\vec{k}$ . Suma lor este  $\text{rot}_z \vec{v}$ .



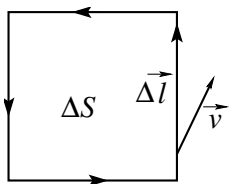
# Teorema Stokes

- ▶ Circulația  $C$  a vectorului  $\vec{v}$  pe conturul  $L$  care delimitează suprafața  $S$ , este suma circulațiilor elementare  $\Delta C$  pe  $\Delta S$ .

- ▶ Conturul închis  $L$



- ▶ Element  $\Delta S$



- ▶ Elementul de circulație  $\Delta C$  pe conturul elementar  $\Delta S$ , este

$$\Delta C = \oint_{\Delta S} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

- ▶ Dar, am văzut, circulația  $\Delta C$  pe conturul elementar  $\Delta S$ , exprimat prin rotor, este,

$$\Delta C = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \Delta \vec{S}$$

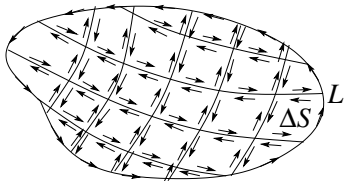
- ▶ Integrând pe conturul închis  $L$  ce delimitează suprafața  $S$ , ținând cont că elementele de circulație pe laturile adiacente ale pătratelor elementare se anulează reciproc (sunt parcurse în sensuri opuse), rămâne circulația pe conturul exterior  $L$ , obținem Teorema Stokes,

$$C = \sum \Delta C \rightarrow \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

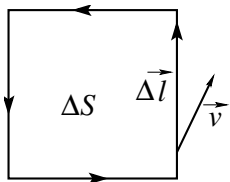
# Teorema Stokes

- ▶ Circulația  $C$  a vectorului  $\vec{v}$  pe conturul  $L$  care delimitează suprafața  $S$ , este suma circulațiilor elementare  $\Delta C$  pe  $\Delta S$ .

- ▶ **Conturul închis  $L$**



- ▶ Element  $\Delta S$



- ▶ Elementul de circulație  $\Delta C$  pe conturul elementar  $\Delta S$ , este

$$\Delta C = \oint_{\Delta S} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

- ▶ Dar, am văzut, circulația  $\Delta C$  pe conturul elementar  $\Delta S$ , exprimat prin rotor, este,

$$\Delta C = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \Delta \vec{S}$$

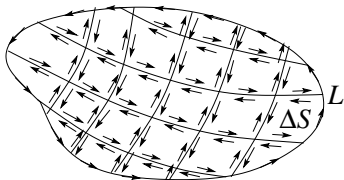
- ▶ Integrând pe conturul închis  $L$  ce delimitează suprafața  $S$ , ținând cont că elementele de circulație pe laturile adiacente ale pătratelor elementare se anulează reciproc (sunt parcurse în sensuri opuse), rămâne circulația pe conturul exterior  $L$ , obținem Teorema Stokes,

$$C = \sum \Delta C \rightarrow \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

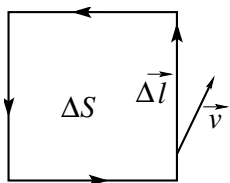
# Teorema Stokes

- ▶ Circulația  $C$  a vectorului  $\vec{v}$  pe conturul  $L$  care delimitează suprafața  $S$ , este suma circulațiilor elementare  $\Delta C$  pe  $\Delta S$ .

- ▶ Conturul închis  $L$



- ▶ Element  $\Delta S$



- ▶ Elementul de circulație  $\Delta C$  pe conturul elementar  $\Delta S$ , este

$$\Delta C = \oint_{\Delta S} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

- ▶ Dar, am văzut, circulația  $\Delta C$  pe conturul elementar  $\Delta S$ , exprimat prin rotor, este,

$$\Delta C = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \Delta \vec{S}$$

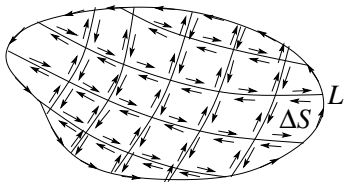
- ▶ Integrând pe conturul închis  $L$  ce delimitează suprafața  $S$ , ținând cont că elementele de circulație pe laturile adiacente ale pătratelor elementare se anulează reciproc (sunt parcurse în sensuri opuse), rămâne circulația pe conturul exterior  $L$ , obținem Teorema Stokes,

$$C = \sum \Delta C \rightarrow \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

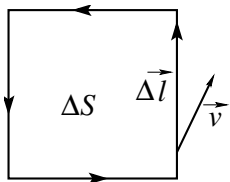
# Teorema Stokes

- ▶ Circulația  $C$  a vectorului  $\vec{v}$  pe conturul  $L$  care delimitează suprafața  $S$ , este suma circulațiilor elementare  $\Delta C$  pe  $\Delta S$ .

- ▶ Conturul închis  $L$



- ▶ Element  $\Delta S$



- ▶ Elementul de circulație  $\Delta C$  pe conturul elementar  $\Delta S$ , este

$$\Delta C = \oint_{\Delta S} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

- ▶ Dar, am văzut, circulația  $\Delta C$  pe conturul elementar  $\Delta S$ , exprimat prin rotor, este,

$$\Delta C = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \Delta \vec{S}$$

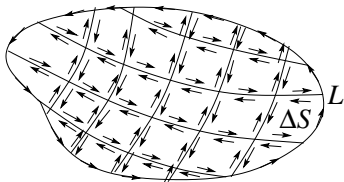
- ▶ Integrând pe conturul închis  $L$  ce delimitează suprafața  $S$ , ținând cont că elementele de circulație pe laturile adiacente ale pătratelor elementare se anulează reciproc (sunt parcurse în sensuri opuse), rămâne circulația pe conturul exterior  $L$ , obținem Teorema Stokes,

$$C = \sum \Delta C \rightarrow \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

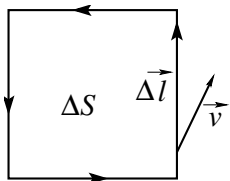
# Teorema Stokes

- ▶ Circulația  $C$  a vectorului  $\vec{v}$  pe conturul  $L$  care delimitează suprafața  $S$ , este suma circulațiilor elementare  $\Delta C$  pe  $\Delta S$ .

- ▶ Conturul închis  $L$



- ▶ Element  $\Delta S$



- ▶ Elementul de circulație  $\Delta C$  pe conturul elementar  $\Delta S$ , este

$$\Delta C = \oint_{\Delta S} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

- ▶ Dar, am văzut, circulația  $\Delta C$  pe conturul elementar  $\Delta S$ , exprimat prin rotor, este,

$$\Delta C = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \Delta \vec{S}$$

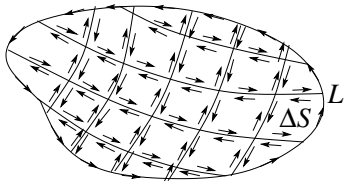
- ▶ Integrând pe conturul închis  $L$  ce delimitează suprafața  $S$ , ținând cont că elementele de circulație pe laturile adiacente ale pătratelor elementare se anulează reciproc (sunt parcurse în sensuri opuse), rămâne circulația pe conturul exterior  $L$ , obținem Teorema Stokes,

$$C = \sum \Delta C \rightarrow \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

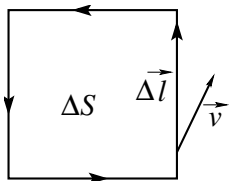
# Teorema Stokes

- ▶ Circulația  $C$  a vectorului  $\vec{v}$  pe conturul  $L$  care delimitează suprafața  $S$ , este suma circulațiilor elementare  $\Delta C$  pe  $\Delta S$ .

- ▶ Conturul închis  $L$



- ▶ Element  $\Delta S$



- ▶ Elementul de circulație  $\Delta C$  pe conturul elementar  $\Delta S$ , este

$$\Delta C = \oint_{\Delta S} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

- ▶ Dar, am văzut, circulația  $\Delta C$  pe conturul elementar  $\Delta S$ , exprimat prin rotor, este,

$$\Delta C = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \Delta \vec{S}$$

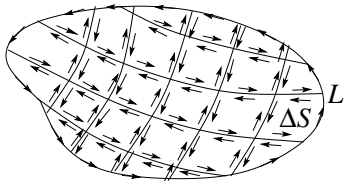
- ▶ Integrând pe conturul închis  $L$  ce delimitează suprafața  $S$ , ținând cont că elementele de circulație pe laturile adiacente ale pătratelor elementare se anulează reciproc (sunt parcurse în sensuri opuse), rămâne circulația pe conturul exterior  $L$ , obținem Teorema Stokes,

$$C = \sum \Delta C \rightarrow \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

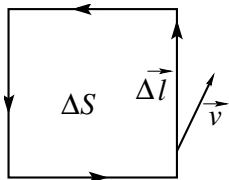
# Teorema Stokes

- ▶ Circulația  $C$  a vectorului  $\vec{v}$  pe conturul  $L$  care delimitează suprafața  $S$ , este suma circulațiilor elementare  $\Delta C$  pe  $\Delta S$ .

- ▶ Conturul închis  $L$



- ▶ Element  $\Delta S$



- ▶ Elementul de circulație  $\Delta C$  pe conturul elementar  $\Delta S$ , este

$$\Delta C = \oint_{\Delta S} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

- ▶ Dar, am văzut, circulația  $\Delta C$  pe conturul elementar  $\Delta S$ , exprimat prin rotor, este,

$$\Delta C = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \Delta \vec{S}$$

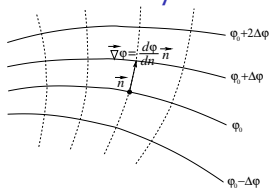
- ▶ Integrând pe conturul închis  $L$  ce delimitează suprafața  $S$ , ținând cont că elementele de circulație pe laturile adiacente ale pătratelor elementare se anulează reciproc (sunt parcurse în sensuri opuse), rămâne circulația pe conturul exterior  $L$ , obținem Teorema Stokes,

$$C = \sum \Delta C \rightarrow \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

# REZUMAT: Gradient, divergență, rotor - funcții locale

- Gradientul unui scalar  $\varphi$ :

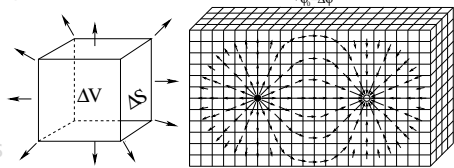
$$\text{grad } \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi = \frac{d\varphi}{dn} \vec{n} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta n} \vec{n}$$



- Divergența unui vector  $\vec{j}$  (dens. de flux)

$$\text{div } \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{d\phi}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{j}_i \cdot \Delta \vec{S}_i}{\Delta V}$$

$$\phi = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV \quad \text{Gauss}$$

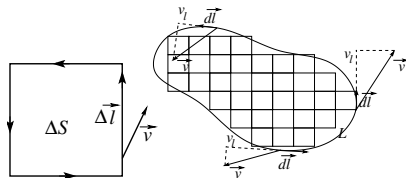


$$\Delta \phi = \sum \vec{j}_i \cdot \Delta \vec{S}_i$$

- Rotorul unui vector  $\vec{v}$  (dens. circulație)

$$\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{dC}{dS} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{v}_i \cdot \Delta \vec{l}_i}{\Delta S}$$

$$C = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} \quad \text{Stokes}$$

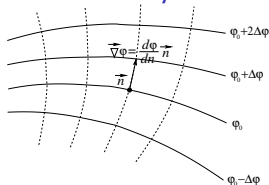


$$\Delta C_j = \sum \vec{v}_i \cdot \Delta \vec{l}_i$$

# REZUMAT: Gradient, divergență, rotor - funcții locale

- Gradientul unui scalar  $\varphi$ :

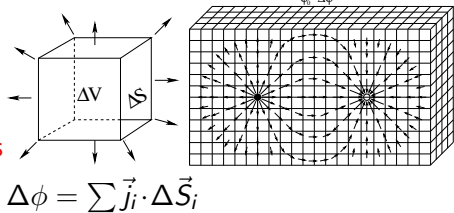
$$\text{grad}\varphi \equiv \vec{\nabla}\varphi = \frac{d\varphi}{dn}\vec{n} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta n}\vec{n}$$



- Divergența unui vector  $\vec{j}$  (dens. de flux)

$$\text{div}\vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{d\phi}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{j}_i \cdot \Delta \vec{S}_i}{\Delta V}$$

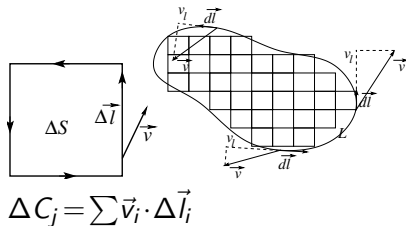
$$\phi = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV \quad \text{Gauss}$$



- Rotorul unui vector  $\vec{v}$  (dens. circulație)

$$\text{rot}\vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{dC}{dS} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{v}_i \cdot \Delta \vec{l}_i}{\Delta S}$$

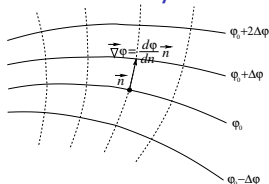
$$C = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} \quad \text{Stokes}$$



# REZUMAT: Gradient, divergență, rotor - funcții locale

- Gradientul unui scalar  $\varphi$ :

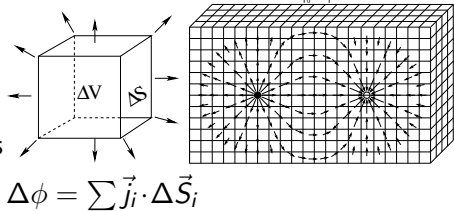
$$\text{grad } \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi = \frac{d\varphi}{dn} \vec{n} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta n} \vec{n}$$



- Divergența unui vector  $\vec{j}$  (dens. de flux)

$$\text{div } \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{d\phi}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{j}_i \cdot \Delta \vec{S}_i}{\Delta V}$$

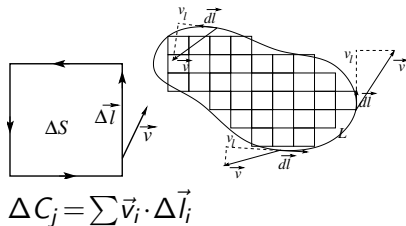
$$\phi = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV \quad \text{Gauss}$$



- Rotorul unui vector  $\vec{v}$  (dens. circulație)

$$\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{dC}{dS} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{v}_i \cdot \Delta \vec{l}_i}{\Delta S}$$

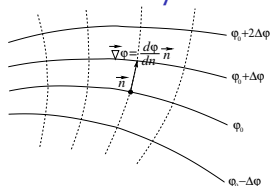
$$C = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} \quad \text{Stokes}$$



# REZUMAT: Gradient, divergență, rotor - funcții locale

- Gradientul unui scalar  $\varphi$ :

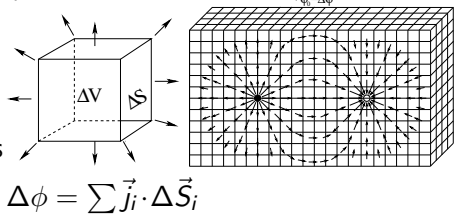
$$\text{grad} \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi = \frac{d\varphi}{dn} \vec{n} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta n} \vec{n}$$



- Divergența unui vector  $\vec{j}$  (dens. de flux)

$$\text{div} \vec{j} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{d\phi}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{j}_i \cdot \Delta \vec{S}_i}{\Delta V}$$

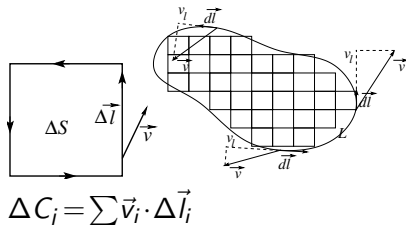
$$\phi = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV \quad \text{Gauss}$$



- Rotorul unui vector  $\vec{v}$  (dens. circulație)

$$\text{rot} \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{dC}{dS} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{v}_i \cdot \Delta \vec{l}_i}{\Delta S}$$

$$C = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} \quad \text{Stokes}$$



## REZUMAT - operatorul vectorial $\vec{\nabla}$

► Operator  $\vec{\nabla}$  în sistem cartezian  $x, y, z$ :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

► Gradientul unui scalar  $\varphi$

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$$

► Divergența unui vector  $\vec{A}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

► Rotorul unui vector  $\vec{A}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

sau dezvoltat,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

## REZUMAT - operatorul vectorial $\vec{\nabla}$

▶ Operator  $\vec{\nabla}$  în sistem cartezian  $x, y, z$ : 
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

▶ Gradientul unui scalar  $\varphi$

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$$

▶ Divergența unui vector  $\vec{A}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

▶ Rotorul unui vector  $\vec{A}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

sau dezvoltat,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

## REZUMAT - operatorul vectorial $\vec{\nabla}$

▶ Operator  $\vec{\nabla}$  în sistem cartezian  $x, y, z$ : 
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

▶ Gradientul unui scalar  $\varphi$  
$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$$

▶ Divergența unui vector  $\vec{A}$  
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

▶ Rotorul unui vector  $\vec{A}$  
$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

sau dezvoltat,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

## REZUMAT - operatorul vectorial $\vec{\nabla}$

▶ Operator  $\vec{\nabla}$  în sistem cartezian  $x, y, z$ :  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$

▶ Gradientul unui scalar  $\varphi$   $\vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$

▶ Divergența unui vector  $\vec{A}$   $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

▶ Rotorul unui vector  $\vec{A}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

sau dezvoltat,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

## REZUMAT - operatorul vectorial $\vec{\nabla}$

▶ Operator  $\vec{\nabla}$  în sistem cartezian  $x, y, z$ : 
$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

▶ Gradientul unui scalar  $\varphi$  
$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$$

▶ Divergența unui vector  $\vec{A}$  
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

▶ Rotorul unui vector  $\vec{A}$  
$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

sau dezvoltat,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

## Partea III

# Câmpuri Electrice și Magnetice Staționare

# Câmpuri Electrice și Magnetice Staționare

Câmp electrostatic - Legea Coulomb

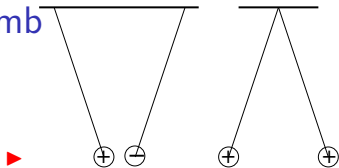
Fluxul câmpului electrostatic

Câmp magnetostatic - Legea Biot-Savart

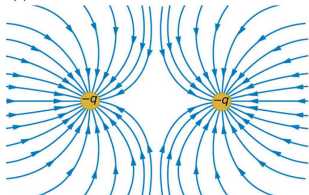
Circulația câmpului magnetic staționar

# Câmp electrostatic - Legea Coulomb

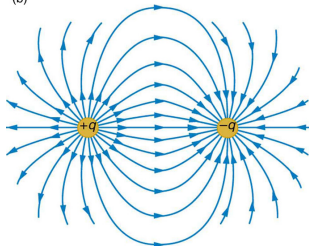
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$



(a)



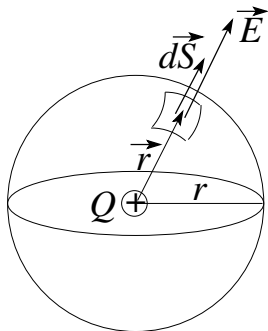
(b)



# Fluxul câmpului electrostatic

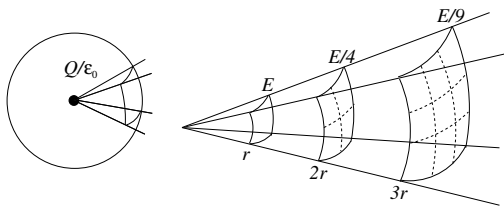
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \vec{r}}{r^2 r}$$



- Fluxul câmpului electric prin suprafața unei sfere

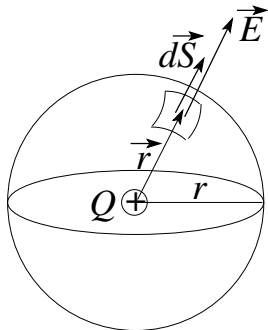
$$\begin{aligned}\phi_E &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$



# Fluxul câmpului electrostatic

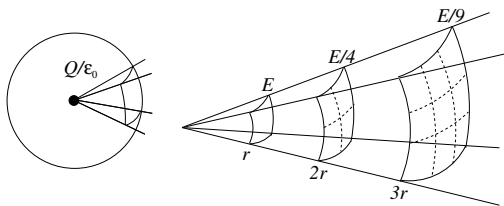
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\vec{r}}{r^2 r}$$



- Fluxul câmpului electric prin suprafața unei sfere

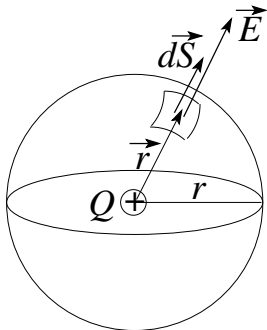
$$\begin{aligned}\phi_E &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$



# Fluxul câmpului electrostatic

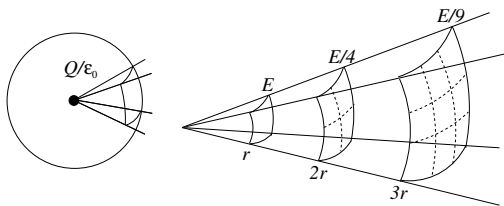
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \vec{r}}{r^2 r}$$



- Fluxul câmpului electric prin suprafața unei sfere

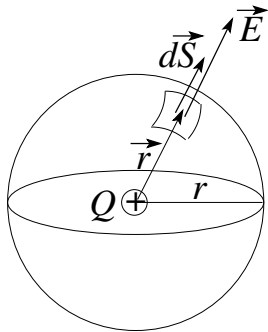
$$\begin{aligned}\phi_E &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$



# Fluxul câmpului electrostatic

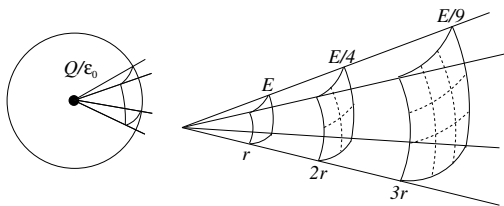
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\vec{r}}{r^2 r}$$



- Fluxul câmpului electric prin suprafața unei sfere

$$\begin{aligned}\phi_E &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

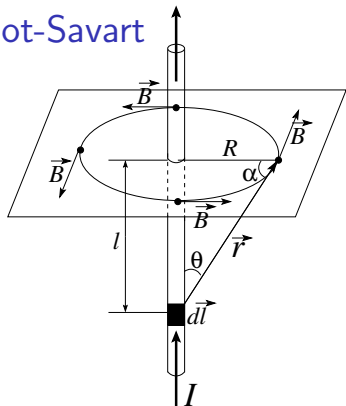


# Câmp magnetostatic - Legea Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (1)$$

- Legea Ampère se obține din integrarea<sup>1</sup> ecuației Biot-Savart (1)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



1

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl \sin \theta}{r^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl \cos \alpha}{r^2}$$

$$l = R \tan \alpha \quad ; \quad dl = R \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \quad \text{și} \quad r \cos \alpha = R$$

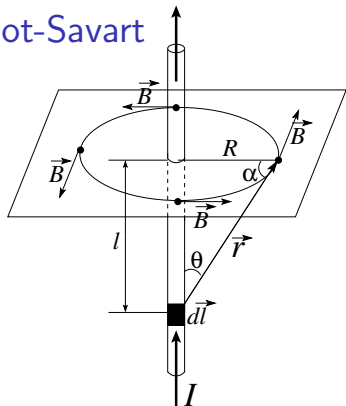
$$\mathcal{I} = R \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\alpha}{r^2 \cos \alpha} = \frac{1}{R} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{1}{R} \sin \alpha \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{2}{R}$$

# Câmp magnetostatic - Legea Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (1)$$

- Legea Ampère se obține din integrarea<sup>1</sup> ecuației Biot-Savart (1)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



1

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl \sin \theta}{r^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl \cos \alpha}{r^2}$$

$$l = R \tan \alpha \quad ; \quad dl = R \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \quad \text{și} \quad r \cos \alpha = R$$

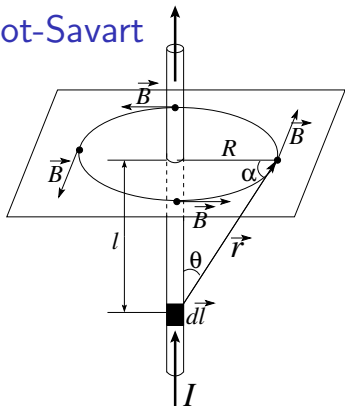
$$\mathcal{I} = R \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\alpha}{r^2 \cos \alpha} = \frac{1}{R} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{1}{R} \sin \alpha \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{2}{R}$$

# Câmp magnetostatic - Legea Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2} \quad (1)$$

- Legea Ampère se obține din integrarea<sup>1</sup> ecuației Biot-Savart (1)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



1

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl \sin \theta}{r^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl \cos \alpha}{r^2}$$

$$l = R \tan \alpha \quad ; \quad dl = R \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \quad \text{și} \quad r \cos \alpha = R$$

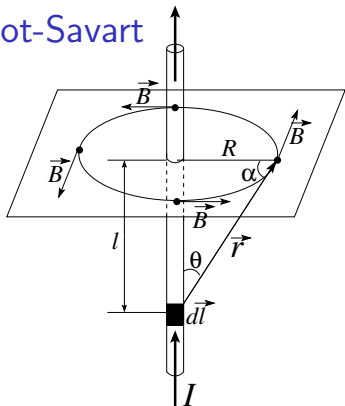
$$\mathcal{I} = R \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\alpha}{r^2 \cos \alpha} = \frac{1}{R} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{1}{R} \sin \alpha \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{2}{R}$$

# Câmp magnetostatic - Legea Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2} \quad (1)$$

- Legea Ampère se obține din integrarea<sup>1</sup> ecuației Biot-Savart (1)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



1

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl \sin \theta}{r^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl \cos \alpha}{r^2}$$

$$l = R \tan \alpha \quad ; \quad dl = R \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \quad \text{și} \quad r \cos \alpha = R$$

$$\mathcal{I} = R \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\alpha}{r^2 \cos \alpha} = \frac{1}{R} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{1}{R} \sin \alpha \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{2}{R}$$

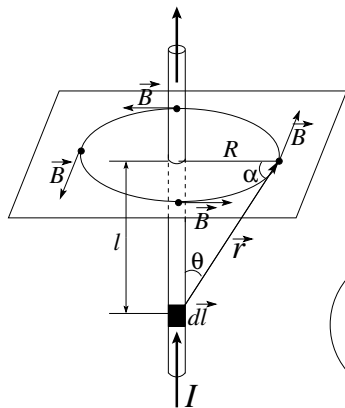
# Circulația câmpului magnetic staționar

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

- Circulația  $C_B$  a câmpului magnetic  $\vec{B}$  pe un cerc

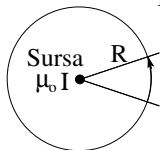
$$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I$$



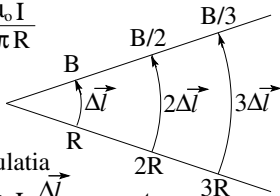
Câmpul magnetic  
la distanța R

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



Circulația

$$\Delta C_B = \vec{B} \cdot \Delta \vec{l} = \mu_0 I \frac{\Delta l}{2\pi R} = \text{const.}$$



# Circulația câmpului magnetic staționar

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

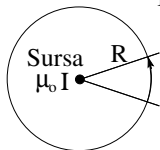
- Circulația  $C_B$  a câmpului magnetic  $\vec{B}$  pe un cerc

$$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I$$

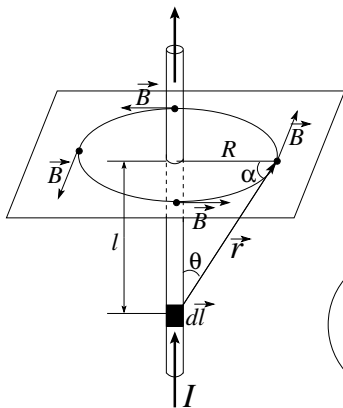
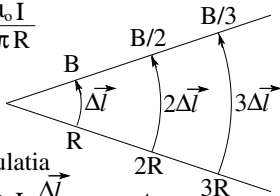
Câmpul magnetic  
la distanța R

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



Circulația

$$\Delta C_B = \vec{B} \cdot \Delta \vec{l} = \mu_0 I \frac{\Delta l}{2\pi R} = \text{const.}$$



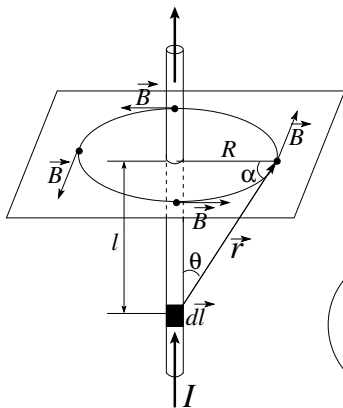
# Circulația câmpului magnetic staționar

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

- Circulația  $C_B$  a câmpului magnetic  $\vec{B}$  pe un cerc

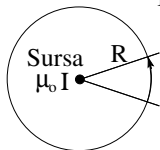
$$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I$$



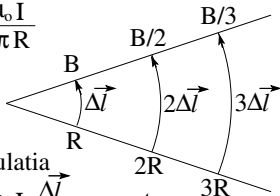
Câmpul magnetic  
la distanța R

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



Circulația

$$\Delta C_B = \vec{B} \cdot \Delta \vec{l} = \mu_0 I \frac{\Delta l}{2\pi R} = \text{const.}$$



# Circulația câmpului magnetic staționar

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

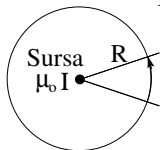
- Circulația  $C_B$  a câmpului magnetic  $\vec{B}$  pe un cerc

$$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I$$

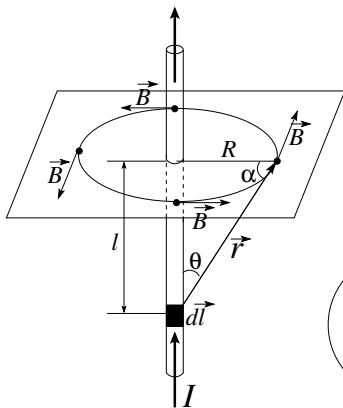
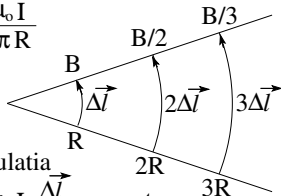
Câmpul magnetic  
la distanța R

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



Circulația

$$\Delta C_B = \vec{B} \cdot \Delta \vec{l} = \mu_0 I \frac{\Delta l}{2\pi R} = \text{const.}$$



# Circulația câmpului magnetic staționar

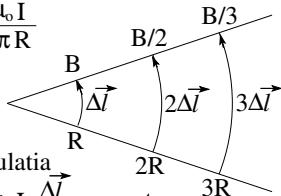
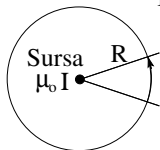
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

- Circulația  $C_B$  a câmpului magnetic  $\vec{B}$  pe un cerc

$$\begin{aligned} C_B &= \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I \end{aligned}$$

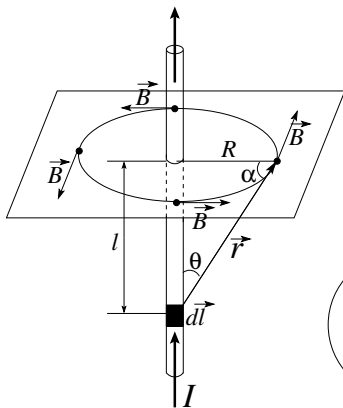
Câmpul magnetic  
la distanța  $R$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



Circulația

$$\Delta C_B = \vec{B} \cdot \Delta \vec{l} = \mu_0 I \frac{\Delta l}{2\pi R} = \text{const.}$$



## Partea IV

# Ecuțiile Maxwell pentru câmpuri electrice și magnetice staționare

# Ec. Maxwell pt. câmpuri electrice și magnetice staționare

Câmp electric staționar

Câmp magnetic staționar

Câmpuri staționare divergente

Câmpuri staționare rotaționale

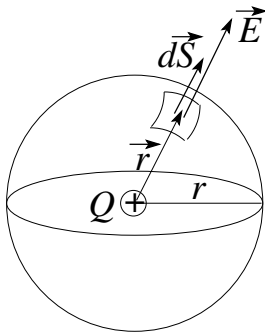
Ecuatiile Maxwell pentru câmpuri staționare

# Câmpul electric staționar - Ecuația Maxwell

## ▶ Legea Coulomb

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$



- ▶ Fluxul  $\Phi_E$  al câmpului electric  $\vec{E}$  prin suprafața  $S$  a unei sfere

$$\begin{aligned}\phi_E &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV\end{aligned}$$

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

- ▶ Identificând termenii de sub integralele de volum  $\Rightarrow$  Ecuația Maxwell

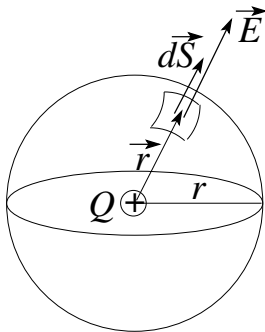
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

# Câmpul electric staționar - Ecuația Maxwell

- ▶ Legea Coulomb

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$



- ▶ Fluxul  $\Phi_E$  al câmpului electric  $\vec{E}$  prin suprafața  $S$  a unei sfere

$$\begin{aligned}\phi_E &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV\end{aligned}$$

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

- ▶ Identificând termenii de sub integralele de volum  $\Rightarrow$  Ecuația Maxwell

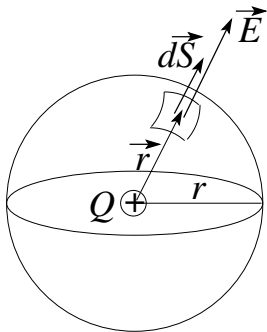
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

# Câmpul electric staționar - Ecuația Maxwell

- ▶ Legea Coulomb

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$



- ▶ Fluxul  $\Phi_E$  al câmpului electric  $\vec{E}$  prin suprafața  $S$  a unei sfere

$$\begin{aligned}\phi_E &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV\end{aligned}$$

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

- ▶ Identificând termenii de sub integralele de volum  $\Rightarrow$  Ecuația Maxwell

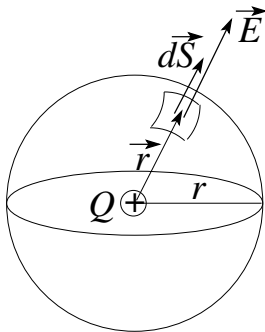
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

# Câmpul electric staționar - Ecuația Maxwell

- ▶ Legea Coulomb

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$



- ▶ Fluxul  $\Phi_E$  al câmpului electric  $\vec{E}$  prin suprafața  $S$  a unei sfere

$$\begin{aligned}\phi_E &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV\end{aligned}$$

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

- ▶ Identificând termenii de sub integralele de volum  $\Rightarrow$  Ecuația Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

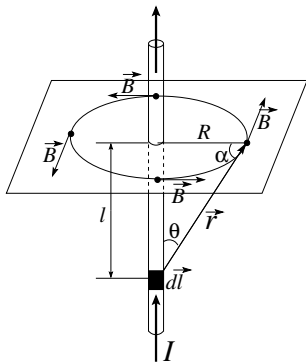
# Câmpul magnetic staționar - Ecuația Maxwell

## ► Legea Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}}{r^2} \times \frac{\vec{r}}{r}$$

## Legea Ampere

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



## ► Circulația $C_B$ a câmpului magnetic $\vec{B}$ de-a lungul unui cerc

$$\begin{aligned} C_B &= \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

$$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

## ► Identificând termenii de sub integralele de suprafață $\Rightarrow$ Ecuația Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

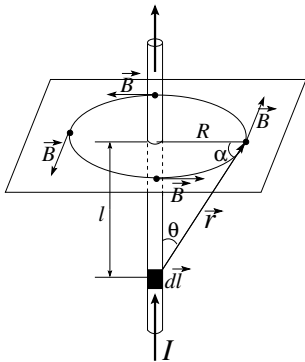
# Câmpul magnetic staționar - Ecuația Maxwell

## ► Legea Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}}{r^2} \times \frac{\vec{r}}{r}$$

## Legea Ampere

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



## ► Circulația $C_B$ a câmpului magnetic $\vec{B}$ de-a lungul unui cerc

$$\begin{aligned} C_B &= \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

$$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

## ► Identificând termenii de sub integralele de suprafață $\Rightarrow$ Ecuația Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

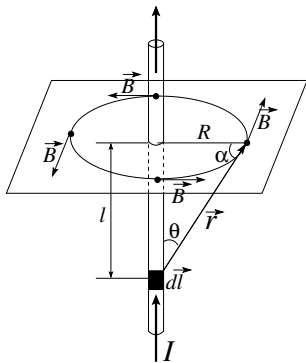
# Câmpul magnetic staționar - Ecuația Maxwell

- ▶ Legea Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}}{r^2} \times \frac{\vec{r}}{r}$$

Legea Ampere

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



- ▶ Circulația  $C_B$  a câmpului magnetic  $\vec{B}$  de-a lungul unui cerc

$$\begin{aligned} C_B &= \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

$$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Identificând termenii de sub integralele de suprafață  $\Rightarrow$  Ecuația Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

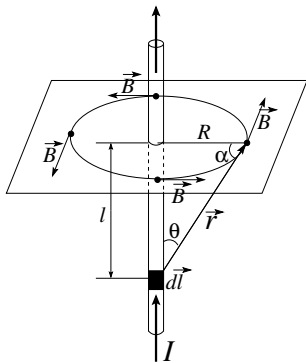
# Câmpul magnetic staționar - Ecuația Maxwell

- ▶ Legea Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}}{r^2} \times \frac{\vec{r}}{r}$$

Legea Ampere

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



- ▶ Circulația  $C_B$  a câmpului magnetic  $\vec{B}$  de-a lungul unui cerc

$$\begin{aligned} C_B &= \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

$$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Identificând termenii de sub integralele de suprafață  $\Rightarrow$  Ecuația Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Tabel: Ecuații câmpuri electrice și magnetice staționare divergente

Sursa	Fluxul printr-o sferă de rază $r$	Teorema Gauss	Ecuația Maxwell
Sarcină electrică $Q$ L. Coulomb $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$	$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS$ $= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$	$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV$ $= \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Absență sursă câmp magnetic divergent staționar	$\phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Tabel: Ecuații câmpuri electrice și magnetice staționare rotaționale

Sursa	Circulația pe un cerc	Teorema Stokes	Ecuația Maxwell
Curent liniar constant $I$ L. Ampère $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$	$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl$ $= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I$	$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}$ $= \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
Absență sursă câmp electric rotațional staționar	$C_E = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	$C_E = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

# Ecuțiile Maxwell pentru câmpuri staționare

Setul de ecuații diferențiale cu derivate parțiale din Tabelele 1 și 2 alcătuiesc *ecuațiile Maxwell pentru câmpuri staționare*.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (a) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (b) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (c) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (d) \end{array} \right.$$

**Observație !** In acest caz câmpul electric și câmpul magnetic au componentele decuplate.

## Partea V

# Ecuțiile Maxwell pentru câmpuri electrice și magnetice netaționare

# Ec. Maxwell pt. câmpuri electrice și magnetice netaționare

Forța electro-motrică

Inducție câmp electric rotațional - Legea Faraday

Inducție câmp magnetic rotațional - Legea Ampère-Maxwell

Ecuții câmpuri electrice și magnetice

Ecuțiile Maxwell pentru câmpuri netaționare

## Forța electro-motrică

- ▶ Lucrul mecanic efectuat de câmpul electric  $\vec{E}$  la mișcarea unei sarcini  $q$  de-a lungul conductorului (pe conturul)  $L$  (vezi Figura),

$$\mathcal{L} = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \Delta V$$

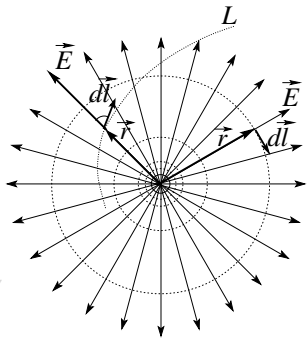
$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$  este legată de diferența de potențial  $\Delta V$

- ▶ 
$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = V_2 - V_1$$

cu  $V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$  iar  $\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{dV}{dr} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

- ▶ Un curent electric este condiționat de o diferență de potențial  $\Delta V$  echivalent cu o forță electro-motrică  $\mathcal{E}$  (electro-motive force-emf)

$$\mathcal{E} = \Delta V = V_2 - V_1 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



## Forța electro-motrică

- Lucrul mecanic efectuat de câmpul electric  $\vec{E}$  la mișcarea unei sarcini  $q$  de-a lungul conductorului (pe conturul)  $L$  (vezi Figura),

$$\mathcal{L} = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \Delta V$$

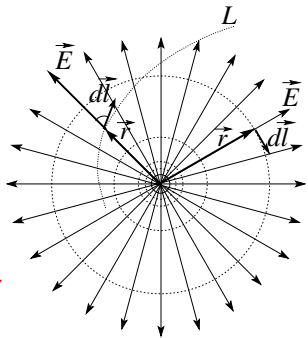
$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$  este legată de diferența de potențial  $\Delta V$

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = V_2 - V_1$$

cu  $V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$  iar  $\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{dV}{dr} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

- Un curent electric este condiționat de o diferență de potențial  $\Delta V$  echivalent cu o forță electro-motrică  $\mathcal{E}$  (electro-motive force-emf)

$$\mathcal{E} = \Delta V = V_2 - V_1 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



## Forța electro-motrică

- Lucrul mecanic efectuat de câmpul electric  $\vec{E}$  la mișcarea unei sarcini  $q$  de-a lungul conductorului (pe conturul)  $L$  (vezi Figura),

$$\mathcal{L} = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \Delta V$$

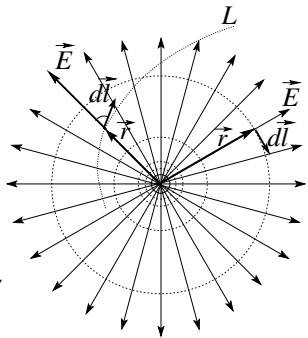
$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$  este legată de diferența de potențial  $\Delta V$

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = V_2 - V_1$$

$$\text{cu } V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad \text{iar } \vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{dV}{dr} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

- Un curent electric este condiționat de o diferență de potențial  $\Delta V$  echivalent cu o forță electro-motrică  $\mathcal{E}$  (electro-motive force-emf)

$$\mathcal{E} = \Delta V = V_2 - V_1 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



## Forța electro-motrică

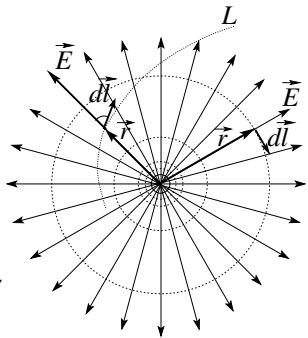
- Lucrul mecanic efectuat de câmpul electric  $\vec{E}$  la mișcarea unei sarcini  $q$  de-a lungul conductorului (pe conturul)  $L$  (vezi Figura),

$$\mathcal{L} = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \Delta V$$

$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$  este legată de diferența de potențial  $\Delta V$

- $$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = V_2 - V_1$$

cu  $V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$  iar  $\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{dV}{dr} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$



- Un curent electric este condiționat de o diferență de potențial  $\Delta V$  echivalent cu o forță electro-motrică  $\mathcal{E}$  (electro-motive force-emf)

$$\mathcal{E} = \Delta V = V_2 - V_1 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

## Forța electro-motrică

- Lucrul mecanic efectuat de câmpul electric  $\vec{E}$  la mișcarea unei sarcini  $q$  de-a lungul conductorului (pe conturul)  $L$  (vezi Figura),

$$\mathcal{L} = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = q \Delta V$$

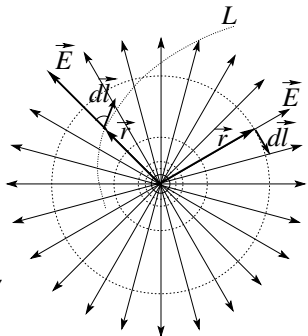
$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$  este legată de diferența de potențial  $\Delta V$

- $$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = V_2 - V_1$$

cu  $V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$  iar  $\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{dV}{dr} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

- Un curent electric este condiționat de o diferență de potențial  $\Delta V$  echivalent cu o forță electro-motrică  $\mathcal{E}$  (electro-motive force-emf)

$$\mathcal{E} = \Delta V = V_2 - V_1 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



## Inducție câmp electric rotațional

- ▶ Forța electro-motrică  $\mathcal{E}$ , poate fi produsă și prin variația fluxului magnetic (Faraday) printr-o suprafață  $S$ , de contur închis  $C$ ,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Dar  $\mathcal{E}$  este exprimat prin circulația  $C_E$  a lui  $\vec{E}$ ,

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = C_E = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{emf}) - \text{legea Faraday}$$

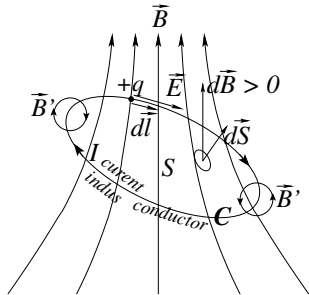
- ▶ Conform teoremei Stokes, circulația vectorului  $\vec{E}$  este legată de integrala din rotorul vectorului  $\vec{E}$ ,

$$\mathcal{E} = C_E = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Din ultimele două relații, pentru o suprafață  $S$  constantă, rezultă

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

care reprezintă forma diferențială a legii Faraday



## Inducție câmp electric rotațional

- *Forța electro-motrică*  $\mathcal{E}$ , poate fi produsă și prin variația fluxului magnetic (Faraday) printr-o suprafață  $S$ , de contur închis  $C$ ,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

- Dar  $\mathcal{E}$  este exprimat prin circulația  $C_E$  a lui  $\vec{E}$ ,

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = C_E = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{emf}) - \text{legea Faraday}$$

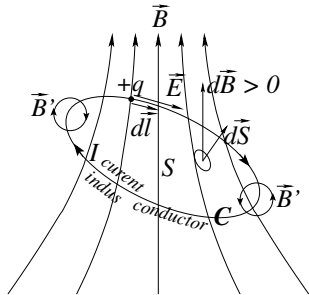
- Conform teoremei Stokes, *circulația* vectorului  $\vec{E}$  este legată de integrala din rotorul vectorului  $\vec{E}$ ,

$$\mathcal{E} = C_E = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

- Din ultimele două relații, pentru o suprafață  $S$  constantă, rezultă

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

care reprezintă forma diferențială a legii Faraday



## Inducție câmp electric rotațional

- ▶ Forța electro-motrică  $\mathcal{E}$ , poate fi produsă și prin variația fluxului magnetic (Faraday) printr-o suprafață  $S$ , de contur închis  $C$ ,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Dar  $\mathcal{E}$  este exprimat prin circulația  $C_E$  a lui  $\vec{E}$ ,

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = C_E = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{emf}) - \text{legea Faraday}$$

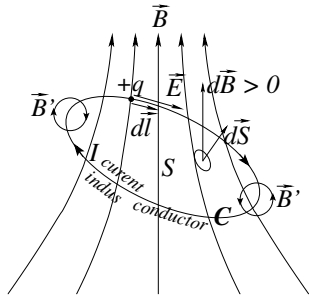
- ▶ Conform teoremei Stokes, circulația vectorului  $\vec{E}$  este legată de integrala din rotorul vectorului  $\vec{E}$ ,

$$\mathcal{E} = C_E = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Din ultimele două relații, pentru o suprafață  $S$  constantă, rezultă

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

care reprezintă forma diferențială a legii Faraday



## Inducție câmp electric rotațional

- ▶ Forța electro-motrică  $\mathcal{E}$ , poate fi produsă și prin variația fluxului magnetic (Faraday) printr-o suprafață  $S$ , de contur închis  $C$ ,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Dar  $\mathcal{E}$  este exprimat prin circulația  $C_E$  a lui  $\vec{E}$ ,

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = C_E = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{emf}) - \text{legea Faraday}$$

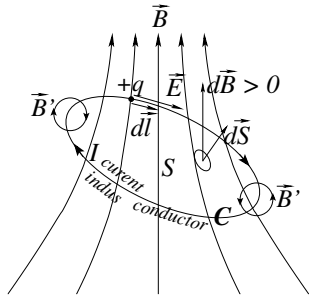
- ▶ Conform teoremei Stokes, circulația vectorului  $\vec{E}$  este legată de integrala din rotorul vectorului  $\vec{E}$ ,

$$\mathcal{E} = C_E = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Din ultimele două relații, pentru o suprafață  $S$  constantă, rezultă

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

care reprezintă forma diferențială a legii Faraday



## Inducție câmp electric rotațional

- ▶ Forța electro-motrică  $\mathcal{E}$ , poate fi produsă și prin variația fluxului magnetic (Faraday) printr-o suprafață  $S$ , de contur închis  $C$ ,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Dar  $\mathcal{E}$  este exprimat prin circulația  $C_E$  a lui  $\vec{E}$ ,

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = C_E = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{emf}) - \text{legea Faraday}$$

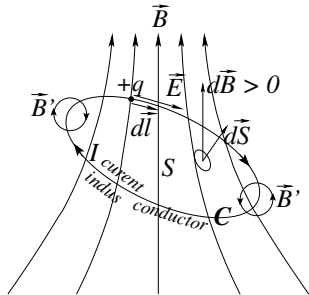
- ▶ Conform teoremei Stokes, circulația vectorului  $\vec{E}$  este legată de integrala din rotorul vectorului  $\vec{E}$ ,

$$\mathcal{E} = C_E = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Din ultimele două relații, pentru o suprafață  $S$  constantă, rezultă

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

care reprezintă forma diferențială a legii Faraday



## Inducție câmp electric rotațional

- ▶ Forța electro-motrică  $\mathcal{E}$ , poate fi produsă și prin variația fluxului magnetic (Faraday) printr-o suprafață  $S$ , de contur închis  $C$ ,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Dar  $\mathcal{E}$  este exprimat prin circulația  $C_E$  a lui  $\vec{E}$ ,

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = C_E = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{emf}) - \text{legea Faraday}$$

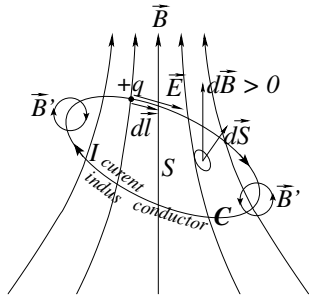
- ▶ Conform teoremei Stokes, circulația vectorului  $\vec{E}$  este legată de integrala din rotorul vectorului  $\vec{E}$ ,

$$\mathcal{E} = C_E = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

- ▶ Din ultimele două relații, pentru o suprafață  $S$  constantă, rezultă

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

care reprezintă forma diferențială a legii Faraday



## Inducție câmp magnetic rotațional

- In condensator apare un câmp electric variabil  $\Delta \vec{E}$  ce dă naștere la un câmp magnetic variabil  $\Delta \vec{B}$  produs de un *curent de deplasare*  $\Delta \vec{I}_d = \Delta \vec{I}$  egal cu cel de conducție  $\Delta \vec{I}$  (Maxwell).

$$I_d = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} = Cd \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 S \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

- Circulația câmpului magnetic rotațional staționar se poate completa cu o nouă sursă ( $I_d$ ) de câmp magnetic rotațional, însă nestaționar,

$$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \right)$$

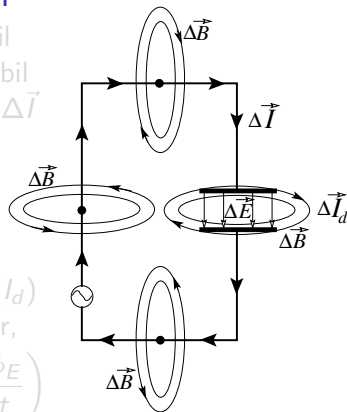
- Cu teorema Stokes și densitățile de curent  $\vec{j} = dI/dS$  și  $\vec{j}_d = dI_d/dS$ ,

avem: 
$$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \int_S \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

- de unde

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ecuația *Ampère-Maxwell*



## Inducție câmp magnetic rotațional

- ▶ În condensator apare un câmp electric variabil  $\Delta \vec{E}$  ce dă naștere la un câmp magnetic variabil  $\Delta \vec{B}$  produs de un *curent de deplasare*  $\Delta \vec{I}_d = \Delta \vec{I}$  egal cu cel de conducție  $\Delta \vec{I}$  (Maxwell).

$$I_d = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} = Cd \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 S \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

- ▶ Circulația câmpului magnetic rotațional staționar se poate completa cu o nouă sursă ( $I_d$ ) de câmp magnetic rotațional, însă netașionar,

$$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \right)$$

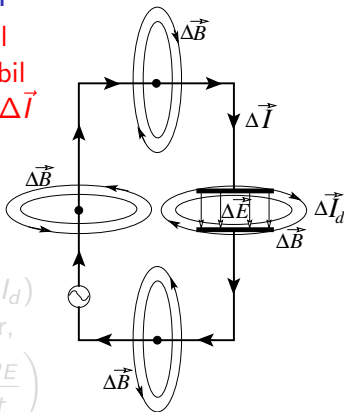
- ▶ Cu teorema Stokes și densitățile de curent  $\vec{j} = dI/dS$  și  $\vec{j}_d = dI_d/dS$ ,

$$\text{avem: } C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \int_S \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

- ▶ de unde

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ecuația *Ampère-Maxwell*



## Inducție câmp magnetic rotațional

- ▶ În condensator apare un câmp electric variabil  $\Delta \vec{E}$  ce dă naștere la un câmp magnetic variabil  $\Delta \vec{B}$  produs de un *curent de deplasare*  $\Delta \vec{I}_d = \Delta \vec{I}$  egal cu cel de conducție  $\Delta \vec{I}$  (Maxwell).

$$I_d = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} = Cd \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 S \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

- ▶ **Circulația câmpului magnetic rotațional staționar se poate completa cu o nouă sursă ( $I_d$ ) de câmp magnetic rotațional, însă netașionar,**

$$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \right)$$

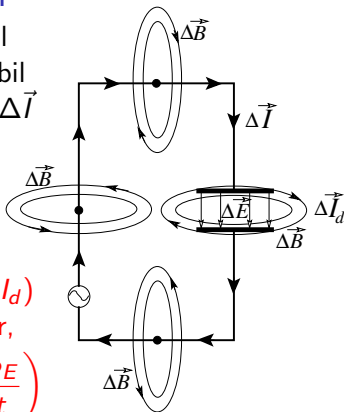
- ▶ Cu teorema Stokes și densitățile de curent  $\vec{j} = dI/dS$  și  $\vec{j}_d = dI_d/dS$ ,

avem: 
$$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \int_S \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

- ▶ de unde

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ecuația *Ampère-Maxwell*



## Inducție câmp magnetic rotațional

- ▶ In condensator apare un câmp electric variabil  $\Delta \vec{E}$  ce dă naștere la un câmp magnetic variabil  $\Delta \vec{B}$  produs de un *curent de deplasare*  $\Delta \vec{I}_d = \Delta \vec{I}$  egal cu cel de conducție  $\Delta \vec{I}$  (Maxwell).

$$I_d = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} = Cd \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 S \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

- ▶ Circulația câmpului magnetic rotațional staționar se poate completa cu o nouă sursă ( $I_d$ ) de câmp magnetic rotațional, însă netașionar,

$$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \right)$$

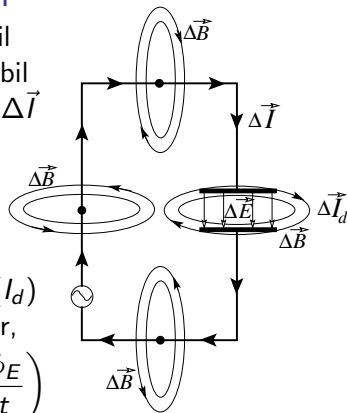
- ▶ Cu teorema Stokes și densitățile de curent  $\vec{j} = dI/dS$  și  $\vec{j}_d = dI_d/dS$ ,

$$\text{avem: } C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \int_S \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

- ▶ de unde

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ecuația *Ampère-Maxwell*



## Inducție câmp magnetic rotațional

- ▶ În condensator apare un câmp electric variabil  $\Delta \vec{E}$  ce dă naștere la un câmp magnetic variabil  $\Delta \vec{B}$  produs de un *curent de deplasare*  $\Delta \vec{I}_d = \Delta \vec{I}$  egal cu cel de conducție  $\Delta \vec{I}$  (Maxwell).

$$I_d = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} = Cd \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 S \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

- ▶ Circulația câmpului magnetic rotațional staționar se poate completa cu o nouă sursă ( $I_d$ ) de câmp magnetic rotațional, însă nestaționar,

$$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \right)$$

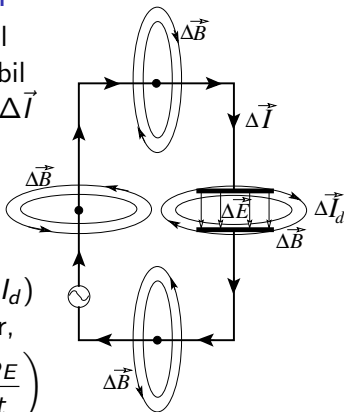
- ▶ Cu teorema Stokes și densitățile de curent  $\vec{j} = dl/dS$  și  $\vec{j}_d = dl_d/dS$ ,

$$\text{avem: } C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \int_S \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

- ▶ de unde

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ecuația *Ampère-Maxwell*



## Inducție câmp magnetic rotațional

- ▶ În condensator apare un câmp electric variabil  $\Delta \vec{E}$  ce dă naștere la un câmp magnetic variabil  $\Delta \vec{B}$  produs de un *curent de deplasare*  $\Delta \vec{I}_d = \Delta \vec{I}$  egal cu cel de conducție  $\Delta \vec{I}$  (Maxwell).

$$I_d = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} = Cd \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 S \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

- ▶ Circulația câmpului magnetic rotațional staționar se poate completa cu o nouă sursă ( $I_d$ ) de câmp magnetic rotațional, însă nestaționar,

$$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \right)$$

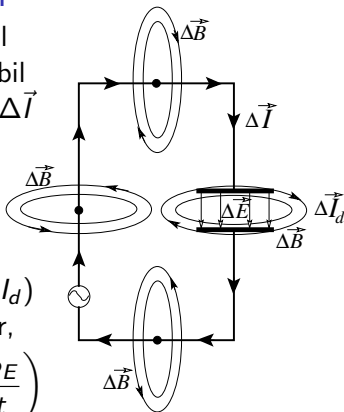
- ▶ Cu teorema Stokes și densitățile de curent  $\vec{j} = dI/dS$  și  $\vec{j}_d = dI_d/dS$ ,

$$\text{avem: } C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \int_S \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

- ▶ de unde

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ecuația *Ampère-Maxwell*



**Tabel:** Ecuații câmpuri electrice și magnetice divergente

Sursa	Fluxul printr-o sferă de rază $r$	Teorema Gauss	Ecuația Maxwell
<p>Sarcină electrică <math>Q</math></p> <p>L. Coulomb</p> $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$	$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS$ $= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$	$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV$ $= \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
<p>Absență sursă câmp magnetic divergent</p>	$\phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

**Tabel:** Ecuații câmpuri electrice și magnetice rotaționale

Sursa	Circulația pe un contur $C$	Teorema Stokes	Ecuația Maxwell
<p>Variația fluxului magnetic</p> <p>Legea Faraday</p> $\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt}$	$C_E = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \Delta V$ $= -\frac{d\phi_B}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ $\mathcal{E} = C_E \text{ (Faraday)}$	$C_E = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
<p>Curentul de conducție <math>\vec{j}</math> și cel de deplasare <math>\vec{j}_d</math></p> <p>Legea Ampère-Maxwell</p> $j + j_d = j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$	$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$ $= \mu_0 I + \mu_0 I_d$	$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}$ $= \mu_0 \int_S \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

**Tablel:** Ecuații câmpuri electrice și magnetice divergente

Sursa	Fluxul printr-o sferă de rază $r$	Teorema Gauss	Ecuația Maxwell
Sarcină electrică $Q$ L. Coulomb $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$	$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS$ $= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$	$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV$ $= \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Absență sursă câmp magnetic divergent	$\phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

**Tablel:** Ecuații câmpuri electrice și magnetice rotaționale

Sursa	Circulația pe un contur $C$	Teorema Stokes	Ecuația Maxwell
Variația fluxului magnetic Legea Faraday $\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt}$	$C_E = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \Delta V$ $= -\frac{d\phi_B}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ $\mathcal{E} = C_E \text{ (Faraday)}$	$C_E = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Curentul de conducție $\vec{j}$ și cel de deplasare $\vec{j}_d$ Legea Ampère-Maxwell $j + j_d = j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$	$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$ $= \mu_0 I + \mu_0 I_d$	$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}$ $= \mu_0 \int_S \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

**Tabel:** Ecuații câmpuri electrice și magnetice divergente

Sursa	Fluxul printr-o sferă de rază $r$	Teorema Gauss	Ecuația Maxwell
Sarcină electrică $Q$ L. Coulomb $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$	$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS$ $= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow$	$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV$ $= \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Absență sursă câmp magnetic divergent	$\phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

**Tabel:** Ecuații câmpuri electrice și magnetice rotaționale

Sursa	Circulația pe un contur $C$	Teorema Stokes	Ecuația Maxwell
Variația fluxului magnetic Legea Faraday $\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt}$	$C_E = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \Delta V$ $= -\frac{d\phi_B}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ $\mathcal{E} = C_E \text{ (Faraday)}$	$C_E = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Curentul de conducție $\vec{j}$ și cel de deplasare $\vec{j}_d$ Legea Ampère-Maxwell $j + j_d = j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$	$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$ $= \mu_0 I + \mu_0 I_d \rightarrow$	$C_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}$ $= \mu_0 \int_S \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

# Ecuțiile Maxwell pentru câmpuri nestaționare

- Setul de ecuații diferențiale cuplate cu derivate parțiale obținute anterior, alcătuiesc *ecuațiile Maxwell pentru câmpuri nestaționare*,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (a) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (b) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (c) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (d) \end{array} \right. \quad (2)$$

# Ecuatiile Maxwell pentru câmpuri netaționare

- Setul de ecuații diferențiale cuplate cu derivate parțiale obținute anterior, alcătuiesc *ecuațiile Maxwell pentru câmpuri netaționare*,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & (a) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (d) \end{array} \right. \quad (2)$$

# Ecuțiile Maxwell pentru câmpuri netaționare

- Setul de ecuații diferențiale cuplate cu derivate parțiale obținute anterior, alcătuiesc *ecuațiile Maxwell pentru câmpuri netaționare*,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & (a) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (d) \end{array} \right. \quad (2)$$

## Partea VI

### Ecuția de propagare a undelor

# Ecuția de propagare a undelor

Mișcarea ondulatorie - caracteristici

Ecuția diferențială pentru unda plană

Funcția unda sub formă complexă

## Mișcarea ondulatorie - caracteristici

- ▶ O funcție  $u(x, t)$  descriind o comportare periodică (sinusoidală) în spațiu și timp, este de forma

$$u(x, t) = a \sin(\alpha x - \beta t)$$

- ▶ Dacă periodicitatea este  $\Delta x$  și  $\Delta t$ ,  
 $\sin(\alpha x - \beta t) = \sin[\alpha(x + \Delta x) - \beta(t + \Delta t)]$   
 $= \sin[(\alpha x - \beta t) + (\alpha \Delta x - \beta \Delta t)]$

De unde  $\alpha \Delta x - \beta \Delta t = 0$  sau

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ astfel unda } u(x, t) \text{ are o}$$

$$\text{viteză de fază } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta}{\alpha}$$

- ▶ Pentru  $t = \text{const.}$  ( $\Delta t = 0$ ),  $u(x, t)$  e periodică:  $\sin \alpha x = \sin[\alpha(x + \Delta x)]$  sau  $\alpha \Delta x = 2\pi$ , adică are o perioadă

$$\Delta x \equiv \lambda = \frac{2\pi}{\alpha} \text{ lungime de undă.}$$

- ▶ Pentru  $x = \text{const.}$  ( $\Delta x = 0$ ),  $u(x, t)$  e periodică:  $\sin \beta t = \sin[\beta(t + \Delta t)]$  sau  $\beta \Delta t = 2\pi$ , adică are o perioadă

$$\Delta t \equiv T = \frac{2\pi}{\beta} \text{ perioadă de oscilație}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\beta}{2\pi} \text{ frecvența de oscilație}$$

- ▶ Atunci:  $\lambda \nu = \frac{2\pi}{\alpha} \frac{\beta}{2\pi} = \frac{\beta}{\alpha} = v$

- ▶ Având acum  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$  și  $\beta = 2\pi \nu$ , funcția inițială de evoluție a undelor plane se poate scrie sub forma

$$u(x, t) = a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

## Mișcarea ondulatorie - caracteristici

- ▶ O funcție  $u(x, t)$  descriind o comportare periodică (sinusoidală) în spațiu și timp, este de forma

$$u(x, t) = a \sin(\alpha x - \beta t)$$

- ▶ Dacă periodicitatea este  $\Delta x$  și  $\Delta t$ ,  
 $\sin(\alpha x - \beta t) = \sin[\alpha(x + \Delta x) - \beta(t + \Delta t)]$   
 $= \sin[(\alpha x - \beta t) + (\alpha \Delta x - \beta \Delta t)]$

De unde  $\alpha \Delta x - \beta \Delta t = 0$  sau

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ astfel unda } u(x, t) \text{ are o}$$

$$\text{viteză de fază } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta}{\alpha}$$

- ▶ Pentru  $t = \text{const.}$  ( $\Delta t = 0$ ),  $u(x, t)$  e periodică:  $\sin \alpha x = \sin[\alpha(x + \Delta x)]$  sau  $\alpha \Delta x = 2\pi$ , adică are o perioadă

$$\Delta x \equiv \lambda = \frac{2\pi}{\alpha} \text{ lungime de undă.}$$

- ▶ Pentru  $x = \text{const.}$  ( $\Delta x = 0$ ),  $u(x, t)$  e periodică:  $\sin \beta t = \sin[\beta(t + \Delta t)]$  sau  $\beta \Delta t = 2\pi$ , adică are o perioadă

$$\Delta t \equiv T = \frac{2\pi}{\beta} \text{ perioadă de oscilație}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\beta}{2\pi} \text{ frecvența de oscilație}$$

- ▶ Atunci:  $\lambda \nu = \frac{2\pi}{\alpha} \frac{\beta}{2\pi} = \frac{\beta}{\alpha} = v$

- ▶ Având acum  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$  și  $\beta = 2\pi\nu$ , funcția inițială de evoluție a undelor plane se poate scrie sub forma

$$u(x, t) = a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

## Mișcarea ondulatorie - caracteristici

- ▶ O funcție  $u(x, t)$  descriind o comportare periodică (sinusoidală) în spațiu și timp, este de forma

$$u(x, t) = a \sin(\alpha x - \beta t)$$

- ▶ Dacă periodicitatea este  $\Delta x$  și  $\Delta t$ ,  
 $\sin(\alpha x - \beta t) = \sin[\alpha(x + \Delta x) - \beta(t + \Delta t)]$   
 $= \sin[(\alpha x - \beta t) + (\alpha \Delta x - \beta \Delta t)]$

De unde  $\alpha \Delta x - \beta \Delta t = 0$  sau

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ astfel unda } u(x, t) \text{ are o}$$

viteză de fază  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta}{\alpha}$

- ▶ Pentru  $t = \text{const.}$  ( $\Delta t = 0$ ),  $u(x, t)$  e periodică:  $\sin \alpha x = \sin[\alpha(x + \Delta x)]$  sau  $\alpha \Delta x = 2\pi$ , adică are o perioadă

$$\Delta x \equiv \lambda = \frac{2\pi}{\alpha} \text{ lungime de undă.}$$

- ▶ Pentru  $x = \text{const.}$  ( $\Delta x = 0$ ),  $u(x, t)$  e periodică:  $\sin \beta t = \sin[\beta(t + \Delta t)]$  sau  $\beta \Delta t = 2\pi$ , adică are o perioadă

$$\Delta t \equiv T = \frac{2\pi}{\beta} \text{ perioadă de oscilație}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\beta}{2\pi} \text{ frecvența de oscilație}$$

- ▶ Atunci:  $\lambda \nu = \frac{2\pi}{\alpha} \frac{\beta}{2\pi} = \frac{\beta}{\alpha} = v$

- ▶ Având acum  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$  și  $\beta = 2\pi\nu$ , funcția inițială de evoluție a undelor plane se poate scrie sub forma

$$u(x, t) = a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

## Mișcarea ondulatorie - caracteristici

- ▶ O funcție  $u(x, t)$  descriind o comportare periodică (sinusoidală) în spațiu și timp, este de forma

$$u(x, t) = a \sin(\alpha x - \beta t)$$

- ▶ Dacă periodicitatea este  $\Delta x$  și  $\Delta t$ ,  
 $\sin(\alpha x - \beta t) = \sin[\alpha(x + \Delta x) - \beta(t + \Delta t)]$   
 $= \sin[(\alpha x - \beta t) + (\alpha \Delta x - \beta \Delta t)]$

De unde  $\alpha \Delta x - \beta \Delta t = 0$  sau

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ astfel unda } u(x, t) \text{ are o}$$

$$\text{viteză de fază } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta}{\alpha}$$

- ▶ Pentru  $t = \text{const.}$  ( $\Delta t = 0$ ),  $u(x, t)$  e periodică:  $\sin \alpha x = \sin[\alpha(x + \Delta x)]$  sau  $\alpha \Delta x = 2\pi$ , adică are o perioadă

$$\Delta x \equiv \lambda = \frac{2\pi}{\alpha} \text{ lungime de undă.}$$

- ▶ Pentru  $x = \text{const.}$  ( $\Delta x = 0$ ),  $u(x, t)$  e periodică:  $\sin \beta t = \sin[\beta(t + \Delta t)]$  sau  $\beta \Delta t = 2\pi$ , adică are o perioadă

$$\Delta t \equiv T = \frac{2\pi}{\beta} \text{ perioadă de oscilație}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\beta}{2\pi} \text{ frecvența de oscilație}$$

- ▶ Atunci:  $\lambda \nu = \frac{2\pi}{\alpha} \frac{\beta}{2\pi} = \frac{\beta}{\alpha} = v$

- ▶ Având acum  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$  și  $\beta = 2\pi\nu$ , funcția inițială de evoluție a undelor plane se poate scrie sub forma

$$u(x, t) = a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

## Mișcarea ondulatorie - caracteristici

- ▶ O funcție  $u(x, t)$  descriind o comportare periodică (sinusoidală) în spațiu și timp, este de forma

$$u(x, t) = a \sin(\alpha x - \beta t)$$

- ▶ Dacă periodicitatea este  $\Delta x$  și  $\Delta t$ ,  
 $\sin(\alpha x - \beta t) = \sin[\alpha(x + \Delta x) - \beta(t + \Delta t)]$   
 $= \sin[(\alpha x - \beta t) + (\alpha \Delta x - \beta \Delta t)]$

De unde  $\alpha \Delta x - \beta \Delta t = 0$  sau

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ astfel unda } u(x, t) \text{ are o}$$

$$\text{viteză de fază } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta}{\alpha}$$

- ▶ Pentru  $t = \text{const.}$  ( $\Delta t = 0$ ),  $u(x, t)$  e periodică:  $\sin \alpha x = \sin[\alpha(x + \Delta x)]$  sau  $\alpha \Delta x = 2\pi$ , adică are o perioadă

$$\Delta x \equiv \lambda = \frac{2\pi}{\alpha} \text{ lungime de undă.}$$

- ▶ Pentru  $x = \text{const.}$  ( $\Delta x = 0$ ),  $u(x, t)$  e periodică:  $\sin \beta t = \sin[\beta(t + \Delta t)]$  sau  $\beta \Delta t = 2\pi$ , adică are o perioadă

$$\Delta t \equiv T = \frac{2\pi}{\beta} \text{ perioadă de oscilație}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\beta}{2\pi} \text{ frecvența de oscilație}$$

▶ Atunci:  $\lambda \nu = \frac{2\pi}{\alpha} \frac{\beta}{2\pi} = \frac{\beta}{\alpha} = v$

- ▶ Având acum  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$  și  $\beta = 2\pi\nu$ , funcția inițială de evoluție a undelor plane se poate scrie sub forma

$$u(x, t) = a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

## Mișcarea ondulatorie - caracteristici

- ▶ O funcție  $u(x, t)$  descriind o comportare periodică (sinusoidală) în spațiu și timp, este de forma

$$u(x, t) = a \sin(\alpha x - \beta t)$$

- ▶ Dacă periodicitatea este  $\Delta x$  și  $\Delta t$ ,  
 $\sin(\alpha x - \beta t) = \sin[\alpha(x + \Delta x) - \beta(t + \Delta t)]$   
 $= \sin[(\alpha x - \beta t) + (\alpha \Delta x - \beta \Delta t)]$

De unde  $\alpha \Delta x - \beta \Delta t = 0$  sau

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ astfel unda } u(x, t) \text{ are o}$$

$$\text{viteză de fază } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta}{\alpha}$$

- ▶ Pentru  $t = \text{const.}$  ( $\Delta t = 0$ ),  $u(x, t)$  e periodică:  $\sin \alpha x = \sin[\alpha(x + \Delta x)]$  sau  $\alpha \Delta x = 2\pi$ , adică are o perioadă

$$\Delta x \equiv \lambda = \frac{2\pi}{\alpha} \text{ lungime de undă.}$$

- ▶ Pentru  $x = \text{const.}$  ( $\Delta x = 0$ ),  $u(x, t)$  e periodică:  $\sin \beta t = \sin[\beta(t + \Delta t)]$  sau  $\beta \Delta t = 2\pi$ , adică are o perioadă

$$\Delta t \equiv T = \frac{2\pi}{\beta} \text{ perioadă de oscilație}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\beta}{2\pi} \text{ frecvența de oscilație}$$

- ▶ Atunci:  $\lambda \nu = \frac{2\pi}{\alpha} \frac{\beta}{2\pi} = \frac{\beta}{\alpha} = v$

- ▶ Având acum  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$  și  $\beta = 2\pi\nu$ , funcția inițială de evoluție a undelor plane se poate scrie sub forma

$$u(x, t) = a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

## Mișcarea ondulatorie - caracteristici

- ▶ O funcție  $u(x, t)$  descriind o comportare periodică (sinusoidală) în spațiu și timp, este de forma

$$u(x, t) = a \sin(\alpha x - \beta t)$$

- ▶ Dacă periodicitatea este  $\Delta x$  și  $\Delta t$ ,  
 $\sin(\alpha x - \beta t) = \sin[\alpha(x + \Delta x) - \beta(t + \Delta t)]$   
 $= \sin[(\alpha x - \beta t) + (\alpha \Delta x - \beta \Delta t)]$

De unde  $\alpha \Delta x - \beta \Delta t = 0$  sau

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ astfel unda } u(x, t) \text{ are o}$$

$$\text{viteză de fază } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\beta}{\alpha}$$

- ▶ Pentru  $t = \text{const.}$  ( $\Delta t = 0$ ),  $u(x, t)$  e periodică:  $\sin \alpha x = \sin[\alpha(x + \Delta x)]$  sau  $\alpha \Delta x = 2\pi$ , adică are o perioadă

$$\Delta x \equiv \lambda = \frac{2\pi}{\alpha} \text{ lungime de undă.}$$

- ▶ Pentru  $x = \text{const.}$  ( $\Delta x = 0$ ),  $u(x, t)$  e periodică:  $\sin \beta t = \sin[\beta(t + \Delta t)]$  sau  $\beta \Delta t = 2\pi$ , adică are o perioadă

$$\Delta t \equiv T = \frac{2\pi}{\beta} \text{ perioadă de oscilație}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\beta}{2\pi} \text{ frecvența de oscilație}$$

- ▶ Atunci:  $\lambda \nu = \frac{2\pi}{\alpha} \frac{\beta}{2\pi} = \frac{\beta}{\alpha} = v$

- ▶ Având acum  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$  și  $\beta = 2\pi \nu$ , funcția inițială de evoluție a undelor plane se poate scrie sub forma

$$u(x, t) = a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

# Ecuția diferențială pentru unda plană

- ▶ Avem funcția ce descrie o undă plană

$$u(x, t) = a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right] \quad (3)$$

- ▶ Calculăm derivatele funcției  $u(x, t)$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{2\pi}{\lambda} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a(2\pi)\nu \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a(2\pi)^2 \nu^2 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

- ▶ Folosind relația  $\lambda\nu = v$ , avem,

$$\frac{\nu^2}{v^2} - \frac{1}{\lambda^2} = 0 \text{ unde înlocuim } 1/\lambda^2 \text{ și } \nu^2$$

din expresiile derivatelor de ordin 2 de

mai sus, împărțind cu

$(2\pi)^2 a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$  obținem:

- ▶ Ecuția diferențială a unei plane

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

- ▶ Soluția ecuației (4) este

$$u(x, t) = a \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right] \quad (5)$$

care este mai generală decât soluția sub forma (3) de la care s-a pornit. Legătura între ele este dată de:  $\sin \alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) / (2i)$

- ▶ Unda plană se mai scrie deseori sub altă formă, ținând cont de relațiile

$$\omega = 2\pi\nu; \quad \mathbf{k} = \mathbf{n} \frac{2\pi}{\lambda} = \mathbf{n} \frac{\omega}{v}; \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = 2\pi \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\lambda}$$

$$u(\mathbf{x}, t) = a \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (6)$$

- ▶ sau folosind  $E = \hbar\omega$  și  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$

$$u(\mathbf{x}, t) = a \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E \cdot t) \right] \quad (7)$$

# Ecuția diferențială pentru unda plană

- ▶ Avem funcția ce descrie o undă plană

$$u(x, t) = a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right] \quad (3)$$

- ▶ Calculăm derivatele funcției  $u(x, t)$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{2\pi}{\lambda} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a(2\pi)\nu \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a(2\pi)^2 \nu^2 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

- ▶ Folosind relația  $\lambda\nu = v$ , avem,

$$\frac{\nu^2}{v^2} - \frac{1}{\lambda^2} = 0 \text{ unde înlocuim } 1/\lambda^2 \text{ și } \nu^2$$

din expresiile derivatelor de ordin 2 de mai sus, împărțind cu  $(2\pi)^2 a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$  obținem:

- ▶ Ecuția diferențială a unei plane

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

- ▶ Soluția ecuației (4) este

$$u(x, t) = a \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right] \quad (5)$$

care este mai generală decât soluția sub forma (3) de la care s-a pornit. Legătura între ele este dată de:  $\sin \alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) / (2i)$

- ▶ Unda plană se mai scrie deseori sub altă formă, ținând cont de relațiile

$$\omega = 2\pi\nu; \mathbf{k} = \mathbf{n} \frac{2\pi}{\lambda} = \mathbf{n} \frac{\omega}{v}; \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = 2\pi \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\lambda}$$

$$u(\mathbf{x}, t) = a \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (6)$$

- ▶ sau folosind  $E = \hbar\omega$  și  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$

$$u(\mathbf{x}, t) = a \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E \cdot t) \right] \quad (7)$$

# Ecuția diferențială pentru unda plană

- ▶ Avem funcția ce descrie o undă plană

$$u(x, t) = a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right] \quad (3)$$

- ▶ Calculăm derivatele funcției  $u(x, t)$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{2\pi}{\lambda} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a(2\pi)\nu \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a(2\pi)^2 \nu^2 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

- ▶ Folosind relația  $\lambda\nu = v$ , avem,

$$\frac{\nu^2}{v^2} - \frac{1}{\lambda^2} = 0 \text{ unde înlocuim } 1/\lambda^2 \text{ și } \nu^2$$

din expresiile derivatelor de ordin 2 de mai sus, împărțind cu  $(2\pi)^2 a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$  obținem:

- ▶ Ecuția diferențială a unei plane

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

- ▶ Soluția ecuației (4) este

$$u(x, t) = a \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right] \quad (5)$$

care este mai generală decât soluția sub forma (3) de la care s-a pornit. Legătura între ele este dată de:  $\sin \alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) / (2i)$

- ▶ Unda plană se mai scrie deseori sub altă formă, ținând cont de relațiile

$$\omega = 2\pi\nu; \quad \mathbf{k} = \mathbf{n} \frac{2\pi}{\lambda} = \mathbf{n} \frac{\omega}{v}; \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = 2\pi \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\lambda}$$

$$u(\mathbf{x}, t) = a \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (6)$$

- ▶ sau folosind  $E = \hbar\omega$  și  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$

$$u(\mathbf{x}, t) = a \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E \cdot t) \right] \quad (7)$$

## Ecuția diferențială pentru unda plană

- ▶ Avem funcția ce descrie o undă plană

$$u(x, t) = a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right] \quad (3)$$

- ▶ Calculăm derivatele funcției  $u(x, t)$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{2\pi}{\lambda} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a(2\pi)\nu \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a(2\pi)^2 \nu^2 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

- ▶ Folosind relația  $\lambda\nu = v$ , avem,

$$\frac{\nu^2}{v^2} - \frac{1}{\lambda^2} = 0 \text{ unde înlocuim } 1/\lambda^2 \text{ și } \nu^2$$

din expresiile derivatelor de ordin 2 de mai sus, împărțind cu  $(2\pi)^2 a \sin[2\pi(\frac{x}{\lambda} - \nu t)]$  obținem:

- ▶ Ecuția diferențială a unei plane

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

- ▶ Soluția ecuației (4) este

$$u(x, t) = a \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right] \quad (5)$$

care este mai generală decât soluția sub forma (3) de la care s-a pornit. Legătura între ele este dată de:  $\sin \alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) / (2i)$

- ▶ Unda plană se mai scrie deseori sub altă formă, ținând cont de relațiile

$$\omega = 2\pi\nu; \quad \mathbf{k} = \mathbf{n} \frac{2\pi}{\lambda} = \mathbf{n} \frac{\omega}{v}; \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = 2\pi \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\lambda}$$

$$u(x, t) = a \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (6)$$

- ▶ sau folosind  $E = \hbar\omega$  și  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$

$$u(x, t) = a \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E \cdot t) \right] \quad (7)$$

## Ecuția diferențială pentru unda plană

- ▶ Avem funcția ce descrie o undă plană

$$u(x, t) = a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right] \quad (3)$$

- ▶ Calculăm derivatele funcției  $u(x, t)$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{2\pi}{\lambda} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a(2\pi)\nu \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a(2\pi)^2 \nu^2 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

- ▶ Folosind relația  $\lambda\nu = v$ , avem,

$$\frac{\nu^2}{v^2} - \frac{1}{\lambda^2} = 0 \text{ unde înlocuim } 1/\lambda^2 \text{ și } \nu^2$$

din expresiile derivatelor de ordin 2 de mai sus, împărțind cu  $(2\pi)^2 a \sin[2\pi(\frac{x}{\lambda} - \nu t)]$  obținem:

- ▶ *Ecuția diferențială a unei plane*

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

- ▶ Soluția ecuației (4) este

$$u(x, t) = a \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right] \quad (5)$$

care este mai generală decât soluția sub forma (3) de la care s-a pornit. Legătura între ele este dată de:  $\sin \alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) / (2i)$

- ▶ Unda plană se mai scrie deseori sub altă formă, ținând cont de relațiile

$$\omega = 2\pi\nu; \quad \mathbf{k} = \mathbf{n} \frac{2\pi}{\lambda} = \mathbf{n} \frac{\omega}{v}; \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = 2\pi \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\lambda}$$

$$u(x, t) = a \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (6)$$

- ▶ sau folosind  $E = \hbar\omega$  și  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$

$$u(x, t) = a \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E \cdot t) \right] \quad (7)$$

## Ecuția diferențială pentru unda plană

- ▶ Avem funcția ce descrie o undă plană

$$u(x, t) = a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right] \quad (3)$$

- ▶ Calculăm derivatele funcției  $u(x, t)$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{2\pi}{\lambda} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a(2\pi)\nu \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a(2\pi)^2 \nu^2 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

- ▶ Folosind relația  $\lambda\nu = v$ , avem,

$$\frac{\nu^2}{v^2} - \frac{1}{\lambda^2} = 0 \text{ unde înlocuim } 1/\lambda^2 \text{ și } \nu^2$$

din expresiile derivatelor de ordin 2 de

mai sus, împărțind cu

$(2\pi)^2 a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$  obținem:

- ▶ Ecuția diferențială a unei plane

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

- ▶ Soluția ecuației (4) este

$$u(x, t) = a \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right] \quad (5)$$

care este mai generală decât soluția sub forma (3) de la care s-a pornit. Legătura între ele este dată de:  $\sin \alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) / (2i)$

- ▶ Unda plană se mai scrie deseori sub altă formă, ținând cont de relațiile

$$\omega = 2\pi\nu; \mathbf{k} = \mathbf{n} \frac{2\pi}{\lambda} = \mathbf{n} \frac{\omega}{v}; \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = 2\pi \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\lambda}$$

$$u(x, t) = a \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (6)$$

- ▶ sau folosind  $E = \hbar\omega$  și  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$

$$u(x, t) = a \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E \cdot t) \right] \quad (7)$$

## Ecuția diferențială pentru unda plană

- ▶ Avem funcția ce descrie o undă plană

$$u(x, t) = a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right] \quad (3)$$

- ▶ Calculăm derivatele funcției  $u(x, t)$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{2\pi}{\lambda} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a(2\pi)\nu \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a(2\pi)^2 \nu^2 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

- ▶ Folosind relația  $\lambda\nu = v$ , avem,

$$\frac{\nu^2}{v^2} - \frac{1}{\lambda^2} = 0 \text{ unde înlocuim } 1/\lambda^2 \text{ și } \nu^2$$

din expresiile derivatelor de ordin 2 de

mai sus, împărțind cu

$(2\pi)^2 a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$  obținem:

- ▶ Ecuția diferențială a unei plane

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

- ▶ Soluția ecuației (4) este

$$u(x, t) = a \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right] \quad (5)$$

care este mai generală decât soluția sub forma (3) de la care s-a pornit. Legătura între ele este dată de:  $\sin \alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) / (2i)$

- ▶ Unda plană se mai scrie deseori sub altă formă, ținând cont de relațiile

$$\omega = 2\pi\nu; \quad \mathbf{k} = \mathbf{n} \frac{2\pi}{\lambda} = \mathbf{n} \frac{\omega}{v}; \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = 2\pi \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\lambda}$$

$$u(\mathbf{x}, t) = a \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (6)$$

- ▶ sau folosind  $E = \hbar\omega$  și  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$

$$u(\mathbf{x}, t) = a \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E \cdot t) \right] \quad (7)$$

## Ecuția diferențială pentru unda plană

- ▶ Avem funcția ce descrie o undă plană

$$u(x, t) = a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right] \quad (3)$$

- ▶ Calculăm derivatele funcției  $u(x, t)$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{2\pi}{\lambda} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a(2\pi)\nu \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a(2\pi)^2 \nu^2 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

- ▶ Folosind relația  $\lambda\nu = v$ , avem,

$$\frac{\nu^2}{v^2} - \frac{1}{\lambda^2} = 0 \text{ unde înlocuim } 1/\lambda^2 \text{ și } \nu^2$$

din expresiile derivatelor de ordin 2 de mai sus, împărțind cu  $(2\pi)^2 a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$  obținem:

- ▶ Ecuția diferențială a unei plane

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

- ▶ Soluția ecuației (4) este

$$u(x, t) = a \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right] \quad (5)$$

care este mai generală decât soluția sub forma (3) de la care s-a pornit. Legătura între ele este dată de:  $\sin \alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) / (2i)$

- ▶ Unda plană se mai scrie deseori sub altă formă, ținând cont de relațiile

$$\omega = 2\pi\nu; \mathbf{k} = \mathbf{n} \frac{2\pi}{\lambda} = \mathbf{n} \frac{\omega}{v}; \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = 2\pi \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\lambda}$$

$$u(\mathbf{x}, t) = a \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (6)$$

- ▶ sau folosind  $E = \hbar\omega$  și  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$

$$u(\mathbf{x}, t) = a \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E \cdot t) \right] \quad (7)$$

## Ecuția diferențială pentru unda plană

- ▶ Avem funcția ce descrie o undă plană

$$u(x, t) = a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right] \quad (3)$$

- ▶ Calculăm derivatele funcției  $u(x, t)$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{2\pi}{\lambda} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a(2\pi)\nu \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a(2\pi)^2 \nu^2 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$$

- ▶ Folosind relația  $\lambda\nu = v$ , avem,

$$\frac{\nu^2}{v^2} - \frac{1}{\lambda^2} = 0 \text{ unde înlocuim } 1/\lambda^2 \text{ și } \nu^2$$

din expresiile derivatelor de ordin 2 de mai sus, împărțind cu  $(2\pi)^2 a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right]$  obținem:

- ▶ Ecuția diferențială a unei plane

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

- ▶ Soluția ecuației (4) este

$$u(x, t) = a \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \right] \quad (5)$$

care este mai generală decât soluția sub forma (3) de la care s-a pornit. Legătura între ele este dată de:  $\sin \alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) / (2i)$

- ▶ Unda plană se mai scrie deseori sub altă formă, ținând cont de relațiile

$$\omega = 2\pi\nu; \quad \mathbf{k} = \mathbf{n} \frac{2\pi}{\lambda} = \mathbf{n} \frac{\omega}{v}; \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = 2\pi \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\lambda}$$

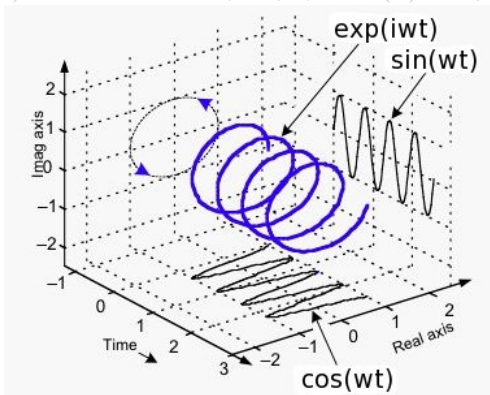
$$u(\mathbf{x}, t) = a \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (6)$$

- ▶ sau folosind  $E = \hbar\omega$  și  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$

$$u(\mathbf{x}, t) = a \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E \cdot t) \right] \quad (7)$$

## Funcția de undă sub formă complexă

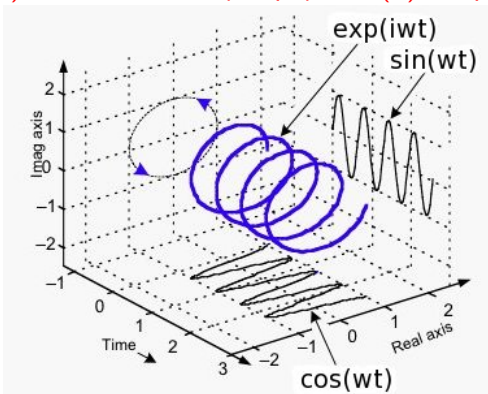
- ▶ Soluția sub forma (6) a ecuației de undă (4) este o funcție complexă, cu descompunerea în componentele reală și imaginară:  
 $u(\mathbf{x}, t) = a \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] = a \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) + i a \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$
- ▶ Evoluția temporală a componentelor reală și imaginară a unei plane  $u(t) = \exp(i\omega t)$  sau cu  $-t$ . Evoluția spațială  $u(x) = \exp(ikx)$  este identică.



$$\text{Im}(u) = a \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad ; \quad \text{Re}(u) = a \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$$

## Funcția de undă sub formă complexă

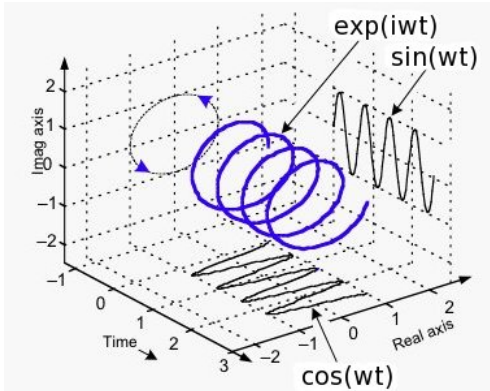
- ▶ Soluția sub forma (6) a ecuației de undă (4) este o funcție complexă, cu descompunerea în componentele reală și imaginară:  
$$u(\mathbf{x}, t) = a \exp [i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] = a \cos (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) + i a \sin (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$$
- ▶ Evoluția temporală a componentelor reală și imaginară a unei plane  $u(t) = \exp(i\omega t)$  sau cu  $-t$ . Evoluția spațială  $u(x) = \exp(ikx)$  este identică.



$$\text{Im}(u) = a \sin (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad ; \quad \text{Re}(u) = a \cos (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$$

## Funcția de undă sub formă complexă

- ▶ Soluția sub forma (6) a ecuației de undă (4) este o funcție complexă, cu descompunerea în componentele reală și imaginară:  
 $u(\mathbf{x}, t) = a \exp [i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] = a \cos (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) + i a \sin (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$
- ▶ Evoluția temporală a componentelor reală și imaginară a unei plane  $u(t) = \exp(i\omega t)$  sau cu  $-t$ . Evoluția spațială  $u(x) = \exp(ikx)$  este identică.



$$\text{Im}(u) = a \sin (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad ; \quad \text{Re}(u) = a \cos (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$$

## Partea VII

### Ecuatiile Maxwell pentru potențiale

Tabel: Ecuații Maxwell pentru potențiale (câmpuri staționare)

Ecuațiile Maxwell	Exprimarea prin potențiale	Ecuațiile Maxwell pt. potențiale	Soluții
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \times (\underbrace{\vec{\nabla} \phi}_{\downarrow}) = 0$ $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$	$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } d^3r'$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	$\vec{\nabla} \cdot (\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}}_{\downarrow}) = 0$ $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad *)$	$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$	$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } d^3r'$

\*) 
$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

am folosit condiția de calibrare Coulomb  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

## Tabel: Rezumat - Ecuatii Maxwell pentru potențiale (câmpuri nestaționare)

Ecuatiile Maxwell neomogene	Exprimarea prin potențiale	Ecuatiile Maxwell pentru potențiale	Calibrarea Lorenz	Ecuția potențialelor	Soluții nestaționare
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$	$-\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$ ↓	$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t -  \vec{r} - \vec{r}' /c)}{ \vec{r} - \vec{r}' } d^3 \vec{r}'$
$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ *) $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$	$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \mu_0 \vec{j}$		$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$	$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t -  \vec{r} - \vec{r}' /c)}{ \vec{r} - \vec{r}' } d^3 \vec{r}'$

\*)  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

# Partea VIII

## Undele electromagnetice

# Undele electromagnetice

Spectrul undelor electromagnetice

Ecuția de propagare a undelor electromagnetice

Propagarea undelor electromagnetice

Soluțiile ecuațiilor de undă EM

Proprietățile undelor electromagnetice

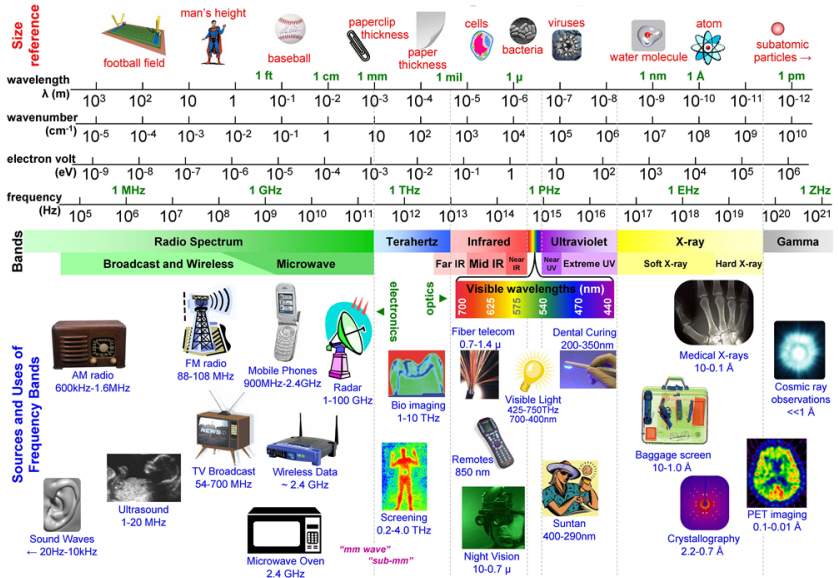
Legătura între componentele  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  ale unui câmp EM

Componenta electrică și magnetică

Energia câmpului electric și magnetic

Intensitatea undelor electromagnetice

# Spectral Under Electromagnetic



## Ecuția de propagare a undelor electromagnetice

- Să considerăm ecuațiile Maxwell în vid, fără sarcini și curenți,

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & (a) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \quad (8)$$

- Să luăm rotorul ( $\vec{\nabla} \times$ ) ecuației (8.d) și folosind identitatea pentru dublul produs vectorial, precum și (8.c) obținem

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{E})}{\partial t}$$

- Folosind legătura (16) cu viteza undelor electromagnetice  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  și înlocuind  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$  din ecuația (8.b), obținem ecuația de propagare a

undelor pt. componenta magnetică  $\vec{B}$ :

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{B} = 0 \quad (9)$$

- Similar, luând rotorul ecuației (8.b), în final obținem ecuația de

propagare a componentei electrice  $\vec{E}$ :

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{E} = 0 \quad (10)$$

## Ecuția de propagare a undelor electromagnetice

- ▶ Să considerăm ecuațiile Maxwell în vid, fără sarcini și curenți,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & (a) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (d) \end{array} \right. \quad (8)$$

- ▶ Să luăm rotorul ( $\vec{\nabla} \times$ ) ecuației (8.d) și folosind identitatea pentru dublul produs vectorial, precum și (8.c) obținem

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{E})}{\partial t}$$

- ▶ Folosind legătura (16) cu viteza undelor electromagnetice  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  și înlocuind  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$  din ecuația (8.b), obținem ecuația de propagare a

undelor pt. componenta magnetică  $\vec{B}$ :

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{B} = 0 \quad (9)$$

- ▶ Similar, luând rotorul ecuației (8.b), în final obținem ecuația de

propagare a componentei electrice  $\vec{E}$ :

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{E} = 0 \quad (10)$$

## Ecuția de propagare a undelor electromagnetice

- ▶ Să considerăm ecuațiile Maxwell în vid, fără sarcini și curenți,

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & (a) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \quad (8)$$

- ▶ Să luăm rotorul ( $\vec{\nabla} \times$ ) ecuației (8.d) și folosind identitatea pentru dublul produs vectorial, precum și (8.c) obținem

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{E})}{\partial t}$$

- ▶ Folosind legătura (16) cu viteza undelor electromagnetice  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  și înlocuind  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$  din ecuația (8.b), obținem ecuația de propagare a

undelor pt. componenta magnetică  $\vec{B}$ :

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{B} = 0 \quad (9)$$

- ▶ Similar, luând rotorul ecuației (8.b), în final obținem ecuația de

propagare a componentei electrice  $\vec{E}$ :

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{E} = 0 \quad (10)$$

## Ecuția de propagare a undelor electromagnetice

- ▶ Să considerăm ecuațiile Maxwell în vid, fără sarcini și curenți,

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & (a) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \quad (8)$$

- ▶ Să luăm rotorul ( $\vec{\nabla} \times$ ) ecuației (8.d) și folosind identitatea pentru dublul produs vectorial, precum și (8.c) obținem

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{E})}{\partial t}$$

- ▶ Folosind legătura (16) cu viteza undelor electromagnetice  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  și înlocuind  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$  din ecuația (8.b), obținem ecuația de propagare a

undelor pt. componenta magnetică  $\vec{B}$ :

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{B} = 0 \quad (9)$$

- ▶ Similar, luând rotorul ecuației (8.b), în final obținem ecuația de

propagare a componentei electrice  $\vec{E}$ :

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{E} = 0 \quad (10)$$

## Ecuatia de propagare a undelor electromagnetice

- ▶ Să considerăm ecuațiile Maxwell în vid, fără sarcini și curenți,

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & (a) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \quad (8)$$

- ▶ Să luăm rotorul ( $\vec{\nabla} \times$ ) ecuației (8.d) și folosind identitatea pentru dublul produs vectorial, precum și (8.c) obținem

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{E})}{\partial t}$$

- ▶ Folosind legătura (16) cu viteza undelor electromagnetice  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  și înlocuind  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$  din ecuația (8.b), obținem ecuația de propagare a

undelor pt. componenta magnetică  $\vec{B}$ :

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{B} = 0 \quad (9)$$

- ▶ Similar, luând rotorul ecuației (8.b), în final obținem ecuația de

propagare a componentei electrice  $\vec{E}$ :

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{E} = 0 \quad (10)$$

## Ecuția de propagare a undelor electromagnetice

- ▶ Să considerăm ecuațiile Maxwell în vid, fără sarcini și curenți,

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & (a) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \quad (8)$$

- ▶ Să luăm rotorul ( $\vec{\nabla} \times$ ) ecuației (8.d) și folosind identitatea pentru dublul produs vectorial, precum și (8.c) obținem

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{E})}{\partial t}$$

- ▶ Folosind legătura (16) cu viteza undelor electromagnetice  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  și înlocuind  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$  din ecuația (8.b), obținem ecuația de propagare a

undelor pt. componenta magnetică  $\vec{B}$ :

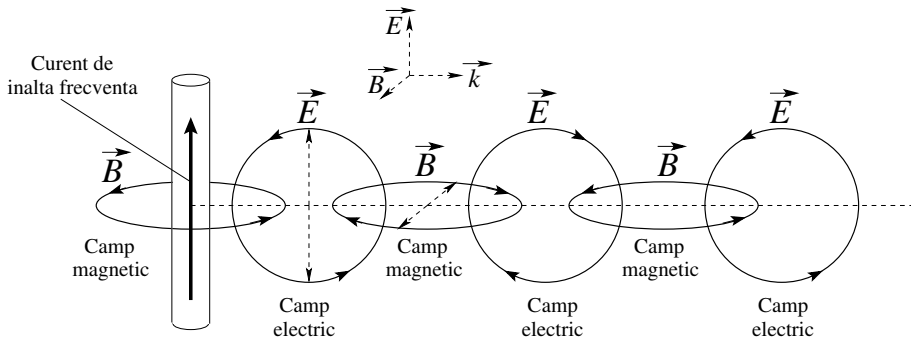
$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{B} = 0 \quad (9)$$

- ▶ Similar, luând rotorul ecuației (8.b), în final obținem ecuația de

propagare a componentei electrice  $\vec{E}$ :

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{E} = 0 \quad (10)$$

# Propagarea undelor electromagnetice



**Figura:** Generarea și propagarea undelor electromagnetice: 1. Un curent electric variabil generează un câmp magnetic variabil. 2. Câmpul magnetic variabil generează un câmp electric variabil. 3. Câmpul electric variabil generează un câmp magnetic variabil, și așa mai departe. Câmpurile generate au sensul în care câmpurile pe care acestea la rândul lor le generează să se opună variației câmpurilor ce le-au produs (Legea Lenz).

## Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- ▶ Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial  $\vec{u}$ ,

$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- ▶ Calculăm divergența de  $\vec{u}$ ,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= (u_{0x} ik_x + u_{0y} ik_y + u_{0z} ik_z) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= i\vec{k} \cdot \vec{u}\end{aligned}$$

- ▶ Calculăm rotor de  $\vec{u}$ , pe componente,

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_x &= \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y) \\ &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_x \quad \text{și similar}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_y &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_y \\ \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_z &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_z\end{aligned}$$

- ▶ Adică, rotorul vectorului  $\vec{u}$  este,

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = i\vec{k} \times \vec{u}$$

- ▶ Deci, acțiunea operatorului  $\vec{\nabla}$ , atât ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului  $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ .

- ▶ În cazul undelor electromagnetice, ca vector  $\vec{u}$ , luăm fie  $\vec{E}$  fie  $\vec{B}$ , adică

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} ; \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (11)$$

- ▶ Atunci, ec. Maxwell (8.a)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , pentru unda plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

Deci,  $\vec{E}$  oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.

- ▶ La fel, ec. Maxwell (8.c)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , pentru unda plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

Deci, și  $\vec{B}$  oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.

## Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial  $\vec{u}$ ,

$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- Calculăm divergența de  $\vec{u}$ ,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= (u_{0x} ik_x + u_{0y} ik_y + u_{0z} ik_z) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= i\vec{k} \cdot \vec{u}\end{aligned}$$

- Calculăm rotor de  $\vec{u}$ , pe componente,

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_x &= \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y) \\ &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_x \quad \text{și similar}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_y &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_y \\ \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_z &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_z\end{aligned}$$

- Adică, rotorul vectorului  $\vec{u}$  este,

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = i\vec{k} \times \vec{u}$$

- Deci, acțiunea operatorului  $\vec{\nabla}$ , atât ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului  $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ .

- În cazul undelor electromagnetice, ca vector  $\vec{u}$ , luăm fie  $\vec{E}$  fie  $\vec{B}$ , adică

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} ; \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (11)$$

- Atunci, ec. Maxwell (8.a)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , pentru unda plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

Deci,  $\vec{E}$  oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.

- La fel, ec. Maxwell (8.c)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , pentru unda plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

Deci, și  $\vec{B}$  oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.

## Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- ▶ Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial  $\vec{u}$ ,

$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- ▶ Calculăm divergența de  $\vec{u}$ ,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= (u_{0x} ik_x + u_{0y} ik_y + u_{0z} ik_z) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= i\vec{k} \cdot \vec{u}\end{aligned}$$

- ▶ Calculăm rotor de  $\vec{u}$ , pe componente,

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_x &= \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y) \\ &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_x \quad \text{și similar}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_y &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_y \\ \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_z &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_z\end{aligned}$$

- ▶ Adică, rotorul vectorului  $\vec{u}$  este,

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = i\vec{k} \times \vec{u}$$

- ▶ Deci, acțiunea operatorului  $\vec{\nabla}$ , atât ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului  $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ .

- ▶ În cazul undelor electromagnetice, ca vector  $\vec{u}$ , luăm fie  $\vec{E}$  fie  $\vec{B}$ , adică

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} ; \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (11)$$

- ▶ Atunci, ec. Maxwell (8.a)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , pentru unda plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

Deci,  $\vec{E}$  oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.

- ▶ La fel, ec. Maxwell (8.c)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , pentru unda plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

Deci, și  $\vec{B}$  oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.

## Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- ▶ Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial  $\vec{u}$ ,

$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- ▶ Calculăm divergența de  $\vec{u}$ ,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= (u_{0x} ik_x + u_{0y} ik_y + u_{0z} ik_z) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= i\vec{k} \cdot \vec{u}\end{aligned}$$

- ▶ Calculăm rotor de  $\vec{u}$ , pe componente,

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_x &= \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y) \\ &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_x \quad \text{și similar}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_y &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_y \\ \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_z &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_z\end{aligned}$$

- ▶ Adică, rotorul vectorului  $\vec{u}$  este,

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = i\vec{k} \times \vec{u}$$

- ▶ Deci, acțiunea operatorului  $\vec{\nabla}$ , atât ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului  $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ .

- ▶ În cazul undelor electromagnetice, ca vector  $\vec{u}$ , luăm fie  $\vec{E}$  fie  $\vec{B}$ , adică

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} ; \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (11)$$

- ▶ Atunci, ec. Maxwell (8.a)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , pentru undă plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

Deci,  $\vec{E}$  oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.

- ▶ La fel, ec. Maxwell (8.c)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , pentru undă plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

Deci, și  $\vec{B}$  oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.

## Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- ▶ Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial  $\vec{u}$ ,

$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- ▶ Calculăm divergența de  $\vec{u}$ ,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= (u_{0x} ik_x + u_{0y} ik_y + u_{0z} ik_z) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= i\vec{k} \cdot \vec{u}\end{aligned}$$

- ▶ Calculăm rotor de  $\vec{u}$ , pe componente,

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_x &= \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y) \\ &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_x \quad \text{și similar}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_y &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_y \\ \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_z &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_z\end{aligned}$$

- ▶ Adică, rotorul vectorului  $\vec{u}$  este,

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = i\vec{k} \times \vec{u}$$

- ▶ Deci, acțiunea operatorului  $\vec{\nabla}$ , atât ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului  $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ .

- ▶ În cazul undelor electromagnetice, ca vector  $\vec{u}$ , luăm fie  $\vec{E}$  fie  $\vec{B}$ , adică

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} ; \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (11)$$

- ▶ Atunci, ec. Maxwell (8.a)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , pentru undă plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

Deci,  $\vec{E}$  oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.

- ▶ La fel, ec. Maxwell (8.c)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , pentru undă plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

Deci, și  $\vec{B}$  oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.

## Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- ▶ Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial  $\vec{u}$ ,

$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- ▶ Calculăm divergența de  $\vec{u}$ ,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= (u_{0x} ik_x + u_{0y} ik_y + u_{0z} ik_z) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= i\vec{k} \cdot \vec{u}\end{aligned}$$

- ▶ Calculăm rotor de  $\vec{u}$ , pe componente,

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_x &= \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y) \\ &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_x \quad \text{și similar}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_y &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_y \\ \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_z &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_z\end{aligned}$$

- ▶ Adică, rotorul vectorului  $\vec{u}$  este,

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = i\vec{k} \times \vec{u}$$

- ▶ Deci, acțiunea operatorului  $\vec{\nabla}$ , atât ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului  $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ .

- ▶ În cazul undelor electromagnetice, ca vector  $\vec{u}$ , luăm fie  $\vec{E}$  fie  $\vec{B}$ , adică

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} ; \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (11)$$

- ▶ Atunci, ec. Maxwell (8.a)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , pentru unda plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

Deci,  $\vec{E}$  oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.

- ▶ La fel, ec. Maxwell (8.c)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , pentru unda plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

Deci, și  $\vec{B}$  oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.

## Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- ▶ Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial  $\vec{u}$ ,

$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- ▶ Calculăm divergența de  $\vec{u}$ ,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= (u_{0x} ik_x + u_{0y} ik_y + u_{0z} ik_z) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= i\vec{k} \cdot \vec{u}\end{aligned}$$

- ▶ Calculăm rotor de  $\vec{u}$ , pe componente,

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_x &= \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y) \\ &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_x \quad \text{și similar}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_y &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_y \\ \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_z &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_z\end{aligned}$$

- ▶ Adică, rotorul vectorului  $\vec{u}$  este,

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = i\vec{k} \times \vec{u}$$

- ▶ Deci, acțiunea operatorului  $\vec{\nabla}$ , atât ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului  $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ .

- ▶ **In cazul undelor electromagnetice, ca vector  $\vec{u}$ , luăm fie  $\vec{E}$  fie  $\vec{B}$ , adică**

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} ; \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (11)$$

- ▶ Atunci, ec. Maxwell (8.a)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , pentru unda plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

Deci,  $\vec{E}$  oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.

- ▶ La fel, ec. Maxwell (8.c)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , pentru unda plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

Deci, și  $\vec{B}$  oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.

## Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- ▶ Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial  $\vec{u}$ ,

$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- ▶ Calculăm divergența de  $\vec{u}$ ,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= (u_{0x} ik_x + u_{0y} ik_y + u_{0z} ik_z) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= i\vec{k} \cdot \vec{u}\end{aligned}$$

- ▶ Calculăm rotor de  $\vec{u}$ , pe componente,

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_x &= \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y) \\ &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_x \quad \text{și similar}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_y &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_y \\ \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_z &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_z\end{aligned}$$

- ▶ Adică, rotorul vectorului  $\vec{u}$  este,

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = i\vec{k} \times \vec{u}$$

- ▶ Deci, acțiunea operatorului  $\vec{\nabla}$ , atât ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului  $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ .

- ▶ În cazul undelor electromagnetice, ca vector  $\vec{u}$ , luăm fie  $\vec{E}$  fie  $\vec{B}$ , adică

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} ; \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (11)$$

- ▶ Atunci, ec. Maxwell (8.a)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , pentru unda plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

Deci,  $\vec{E}$  oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.

- ▶ La fel, ec. Maxwell (8.c)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , pentru unda plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

Deci, și  $\vec{B}$  oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.

## Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- ▶ Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial  $\vec{u}$ ,

$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- ▶ Calculăm divergența de  $\vec{u}$ ,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= (u_{0x} ik_x + u_{0y} ik_y + u_{0z} ik_z) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= i\vec{k} \cdot \vec{u}\end{aligned}$$

- ▶ Calculăm rotor de  $\vec{u}$ , pe componente,

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_x &= \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y) \\ &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_x \quad \text{și similar}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_y &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_y \\ \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_z &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_z\end{aligned}$$

- ▶ Adică, rotorul vectorului  $\vec{u}$  este,

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = i\vec{k} \times \vec{u}$$

- ▶ Deci, acțiunea operatorului  $\vec{\nabla}$ , atât ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului  $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ .

- ▶ În cazul undelor electromagnetice, ca vector  $\vec{u}$ , luăm fie  $\vec{E}$  fie  $\vec{B}$ , adică

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} ; \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (11)$$

- ▶ Atunci, ec. Maxwell (8.a)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , pentru unda plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

Deci,  $\vec{E}$  oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.

- ▶ La fel, ec. Maxwell (8.c)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , pentru unda plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

Deci, și  $\vec{B}$  oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.

## Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- ▶ Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial  $\vec{u}$ ,

$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- ▶ Calculăm divergența de  $\vec{u}$ ,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &= (u_{0x} ik_x + u_{0y} ik_y + u_{0z} ik_z) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= i\vec{k} \cdot \vec{u}\end{aligned}$$

- ▶ Calculăm rotor de  $\vec{u}$ , pe componente,

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_x &= \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y) \\ &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_x \quad \text{și similar}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_y &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_y \\ \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_z &= i \left(\vec{k} \times \vec{u}\right)_z\end{aligned}$$

- ▶ Adică, rotorul vectorului  $\vec{u}$  este,

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = i\vec{k} \times \vec{u}$$

- ▶ Deci, acțiunea operatorului  $\vec{\nabla}$ , atât ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului  $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ .

- ▶ În cazul undelor electromagnetice, ca vector  $\vec{u}$ , luăm fie  $\vec{E}$  fie  $\vec{B}$ , adică

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} ; \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (11)$$

- ▶ Atunci, ec. Maxwell (8.a)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ , pentru unda plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

Deci,  $\vec{E}$  **oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.**

- ▶ La fel, ec. Maxwell (8.c)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , pentru unda plană, devine,

$$i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

Deci, și  $\vec{B}$  **oscilează perpendicular pe direcția  $\vec{k}$  de propagare.**

## Proprietățile undelor electromagnetice

- ▶ Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  (8.b) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad (12)$$

- ▶ Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{E}$ , obținem,

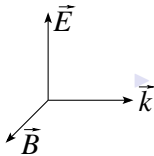
$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{\vec{E} \cdot (\vec{k} \times \vec{E})}{\omega} \underbrace{(\vec{k} \times \vec{E}) \perp \vec{E}}_{=0} = 0$$

Deci, și componentele  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  sunt perpendiculare.

- ▶ Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{B}$ , obținem,

$$\vec{B} \cdot (\vec{k} \times \vec{E}) = \omega B^2 > 0$$

Deci, **vectorii  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  și  $\vec{k}$  sunt reciproc perpendiculari** și formează un sistem drept de vectori.



- ▶ Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  (8.d) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{B} = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E} \quad (13)$$

- ▶ **Viteza de fază**  $c = \nu \lambda$ , cu  $\nu = \omega / (2\pi)$

și  $\lambda = 2\pi / k \implies \boxed{c = \omega / k} \quad (14)$

- ▶ Inlocuind în (13)  $\vec{B} = \vec{k} \times \vec{E} / \omega$  din (12) și din dezvoltarea dublului produs vectorial,  $\underbrace{=0}$

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} - k^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E} \implies k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \quad (15)$$

- ▶ Am văzut (14)  $k = \omega / c$ , iar din (15) obținem  $\boxed{c = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (16)$

- ▶ Din relația (12) exprimăm  $B = \frac{k}{\omega} E$ , iar din (14)  $\implies \boxed{B = E / c} \quad (17)$

## Proprietățile undelor electromagnetice

- ▶ Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  (8.b) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad (12)$$

- ▶ Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{E}$ , obținem,

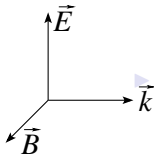
$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{\vec{E} \cdot (\vec{k} \times \vec{E})}{\omega} \underbrace{(\vec{k} \times \vec{E}) \perp \vec{E}}_{=0} = 0$$

Deci, și componentele  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  sunt perpendiculare.

- ▶ Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{B}$ , obținem,

$$\vec{B} \cdot (\vec{k} \times \vec{E}) = \omega B^2 > 0$$

Deci, **vectorii  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  și  $\vec{k}$  sunt reciproc perpendiculari** și formează un sistem drept de vectori.



- ▶ Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  (8.d) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{B} = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E} \quad (13)$$

- ▶ **Viteza de fază**  $c = \nu \lambda$ , cu  $\nu = \omega / (2\pi)$

și  $\lambda = 2\pi / k \implies \boxed{c = \omega / k}$  (14)

- ▶ Inlocuind în (13)  $\vec{B} = \vec{k} \times \vec{E} / \omega$  din (12) și din dezvoltarea dublului produs vectorial,  $= 0$

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{E})}_{=0} \vec{k} - k^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E} \implies k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \quad (15)$$

- ▶ Am văzut (14)  $k = \omega / c$ , iar din (15)

obținem  $\boxed{c = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  (16)

- ▶ Din relația (12) exprimăm  $B = \frac{k}{\omega} E$ , iar din (14)  $\implies \boxed{B = E / c}$  (17)

## Proprietățile undelor electromagnetice

- ▶ Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  (8.b) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad (12)$$

- ▶ Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{E}$ , obținem,

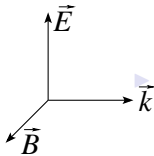
$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{\vec{E} \cdot (\vec{k} \times \vec{E})}{\omega} \underbrace{(\vec{k} \times \vec{E}) \perp \vec{E}}_{=0} = 0$$

Deci, și componentele  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  sunt perpendiculare.

- ▶ Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{B}$ , obținem,

$$\vec{B} \cdot (\vec{k} \times \vec{E}) = \omega B^2 > 0$$

Deci, vectorii  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  și  $\vec{k}$  sunt reciproc perpendiculari și formează un sistem drept de vectori.



- ▶ Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  (8.d) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{B} = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E} \quad (13)$$

- ▶ **Viteza de fază**  $c = \nu \lambda$ , cu  $\nu = \omega / (2\pi)$

și  $\lambda = 2\pi / k \implies \boxed{c = \omega / k}$  (14)

- ▶ Inlocuind în (13)  $\vec{B} = \vec{k} \times \vec{E} / \omega$  din (12) și din dezvoltarea dublului produs vectorial,  $= 0$

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{E})}_{=0} \vec{k} - k^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E} \implies k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \quad (15)$$

- ▶ Am văzut (14)  $k = \omega / c$ , iar din (15) obținem  $\boxed{c = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  (16)

- ▶ Din relația (12) exprimăm  $B = \frac{k}{\omega} E$ , iar din (14)  $\implies \boxed{B = E / c}$  (17)

## Proprietățile undelor electromagnetice

- ▶ Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  (8.b) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad (12)$$

- ▶ Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{E}$ , obținem,

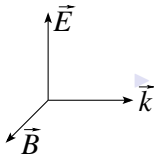
$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{\vec{E} \cdot (\vec{k} \times \vec{E})}{\omega} \underbrace{(\vec{k} \times \vec{E}) \perp \vec{E}}_{=0} = 0$$

Deci, și componentele  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  sunt perpendiculare.

- ▶ Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{B}$ , obținem,

$$\vec{B} \cdot (\vec{k} \times \vec{E}) = \omega B^2 > 0$$

Deci, **vectorii  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  și  $\vec{k}$  sunt reciproc perpendiculari** și formează un sistem drept de vectori.



- ▶ Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  (8.d) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{B} = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E} \quad (13)$$

- ▶ **Viteza de fază  $c = \nu \lambda$** , cu  $\nu = \omega / (2\pi)$

și  $\lambda = 2\pi / k \implies \boxed{c = \omega / k}$  (14)

- ▶ Inlocuind în (13)  $\vec{B} = \vec{k} \times \vec{E} / \omega$  din (12) și din dezvoltarea dublului produs vectorial,  $=0$

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{E})}_{=0} \vec{k} - k^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E} \implies k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \quad (15)$$

- ▶ Am văzut (14)  $k = \omega / c$ , iar din (15)

obținem  $\boxed{c = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  (16)

- ▶ Din relația (12) exprimăm  $B = \frac{k}{\omega} E$ , iar din (14)  $\implies \boxed{B = E / c}$  (17)

## Proprietățile undelor electromagnetice

- Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  (8.b) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad (12)$$

- Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{E}$ , obținem,

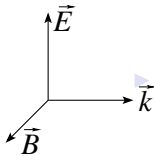
$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{\vec{E} \cdot (\vec{k} \times \vec{E})}{\omega} \underbrace{(\vec{k} \times \vec{E}) \perp \vec{E}}_{=0} = 0$$

Deci, și componentele  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  sunt perpendiculare.

- Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{B}$ , obținem,

$$\vec{B} \cdot (\vec{k} \times \vec{E}) = \omega B^2 > 0$$

Deci, **vectorii  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  și  $\vec{k}$  sunt reciproc perpendiculari** și formează un sistem drept de vectori.



- Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  (8.d) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{B} = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E} \quad (13)$$

- Viteza de fază  $c = \nu \lambda$ , cu  $\nu = \omega / (2\pi)$

și  $\lambda = 2\pi / k \implies \boxed{c = \omega / k}$  (14)

- Inlocuind în (13)  $\vec{B} = \vec{k} \times \vec{E} / \omega$  din (12) și din dezvoltarea dublului produs vectorial,  $= 0$

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{E})}_{=0} \vec{k} - k^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E} \implies k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \quad (15)$$

- Am văzut (14)  $k = \omega / c$ , iar din (15)

obținem  $\boxed{c = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  (16)

- Din relația (12) exprimăm  $B = \frac{k}{\omega} E$ , iar din (14)  $\implies \boxed{B = E / c}$  (17)

## Proprietățile undelor electromagnetice

- ▶ Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  (8.b) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad (12)$$

- ▶ Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{E}$ , obținem,

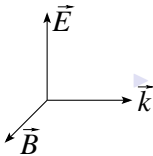
$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{\vec{E} \cdot (\vec{k} \times \vec{E})}{\omega} \underbrace{(\vec{k} \times \vec{E}) \perp \vec{E}}_{=0} = 0$$

Deci, și componentele  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  sunt perpendiculare.

- ▶ Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{B}$ , obținem,

$$\vec{B} \cdot (\vec{k} \times \vec{E}) = \omega B^2 > 0$$

Deci, **vectorii  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  și  $\vec{k}$  sunt reciproc perpendiculari** și formează un sistem drept de vectori.



- ▶ Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  (8.d) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{B} = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E} \quad (13)$$

- ▶ **Viteza de fază  $c = \nu \lambda$ , cu  $\nu = \omega / (2\pi)$**

și  $\lambda = 2\pi / k \implies \boxed{c = \omega / k} \quad (14)$

- ▶ Inlocuind în (13)  $\vec{B} = \vec{k} \times \vec{E} / \omega$  din (12) și din dezvoltarea dublului produs vectorial,  $= 0$

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{E})}_{=0} \vec{k} - k^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E} \implies k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \quad (15)$$

- ▶ Am văzut (14)  $k = \omega / c$ , iar din (15)

obținem  $\boxed{c = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (16)$

- ▶ Din relația (12) exprimăm  $B = \frac{k}{\omega} E$ , iar din (14)  $\implies \boxed{B = E / c} \quad (17)$

## Proprietățile undelor electromagnetice

- ▶ Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  (8.b) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad (12)$$

- ▶ Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{E}$ , obținem,

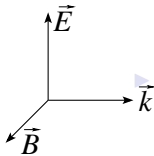
$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{\vec{E} \cdot (\vec{k} \times \vec{E})}{\omega} \underbrace{(\vec{k} \times \vec{E}) \perp \vec{E}}_{=0} = 0$$

Deci, și componentele  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  sunt perpendiculare.

- ▶ Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{B}$ , obținem,

$$\vec{B} \cdot (\vec{k} \times \vec{E}) = \omega B^2 > 0$$

Deci, **vectorii  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  și  $\vec{k}$  sunt reciproc perpendiculari** și formează un sistem drept de vectori.



- ▶ Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  (8.d) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{B} = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E} \quad (13)$$

- ▶ **Viteza de fază**  $c = \nu \lambda$ , cu  $\nu = \omega / (2\pi)$

și  $\lambda = 2\pi / k \implies \boxed{c = \omega / k}$  (14)

- ▶ Inlocuind în (13)  $\vec{B} = \vec{k} \times \vec{E} / \omega$  din (12) și din dezvoltarea dublului produs vectorial,  $= 0$

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{E})}_{=0} \vec{k} - k^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E} \implies k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \quad (15)$$

- ▶ Am văzut (14)  $k = \omega / c$ , iar din (15)

obținem  $\boxed{c = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  (16)

- ▶ Din relația (12) exprimăm  $B = \frac{k}{\omega} E$ , iar din (14)  $\implies \boxed{B = E / c}$  (17)

## Proprietățile undelor electromagnetice

- ▶ Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  (8.b) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad (12)$$

- ▶ Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{E}$ , obținem,

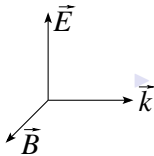
$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{\vec{E} \cdot (\vec{k} \times \vec{E})}{\omega} \underbrace{(\vec{k} \times \vec{E}) \perp \vec{E}}_{=0} = 0$$

Deci, și componentele  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  sunt perpendiculare.

- ▶ Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{B}$ , obținem,

$$\vec{B} \cdot (\vec{k} \times \vec{E}) = \omega B^2 > 0$$

Deci, **vectorii  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  și  $\vec{k}$  sunt reciproc perpendiculari** și formează un sistem drept de vectori.



- ▶ Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  (8.d) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{B} = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E} \quad (13)$$

- ▶ **Viteza de fază**  $c = \nu \lambda$ , cu  $\nu = \omega / (2\pi)$

și  $\lambda = 2\pi / k \implies \boxed{c = \omega / k}$  (14)

- ▶ Inlocuind în (13)  $\vec{B} = \vec{k} \times \vec{E} / \omega$  din (12) și din dezvoltarea dublului produs vectorial,  $\overset{=0}{\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E})} = (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} - k^2 \vec{E}$

$$= -\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E} \implies k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \quad (15)$$

- ▶ Am văzut (14)  $k = \omega / c$ , iar din (15) obținem  $\boxed{c = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  (16)

- ▶ Din relația (12) exprimăm  $B = \frac{k}{\omega} E$ , iar din (14)  $\implies \boxed{B = E / c}$  (17)

## Proprietățile undelor electromagnetice

- ▶ Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  (8.b) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad (12)$$

- ▶ Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{E}$ , obținem,

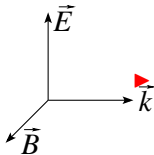
$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{\vec{E} \cdot (\vec{k} \times \vec{E})}{\omega} \underbrace{(\vec{k} \times \vec{E}) \perp \vec{E}}_{=0} = 0$$

Deci, și componentele  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  sunt perpendiculare.

- ▶ Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{B}$ , obținem,

$$\vec{B} \cdot (\vec{k} \times \vec{E}) = \omega B^2 > 0$$

Deci, **vectorii  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  și  $\vec{k}$  sunt reciproc perpendiculari** și formează un sistem drept de vectori.



- ▶ Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  (8.d) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{B} = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E} \quad (13)$$

- ▶ **Viteza de fază**  $c = \nu \lambda$ , cu  $\nu = \omega / (2\pi)$

și  $\lambda = 2\pi / k \implies \boxed{c = \omega / k} \quad (14)$

- ▶ Inlocuind în (13)  $\vec{B} = \vec{k} \times \vec{E} / \omega$  din (12) și din dezvoltarea dublului produs vectorial,  $\overset{=0}{\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E})} = (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} - k^2 \vec{E}$

$$= -\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E} \implies k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \quad (15)$$

- ▶ Am văzut (14)  $k = \omega / c$ , iar din (15) obținem  $\boxed{c = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (16)$

- ▶ Din relația (12) exprimăm  $B = \frac{k}{\omega} E$ , iar din (14)  $\implies \boxed{B = E / c} \quad (17)$

## Proprietățile undelor electromagnetice

- ▶ Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  (8.b) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad (12)$$

- ▶ Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{E}$ , obținem,

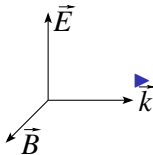
$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{\vec{E} \cdot (\vec{k} \times \vec{E})}{\omega} \underbrace{(\vec{k} \times \vec{E}) \perp \vec{E}}_{=0} = 0$$

Deci, și componentele  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  sunt perpendiculare.

- ▶ Inmulțind scalar (12) cu  $\vec{B}$ , obținem,

$$\vec{B} \cdot (\vec{k} \times \vec{E}) = \omega B^2 > 0$$

Deci, **vectorii  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  și  $\vec{k}$  sunt reciproc perpendiculari** și formează un sistem drept de vectori.



- ▶ Cu aceeași înlocuire de operator

$\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ , ecuația Maxwell

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  (8.d) devine,

$$i\vec{k} \times \vec{B} = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E} \quad (13)$$

- ▶ **Viteza de fază**  $c = \nu \lambda$ , cu  $\nu = \omega / (2\pi)$

și  $\lambda = 2\pi / k \implies \boxed{c = \omega / k}$  (14)

- ▶ Inlocuind în (13)  $\vec{B} = \vec{k} \times \vec{E} / \omega$  din (12) și din dezvoltarea dublului produs vectorial,  $\overset{=0}{\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E})}$

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} - k^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E} \implies k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \quad (15)$$

- ▶ Am văzut (14)  $k = \omega / c$ , iar din (15) obținem  $\boxed{c = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  (16)

- ▶ Din relația (12) exprimăm  $B = \frac{k}{\omega} E$ , iar din (14)  $\implies \boxed{B = E / c}$  (17)

## Legătura între componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ ale unui câmp EM

- ▶ În soluția generală de undă plană (11), pt. componenta electrică, includem explicit defazajul  $\phi$ , iar aceasta devine:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \quad (18)$$

- ▶ Similar, pt. componenta magnetică avem

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} \quad (19)$$

- ▶ Cu ecuația Maxwell  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  (1.d), căutăm legătura între  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$ ,

- ▶  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{\nabla} = -\vec{B}_0 \times \vec{\nabla} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} = -i(\vec{B}_0 \times \vec{k}') e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')}$

cu  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  (16), termenul II din (1.d):  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)}$

Egalând cele două expresii:  $(\vec{B}_0 \times \vec{k}') e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} = \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)}$

- ▶ Pentru ca relația să fie valabilă pentru orice  $\vec{r}$  și  $t$ , identificăm:  $\vec{k}' = \vec{k}$  și

$\phi' = \phi$  iar  $\vec{B}_0 \times \vec{k} = \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0$ . Dacă  $\frac{\omega}{c} = k$  și  $\frac{\vec{k}}{k} = \vec{n} \Rightarrow \vec{B}_0 \times \vec{n} = \frac{\vec{E}_0}{c}$

deoarece  $B_0 = E_0/c$ , la fel }  $\vec{n} \times \frac{\vec{E}_0}{c} = \vec{B}_0$  sau  $\vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{k} \times \frac{k}{\omega} \vec{E}_0 = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega}$   
ca pt. vectori unitari, avem,

- ▶ Ec. (19) pt. câmp  $\vec{B}$ , devine:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \quad (20)$$

## Legătura între componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ ale unui câmp EM

- ▶ În soluția generală de undă plană (11), pt. componenta electrică, includem explicit defazajul  $\phi$ , iar aceasta devine:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \quad (18)$$

- ▶ Similar, pt. componenta magnetică avem

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} \quad (19)$$

- ▶ Cu ecuația Maxwell  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  (1.d), căutăm legătura între  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$ ,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{\nabla} = -\vec{B}_0 \times \vec{\nabla} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} = -i(\vec{B}_0 \times \vec{k}') e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')}$$

cu  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  (16), termenul II din (1.d):  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)}$

Egalând cele două expresii:  $(\vec{B}_0 \times \vec{k}') e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} = \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)}$

- ▶ Pentru ca relația să fie valabilă pentru orice  $\vec{r}$  și  $t$ , identificăm:  $\vec{k}' = \vec{k}$  și

$$\phi' = \phi \quad \text{iar} \quad \vec{B}_0 \times \vec{k} = \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0. \quad \text{Dacă } \frac{\omega}{c} = k \text{ și } \frac{\vec{k}}{k} = \vec{n} \Rightarrow \vec{B}_0 \times \vec{n} = \frac{\vec{E}_0}{c}$$

deoarece  $B_0 = E_0/c$ , la fel }  $\vec{n} \times \frac{\vec{E}_0}{c} = \vec{B}_0$  sau  $\vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{k} \times \frac{k}{\omega} \vec{E}_0 = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega}$   
ca pt. vectori unitari, avem,

- ▶ Ec. (19) pt. câmp  $\vec{B}$ , devine:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \quad (20)$$

## Legătura între componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ ale unui câmp EM

- ▶ În soluția generală de undă plană (11), pt. componenta electrică, includem explicit defazajul  $\phi$ , iar aceasta devine:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \quad (18)$$

- ▶ Similar, pt. componenta magnetică avem

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} \quad (19)$$

- ▶ Cu ecuația Maxwell  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  (1.d), căutăm legătura între  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$ ,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{\nabla} = -\vec{B}_0 \times \vec{\nabla} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} = -i(\vec{B}_0 \times \vec{k}') e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')}$$

cu  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  (16), termenul II din (1.d):  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)}$

Egalând cele două expresii:  $(\vec{B}_0 \times \vec{k}') e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} = \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)}$

- ▶ Pentru ca relația să fie valabilă pentru orice  $\vec{r}$  și  $t$ , identificăm:  $\vec{k}' = \vec{k}$  și

$$\phi' = \phi \quad \text{iar} \quad \vec{B}_0 \times \vec{k} = \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0. \quad \text{Dacă } \frac{\omega}{c} = k \text{ și } \frac{\vec{k}}{k} = \vec{n} \Rightarrow \vec{B}_0 \times \vec{n} = \frac{\vec{E}_0}{c}$$

deoarece  $B_0 = E_0/c$ , la fel }  $\vec{n} \times \frac{\vec{E}_0}{c} = \vec{B}_0$  sau  $\vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{k} \times \frac{k}{\omega} \vec{E}_0 = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega}$   
ca pt. vectori unitari, avem,

- ▶ Ec. (19) pt. câmp  $\vec{B}$ , devine:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \quad (20)$$

## Legătura între componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ ale unui câmp EM

- ▶ În soluția generală de undă plană (11), pt. componenta electrică, includem explicit defazajul  $\phi$ , iar aceasta devine:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \quad (18)$$

- ▶ Similar, pt. componenta magnetică avem

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} \quad (19)$$

- ▶ Cu ecuația Maxwell  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  (1.d), căutăm legătura între  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$ ,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{\nabla} = -\vec{B}_0 \times \vec{\nabla} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} = -i(\vec{B}_0 \times \vec{k}') e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')}$$

cu  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  (16), termenul II din (1.d):  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)}$

Egalând cele două expresii:  $(\vec{B}_0 \times \vec{k}') e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} = \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)}$

- ▶ Pentru ca relația să fie valabilă pentru orice  $\vec{r}$  și  $t$ , identificăm:  $\vec{k}' = \vec{k}$  și

$$\phi' = \phi \quad \text{iar} \quad \vec{B}_0 \times \vec{k} = \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0. \quad \text{Dacă } \frac{\omega}{c} = k \text{ și } \frac{\vec{k}}{k} = \vec{n} \Rightarrow \vec{B}_0 \times \vec{n} = \frac{\vec{E}_0}{c}$$

deoarece  $B_0 = E_0/c$ , la fel }  $\vec{n} \times \frac{\vec{E}_0}{c} = \vec{B}_0$  sau  $\vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{k} \times \frac{k}{\omega} \vec{E}_0 = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega}$   
ca pt. vectori unitari, avem,

- ▶ Ec. (19) pt. câmp  $\vec{B}$ , devine:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \quad (20)$$

## Legătura între componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ ale unui câmp EM

- ▶ În soluția generală de undă plană (11), pt. componenta electrică, includem explicit defazajul  $\phi$ , iar aceasta devine:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \quad (18)$$

- ▶ Similar, pt. componenta magnetică avem

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} \quad (19)$$

- ▶ Cu ecuația Maxwell  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  (1.d), căutăm legătura între  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$ ,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{\nabla} = -\vec{B}_0 \times \vec{\nabla} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} = -i(\vec{B}_0 \times \vec{k}') e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')}$$

cu  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  (16), termenul II din (1.d):  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)}$

Egalând cele două expresii:  $(\vec{B}_0 \times \vec{k}') e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} = \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)}$

- ▶ Pentru ca relația să fie valabilă pentru orice  $\vec{r}$  și  $t$ , identificăm:  $\vec{k}' = \vec{k}$  și

$$\phi' = \phi \quad \text{iar} \quad \vec{B}_0 \times \vec{k} = \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0. \quad \text{Dacă } \frac{\omega}{c} = k \text{ și } \frac{\vec{k}}{k} = \vec{n} \Rightarrow \vec{B}_0 \times \vec{n} = \frac{\vec{E}_0}{c}$$

deoarece  $B_0 = E_0/c$ , la fel }  $\vec{n} \times \frac{\vec{E}_0}{c} = \vec{B}_0$  sau  $\vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{k} \times \frac{k}{\omega} \vec{E}_0 = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega}$   
ca pt. vectori unitari, avem,

- ▶ Ec. (19) pt. câmp  $\vec{B}$ , devine:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \quad (20)$$

## Legătura între componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ ale unui câmp EM

- ▶ În soluția generală de undă plană (11), pt. componenta electrică, includem explicit defazajul  $\phi$ , iar aceasta devine:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \quad (18)$$

- ▶ Similar, pt. componenta magnetică avem

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} \quad (19)$$

- ▶ Cu ecuația Maxwell  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  (1.d), căutăm legătura între  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$ ,

- ▶  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{\nabla} = -\vec{B}_0 \times \vec{\nabla} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} = -i(\vec{B}_0 \times \vec{k}') e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')}$

cu  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  (16), termenul II din (1.d):  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)}$

Egalând cele două expresii:  $(\vec{B}_0 \times \vec{k}') e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} = \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)}$

- ▶ Pentru ca relația să fie valabilă pentru orice  $\vec{r}$  și  $t$ , identificăm:  $\vec{k}' = \vec{k}$  și

$\phi' = \phi$  iar  $\vec{B}_0 \times \vec{k} = \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0$ . Dacă  $\frac{\omega}{c} = k$  și  $\frac{\vec{k}}{k} = \vec{n} \Rightarrow \vec{B}_0 \times \vec{n} = \frac{\vec{E}_0}{c}$

deoarece  $B_0 = E_0/c$ , la fel }  $\vec{n} \times \frac{\vec{E}_0}{c} = \vec{B}_0$  sau  $\vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{k} \times \frac{k}{\omega} \vec{E}_0 = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega}$   
ca pt. vectori unitari, avem,

- ▶ Ec. (19) pt. câmp  $\vec{B}$ , devine:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \quad (20)$$

## Legătura între componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ ale unui câmp EM

- ▶ În soluția generală de undă plană (11), pt. componenta electrică, includem explicit defazajul  $\phi$ , iar aceasta devine:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \quad (18)$$

- ▶ Similar, pt. componenta magnetică avem

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} \quad (19)$$

- ▶ Cu ecuația Maxwell  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  (1.d), căutăm legătura între  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$ ,

- ▶  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{\nabla} = -\vec{B}_0 \times \vec{\nabla} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} = -i(\vec{B}_0 \times \vec{k}') e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')}$

cu  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  (16), termenul II din (1.d):  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)}$

Egalând cele două expresii:  $(\vec{B}_0 \times \vec{k}') e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} = \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)}$

- ▶ Pentru ca relația să fie valabilă pentru orice  $\vec{r}$  și  $t$ , identificăm:  $\vec{k}' = \vec{k}$  și

$\phi' = \phi$  iar  $\vec{B}_0 \times \vec{k} = \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0$ . Dacă  $\frac{\omega}{c} = k$  și  $\frac{\vec{k}}{k} = \vec{n} \Rightarrow \vec{B}_0 \times \vec{n} = \frac{\vec{E}_0}{c}$

deoarece  $B_0 = E_0/c$ , la fel }  $\vec{n} \times \frac{\vec{E}_0}{c} = \vec{B}_0$  sau  $\vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{k} \times \frac{k}{\omega} \vec{E}_0 = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega}$   
ca pt. vectori unitari, avem,

- ▶ Ec. (19) pt. câmp  $\vec{B}$ , devine:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \quad (20)$$

## Legătura între componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ ale unui câmp EM

- ▶ În soluția generală de undă plană (11), pt. componenta electrică, includem explicit defazajul  $\phi$ , iar aceasta devine:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \quad (18)$$

- ▶ Similar, pt. componenta magnetică avem

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} \quad (19)$$

- ▶ Cu ecuația Maxwell  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  (1.d), căutăm legătura între  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$ ,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{\nabla} = -\vec{B}_0 \times \vec{\nabla} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} = -i(\vec{B}_0 \times \vec{k}') e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')}$$

cu  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  (16), termenul II din (1.d):  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)}$

Egalând cele două expresii:  $(\vec{B}_0 \times \vec{k}') e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t + \phi')} = \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)}$

- ▶ Pentru ca relația să fie valabilă pentru orice  $\vec{r}$  și  $t$ , identificăm:  $\vec{k}' = \vec{k}$  și

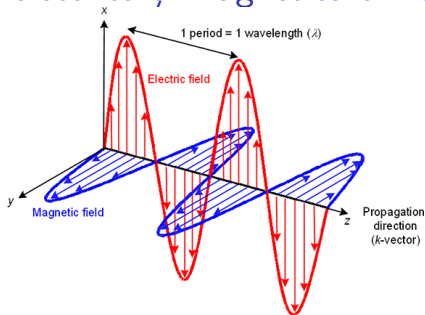
$$\phi' = \phi \quad \text{iar} \quad \vec{B}_0 \times \vec{k} = \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_0. \quad \text{Dacă} \quad \frac{\omega}{c} = k \quad \text{și} \quad \frac{\vec{k}}{k} = \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_0 \times \vec{n} = \frac{\vec{E}_0}{c}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{deoarece } B_0 = E_0/c, \text{ la fel} \\ \text{ca pt. vectori unitari, avem,} \end{array} \right\} \vec{n} \times \frac{\vec{E}_0}{c} = \vec{B}_0 \quad \text{sau} \quad \vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{k} \times \frac{k}{\omega} \vec{E}_0 = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega}$$

- ▶ Ec. (19) pt. câmp  $\vec{B}$ , devine:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \quad (20)$$

# Componenta electrică și magnetică din unda EM



- ▶ Am văzut (17), componenta electrică  $E$  dintr-o undă EM este de  $c$  ori mai mare ca cea magnetică  $B$ :

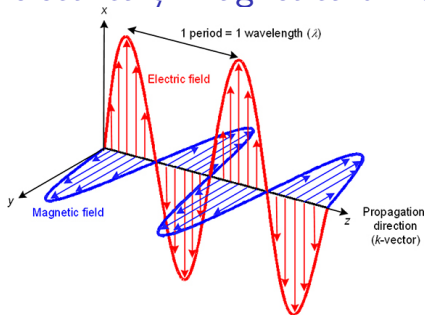
$$B = \frac{E}{c} \quad (17)$$

- ▶ Exemplu: Să evaluăm amplitudinea maximă a câmpului magnetic  $B_0$  dintr-o undă EM (11) cu  $E_0 = 1000 \text{ V/m}$ :

$$B_0 = \frac{1000 \text{ V/m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3.33 \times 10^{-6} \text{ T} \quad (21)$$

După cum se vede, într-un câmp EM cu o componentă de câmp electric relativ puternică de  $1000 \text{ V/m}$ , este însoțită de o componentă magnetică relativ slabă, mai slabă decât valoarea câmpului magnetic terestru ( $\sim 50 \times 10^{-6} \text{ T}$ ).

# Componenta electrică și magnetică din unda EM



- ▶ Am văzut (17), componenta electrică  $E$  dintr-o undă EM este de  $c$  ori mai mare ca cea magnetică  $B$ :

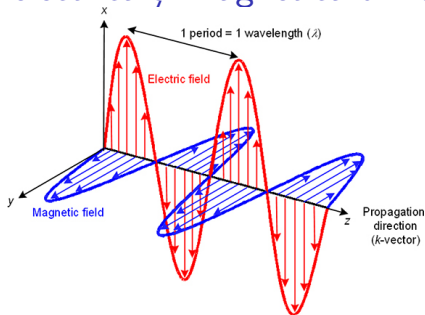
$$B = \frac{E}{c} \quad (17)$$

- ▶ Exemplu: Să evaluăm amplitudinea maximă a câmpului magnetic  $B_0$  dintr-o undă EM (11) cu  $E_0 = 1000 \text{ V/m}$ :

$$B_0 = \frac{1000 \text{ V/m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3.33 \times 10^{-6} \text{ T} \quad (21)$$

După cum se vede, într-un câmp EM cu o componentă de câmp electric relativ puternică de  $1000 \text{ V/m}$ , este însoțită de o componentă magnetică relativ slabă, mai slabă decât valoarea câmpului magnetic terestru ( $\sim 50 \times 10^{-6} \text{ T}$ ).

# Componenta electrică și magnetică din unda EM



- ▶ Am văzut (17), componenta electrică  $E$  dintr-o undă EM este de  $c$  ori mai mare ca cea magnetică  $B$ :

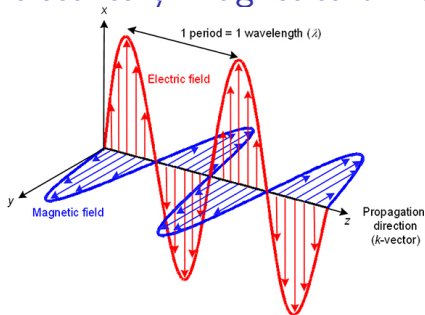
$$B = \frac{E}{c} \quad (17)$$

- ▶ Exemplu: Să evaluăm amplitudinea maximă a câmpului magnetic  $B_0$  dintr-o undă EM (11) cu  $E_0 = 1000 \text{ V/m}$ :

$$B_0 = \frac{1000 \text{ V/m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3.33 \times 10^{-6} \text{ T} \quad (21)$$

După cum se vede, într-un câmp EM cu o componentă de câmp electric relativ puternică de  $1000 \text{ V/m}$ , este însoțită de o componentă magnetică relativ slabă, mai slabă decât valoarea câmpului magnetic terestru ( $\sim 50 \times 10^{-6} \text{ T}$ ).

# Componenta electrică și magnetică din unda EM



- ▶ Am văzut (17), componenta electrică  $E$  dintr-o undă EM este de  $c$  ori mai mare ca cea magnetică  $B$ :

$$B = \frac{E}{c} \quad (17)$$

- ▶ Exemplu: Să evaluăm amplitudinea maximă a câmpului magnetic  $B_0$  dintr-o undă EM (11) cu  $E_0 = 1000 \text{ V/m}$ :

$$B_0 = \frac{1000 \text{ V/m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3.33 \times 10^{-6} \text{ T} \quad (21)$$

După cum se vede, într-un câmp EM cu o componentă de câmp electric relativ puternică de  $1000 \text{ V/m}$ , este însoțită de o componentă magnetică relativ slabă, mai slabă decât valoarea câmpului magnetic terestru ( $\sim 50 \times 10^{-6} \text{ T}$ ).

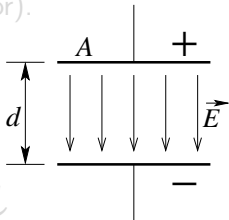
# Energia câmpului electric și magnetic

- ▶ Energia câmpului electric (în condensator).

$$dW_E = V dq$$

$$W_E = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \boxed{\frac{1}{2} C V^2}$$

$$= \frac{1}{2} C E^2 d^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \underbrace{Ad}_{Vol}$$



$$V = \frac{Q}{C}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$E = \frac{V}{d}$$

- ▶ Densitatea de energie câmp electric:

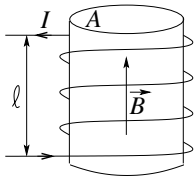
$$u_E = \frac{W_E}{Vol} = \frac{W_E}{Ad} = \boxed{\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2} \quad (22)$$

- ▶ Energia câmpului magnetic (în solenoid).

Faraday  $dW_B = P dt = V I dt$

$$V = N \frac{d\phi}{dt} = N A \frac{dB}{dt} = \underbrace{\mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}}_L \frac{dI}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

$$W_B = \int_0^I V I dt = \int_0^I L I dl = \boxed{\frac{1}{2} L I^2} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \frac{\ell^2 B^2}{\mu_0^2 N^2}$$



$$V = N \frac{d\phi}{dt}$$

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}$$

$$B = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$$

- ▶ Densitatea de energie câmp magnetic:

$$u_B = \frac{W_B}{Vol} = \frac{W_B}{Al} = \boxed{\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}} \quad (23)$$

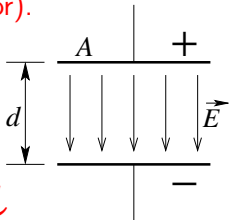
# Energia câmpului electric și magnetic

- ▶ Energia câmpului electric (în condensator).

$$dW_E = V dq$$

$$W_E = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \boxed{\frac{1}{2} C V^2}$$

$$= \frac{1}{2} C E^2 d^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \underbrace{Ad}_{Vol}$$



$$V = \frac{Q}{C}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$E = \frac{V}{d}$$

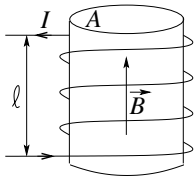
- ▶ Densitatea de energie câmp electric:  $u_E = \frac{W_E}{Vol} = \frac{W_E}{Ad} = \boxed{\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2}$  (22)

- ▶ Energia câmpului magnetic (în solenoid).

Faraday  $dW_B = P dt = V I dt$

$$V = N \frac{d\phi}{dt} = N A \frac{dB}{dt} = \underbrace{\mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}}_L \frac{dI}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

$$W_B = \int_0^I V I dt = \int_0^I L I dI = \boxed{\frac{1}{2} L I^2} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \frac{\ell^2 B^2}{\mu_0^2 N^2}$$



$$V = N \frac{d\phi}{dt}$$

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}$$

$$B = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$$

- ▶ Densitatea de energie câmp magnetic:  $u_B = \frac{W_B}{Vol} = \frac{W_B}{Al} = \boxed{\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}}$  (23)

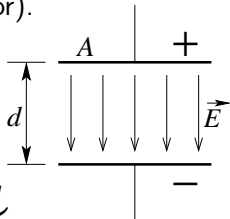
## Energia câmpului electric și magnetic

- Energia câmpului electric (în condensator).

$$dW_E = V dq$$

$$W_E = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \boxed{\frac{1}{2} C V^2}$$

$$= \frac{1}{2} C E^2 d^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \underbrace{A d}_{Vol}$$



$$V = \frac{Q}{C}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$E = \frac{V}{d}$$

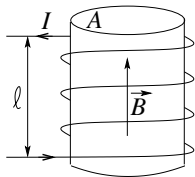
- Densitatea de energie câmp electric:  $u_E = \frac{W_E}{Vol} = \frac{W_E}{A d} = \boxed{\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2}$  (22)

- Energia câmpului magnetic (în solenoid).

Faraday  $dW_B = P dt = V I dt$

$$V = N \frac{d\phi}{dt} = N A \frac{dB}{dt} = \underbrace{\mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}}_L \frac{dI}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

$$W_B = \int_0^I V I dt = \int_0^I L I dI = \boxed{\frac{1}{2} L I^2} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \frac{\ell^2 B^2}{\mu_0^2 N^2}$$



$$V = N \frac{d\phi}{dt}$$

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}$$

$$B = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$$

- Densitatea de energie câmp magnetic:  $u_B = \frac{W_B}{Vol} = \frac{W_B}{A \ell} = \boxed{\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}}$  (23)

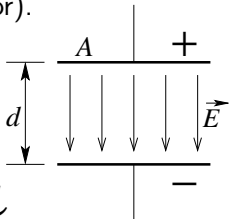
## Energia câmpului electric și magnetic

- ▶ Energia câmpului electric (în condensator).

$$dW_E = V dq$$

$$W_E = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \boxed{\frac{1}{2} C V^2}$$

$$= \frac{1}{2} C E^2 d^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \underbrace{A d}_{Vol}$$



$$V = \frac{Q}{C}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$E = \frac{V}{d}$$

- ▶ Densitatea de energie câmp electric:

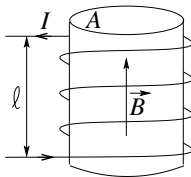
$$u_E = \frac{W_E}{Vol} = \frac{W_E}{A d} = \boxed{\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2} \quad (22)$$

- ▶ Energia câmpului magnetic (în solenoid).

Faraday  $dW_B = P dt = V I dt$

$$V = N \frac{d\phi}{dt} = N A \frac{dB}{dt} = \underbrace{\mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}}_L \frac{dI}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

$$W_B = \int_0^t V I dt = \int_0^I L I dI = \boxed{\frac{1}{2} L I^2} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \frac{\ell^2 B^2}{\mu_0^2 N^2}$$



$$V = N \frac{d\phi}{dt}$$

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}$$

$$B = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$$

- ▶ Densitatea de energie câmp magnetic:

$$u_B = \frac{W_B}{Vol} = \frac{W_B}{A \ell} = \boxed{\frac{1}{2} \mu_0 B^2} \quad (23)$$

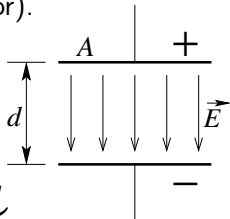
## Energia câmpului electric și magnetic

- ▶ Energia câmpului electric (în condensator).

$$dW_E = V dq$$

$$W_E = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \boxed{\frac{1}{2} C V^2}$$

$$= \frac{1}{2} C E^2 d^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \underbrace{A d}_{Vol}$$



$$V = \frac{Q}{C}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$E = \frac{V}{d}$$

- ▶ Densitatea de energie câmp electric:

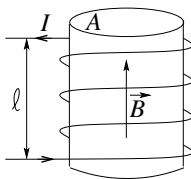
$$u_E = \frac{W_E}{Vol} = \frac{W_E}{A d} = \boxed{\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2} \quad (22)$$

- ▶ Energia câmpului magnetic (în solenoid).

Faraday  $dW_B = P dt = V I dt$

$$V = N \frac{d\phi}{dt} = N A \frac{dB}{dt} = \underbrace{\mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}}_L \frac{dI}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

$$W_B = \int_0^I V I dt = \int_0^I L I dl = \boxed{\frac{1}{2} L I^2} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \frac{\ell^2 B^2}{\mu_0^2 N^2}$$



$$V = N \frac{d\phi}{dt}$$

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}$$

$$B = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$$

- ▶ Densitatea de energie câmp magnetic:

$$u_B = \frac{W_B}{Vol} = \frac{W_B}{A \ell} = \boxed{\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}} \quad (23)$$

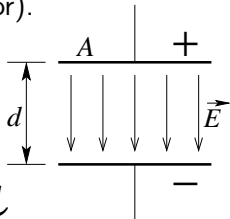
## Energia câmpului electric și magnetic

- ▶ Energia câmpului electric (în condensator).

$$dW_E = V dq$$

$$W_E = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \boxed{\frac{1}{2} C V^2}$$

$$= \frac{1}{2} C E^2 d^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \underbrace{A d}_{Vol}$$



$$V = \frac{Q}{C}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$E = \frac{V}{d}$$

- ▶ Densitatea de energie câmp electric:

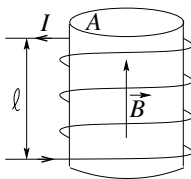
$$u_E = \frac{W_E}{Vol} = \frac{W_E}{A d} = \boxed{\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2} \quad (22)$$

- ▶ Energia câmpului magnetic (în solenoid).

$$\text{Faraday} \quad dW_B = P dt = V I dt$$

$$V = N \frac{d\phi}{dt} = N A \frac{dB}{dt} = \underbrace{\mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}}_L \frac{dI}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

$$W_B = \int_0^I V I dt = \int_0^I L I dl = \boxed{\frac{1}{2} L I^2} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \frac{\ell^2 B^2}{\mu_0^2 N^2}$$



$$V = N \frac{d\phi}{dt}$$

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}$$

$$B = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$$

- ▶ Densitatea de energie câmp magnetic:

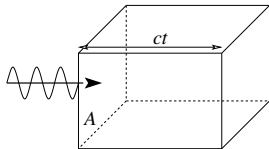
$$u_B = \frac{W_B}{Vol} = \frac{W_B}{A \ell} = \boxed{\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}} \quad (23)$$

## Intensitatea undelor electromagnetice

- ▶ Intensitatea undelor EM măsoară energia transportată medie pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp, cu densitatea de energie electrică  $u_E$  și magnetică  $u_B$ :

$$u_E = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \quad (22)$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (23)$$



- ▶ Soluția de undă plană pentru componentele electrică  $\vec{E}$  și magnetică  $\vec{B}$ , este de forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(kx - \omega t)$$

- ▶ Densitatea totală de energie transportată este  $u = u_E + u_B$ :

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E B c \quad (\text{deoarece } B = E/c \text{ iar } c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0))$$

- ▶ Energia totală transportată prin suprafața  $A$  în timpul  $t$  se află în volumul cu aria  $A$  și lungimea  $ct$  (vezi Fig.):  $W = u A ct = \epsilon_0 E B c A ct = \frac{E B}{\mu_0} A t$

- ▶ Energia totală transportată pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp, este

$$S \equiv \frac{W}{A t} = \frac{E B}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{c B^2}{\mu_0} \quad \text{și definește vectorul Poynting: } \vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad (24)$$

- ▶ Energia transportată medie (pe unul sau mai multe cicluri de oscilație) este proporțională cu  $\langle E^2 \rangle$  sau  $\langle B^2 \rangle$ . Deoarece  $\langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle = 1/2$ , atunci

$$\langle E^2 \rangle = E_0^2/2 \quad \text{și} \quad \langle B^2 \rangle = B_0^2/2$$

- ▶ Intensitatea undelor EM va fi

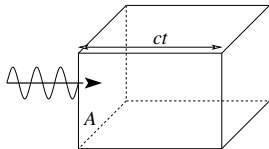
$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2} \frac{c B_0^2}{\mu_0} \quad (25)$$

# Intensitatea undelor electromagnetice

- ▶ Intensitatea undelor EM măsoară energia transportată medie pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp, cu densitatea de energie electrică  $u_E$  și magnetică  $u_B$ :

$$u_E = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \quad (22)$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (23)$$



- ▶ Soluția de undă plană pentru componentele electrică  $\vec{E}$  și magnetică  $\vec{B}$ , este de forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(kx - \omega t)$$

- ▶ Densitatea totală de energie transportată este  $u = u_E + u_B$ :

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E B c \quad (\text{deoarece } B = E/c \text{ iar } c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0))$$

- ▶ Energia totală transportată prin suprafața  $A$  în timpul  $t$  se află în volumul cu aria  $A$  și lungimea  $ct$  (vezi Fig.):  $W = u A ct = \epsilon_0 E B c A ct = \frac{E B}{\mu_0} A t$

- ▶ Energia totală transportată pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp, este

$$S \equiv \frac{W}{A t} = \frac{E B}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{c B^2}{\mu_0} \quad \text{și definește vectorul Poynting: } \vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad (24)$$

- ▶ Energia transportată medie (pe unul sau mai multe cicluri de oscilație) este proporțională cu  $\langle E^2 \rangle$  sau  $\langle B^2 \rangle$ . Deoarece  $\langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle = 1/2$ , atunci

$$\langle E^2 \rangle = E_0^2/2 \quad \text{și} \quad \langle B^2 \rangle = B_0^2/2$$

- ▶ Intensitatea undelor EM va fi

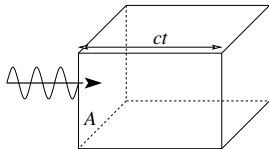
$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2} \frac{c B_0^2}{\mu_0} \quad (25)$$

## Intensitatea undelor electromagnetice

- ▶ Intensitatea undelor EM măsoară energia transportată medie pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp, cu densitatea de energie electrică  $u_E$  și magnetică  $u_B$ :

$$u_E = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \quad (22)$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (23)$$



- ▶ Soluția de undă plană pentru componentele electrică  $\vec{E}$  și magnetică  $\vec{B}$ , este de forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(kx - \omega t)$$

- ▶ Densitatea totală de energie transportată este  $u = u_E + u_B$ :

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E B c \quad (\text{deoarece } B = E/c \text{ iar } c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0))$$

- ▶ Energia totală transportată prin suprafața  $A$  în timpul  $t$  se află în volumul cu aria  $A$  și lungimea  $ct$  (vezi Fig.):  $W = u A ct = \epsilon_0 E B c A ct = \frac{EB}{\mu_0} At$
- ▶ Energia totală transportată pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp, este

$$S \equiv \frac{W}{At} = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{c B^2}{\mu_0} \quad \text{și definește vectorul Poynting: } \vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad (24)$$

- ▶ Energia transportată medie (pe unul sau mai multe cicluri de oscilație) este proporțională cu  $\langle E^2 \rangle$  sau  $\langle B^2 \rangle$ . Deoarece  $\langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle = 1/2$ , atunci  $\langle E^2 \rangle = E_0^2/2$  și  $\langle B^2 \rangle = B_0^2/2$

- ▶ Intensitatea undelor EM va fi

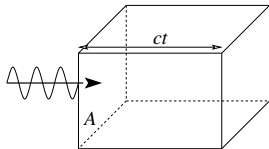
$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2} \frac{c B_0^2}{\mu_0} \quad (25)$$

## Intensitatea undelor electromagnetice

- ▶ Intensitatea undelor EM măsoară energia transportată medie pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp, cu densitatea de energie electrică  $u_E$  și magnetică  $u_B$ :

$$u_E = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \quad (22)$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (23)$$



- ▶ Soluția de undă plană pentru componentele electrică  $\vec{E}$  și magnetică  $\vec{B}$ , este de forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(kx - \omega t)$$

- ▶ Densitatea totală de energie transportată este  $u = u_E + u_B$ :

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E B c \quad (\text{deoarece } B = E/c \text{ iar } c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0))$$

- ▶ Energia totală transportată prin suprafața  $A$  în timpul  $t$  se află în volumul cu aria  $A$  și lungimea  $ct$  (vezi Fig.):  $W = u A ct = \epsilon_0 E B c A ct = \frac{E B}{\mu_0} A t$

- ▶ Energia totală transportată pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp, este

$$S \equiv \frac{W}{A t} = \frac{E B}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{c B^2}{\mu_0} \quad \text{și definește vectorul Poynting: } \vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad (24)$$

- ▶ Energia transportată medie (pe unul sau mai multe cicluri de oscilație) este proporțională cu  $\langle E^2 \rangle$  sau  $\langle B^2 \rangle$ . Deoarece  $\langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle = 1/2$ , atunci

$$\langle E^2 \rangle = E_0^2/2 \quad \text{și} \quad \langle B^2 \rangle = B_0^2/2$$

- ▶ Intensitatea undelor EM va fi

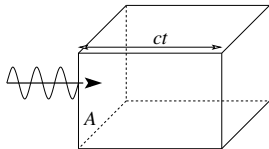
$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2} \frac{c B_0^2}{\mu_0} \quad (25)$$

## Intensitatea undelor electromagnetice

- ▶ Intensitatea undelor EM măsoară energia transportată medie pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp, cu densitatea de energie electrică  $u_E$  și magnetică  $u_B$ :

$$u_E = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \quad (22)$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (23)$$



- ▶ Soluția de undă plană pentru componentele electrică  $\vec{E}$  și magnetică  $\vec{B}$ , este de forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(kx - \omega t)$$

- ▶ Densitatea totală de energie transportată este  $u = u_E + u_B$ :

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E B c \quad (\text{deoarece } B = E/c \text{ iar } c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0))$$

- ▶ Energia totală transportată prin suprafața  $A$  în timpul  $t$  se află în volumul cu aria  $A$  și lungimea  $ct$  (vezi Fig.):  $W = u A ct = \epsilon_0 E B c A ct = \frac{EB}{\mu_0} At$

- ▶ Energia totală transportată pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp, este

$$S \equiv \frac{W}{At} = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{c B^2}{\mu_0} \quad \text{și definește vectorul Poynting: } \vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad (24)$$

- ▶ Energia transportată medie (pe unul sau mai multe cicluri de oscilație) este proporțională cu  $\langle E^2 \rangle$  sau  $\langle B^2 \rangle$ . Deoarece  $\langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle = 1/2$ , atunci

$$\langle E^2 \rangle = E_0^2/2 \quad \text{și} \quad \langle B^2 \rangle = B_0^2/2$$

- ▶ Intensitatea undelor EM va fi

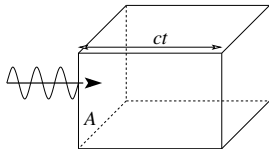
$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2} \frac{c B_0^2}{\mu_0} \quad (25)$$

## Intensitatea undelor electromagnetice

- ▶ Intensitatea undelor EM măsoară energia transportată medie pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp, cu densitatea de energie electrică  $u_E$  și magnetică  $u_B$ :

$$u_E = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \quad (22)$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (23)$$



- ▶ Soluția de undă plană pentru componentele electrică  $\vec{E}$  și magnetică  $\vec{B}$ , este de forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(kx - \omega t)$$

- ▶ Densitatea totală de energie transportată este  $u = u_E + u_B$ :

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E B c \quad (\text{deoarece } B = E/c \text{ iar } c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0))$$

- ▶ Energia totală transportată prin suprafața  $A$  în timpul  $t$  se află în volumul cu aria  $A$  și lungimea  $ct$  (vezi Fig.):  $W = u A ct = \epsilon_0 E B c A ct = \frac{E B}{\mu_0} A t$

- ▶ **Energia totală transportată pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp, este**

$$S \equiv \frac{W}{A t} = \frac{E B}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{c B^2}{\mu_0} \quad \text{și definește vectorul Poynting: } \vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad (24)$$

- ▶ Energia transportată medie (pe unul sau mai multe cicluri de oscilație) este proporțională cu  $\langle E^2 \rangle$  sau  $\langle B^2 \rangle$ . Deoarece  $\langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle = 1/2$ , atunci

$$\langle E^2 \rangle = E_0^2/2 \quad \text{și} \quad \langle B^2 \rangle = B_0^2/2$$

- ▶ Intensitatea undelor EM va fi

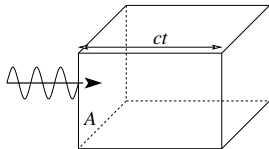
$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2} \frac{c B_0^2}{\mu_0} \quad (25)$$

## Intensitatea undelor electromagnetice

- ▶ Intensitatea undelor EM măsoară energia transportată medie pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp, cu densitatea de energie electrică  $u_E$  și magnetică  $u_B$ :

$$u_E = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \quad (22)$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (23)$$



- ▶ Soluția de undă plană pentru componentele electrică  $\vec{E}$  și magnetică  $\vec{B}$ , este de forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(kx - \omega t)$$

- ▶ Densitatea totală de energie transportată este  $u = u_E + u_B$ :

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E B c \quad (\text{deoarece } B = E/c \text{ iar } c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0))$$

- ▶ Energia totală transportată prin suprafața  $A$  în timpul  $t$  se află în volumul cu aria  $A$  și lungimea  $ct$  (vezi Fig.):  $W = u A ct = \epsilon_0 E B c A ct = \frac{E B}{\mu_0} A t$

- ▶ Energia totală transportată pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp, este

$$S \equiv \frac{W}{A t} = \frac{E B}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{c B^2}{\mu_0} \quad \text{și definește vectorul Poynting: } \vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad (24)$$

- ▶ Energia transportată medie (pe unul sau mai multe cicluri de oscilație) este proporțională cu  $\langle E^2 \rangle$  sau  $\langle B^2 \rangle$ . Deoarece  $\langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle = 1/2$ , atunci  $\langle E^2 \rangle = E_0^2/2$  și  $\langle B^2 \rangle = B_0^2/2$

- ▶ Intensitatea undelor EM va fi

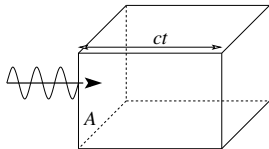
$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2} \frac{c B_0^2}{\mu_0} \quad (25)$$

## Intensitatea undelor electromagnetice

- ▶ Intensitatea undelor EM măsoară energia transportată medie pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp, cu densitatea de energie electrică  $u_E$  și magnetică  $u_B$ :

$$u_E = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \quad (22)$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (23)$$



- ▶ Soluția de undă plană pentru componentele electrică  $\vec{E}$  și magnetică  $\vec{B}$ , este de forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(kx - \omega t)$$

- ▶ Densitatea totală de energie transportată este  $u = u_E + u_B$ :

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E B c \quad (\text{deoarece } B = E/c \text{ iar } c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0))$$

- ▶ Energia totală transportată prin suprafața  $A$  în timpul  $t$  se află în volumul cu aria  $A$  și lungimea  $ct$  (vezi Fig.):  $W = u A ct = \epsilon_0 E B c A ct = \frac{E B}{\mu_0} A t$

- ▶ Energia totală transportată pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp, este

$$S \equiv \frac{W}{A t} = \frac{E B}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{c B^2}{\mu_0} \quad \text{și definește vectorul Poynting: } \vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad (24)$$

- ▶ Energia transportată medie (pe unul sau mai multe cicluri de oscilație) este proporțională cu  $\langle E^2 \rangle$  sau  $\langle B^2 \rangle$ . Deoarece  $\langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle = 1/2$ , atunci

$$\langle E^2 \rangle = E_0^2/2 \quad \text{și} \quad \langle B^2 \rangle = B_0^2/2$$

- ▶ Intensitatea undelor EM va fi

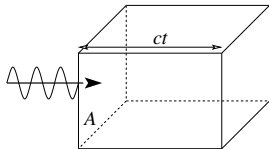
$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2} \frac{c B_0^2}{\mu_0} \quad (25)$$

## Intensitatea undelor electromagnetice

- ▶ Intensitatea undelor EM măsoară energia transportată medie pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp, cu densitatea de energie electrică  $u_E$  și magnetică  $u_B$ :

$$u_E = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \quad (22)$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (23)$$



- ▶ Soluția de undă plană pentru componentele electrică  $\vec{E}$  și magnetică  $\vec{B}$ , este de forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(kx - \omega t)$$

- ▶ Densitatea totală de energie transportată este  $u = u_E + u_B$ :

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E B c \quad (\text{deoarece } B = E/c \text{ iar } c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0))$$

- ▶ Energia totală transportată prin suprafața  $A$  în timpul  $t$  se află în volumul cu aria  $A$  și lungimea  $ct$  (vezi Fig.):  $W = u A ct = \epsilon_0 E B c A ct = \frac{E B}{\mu_0} A t$

- ▶ Energia totală transportată pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp, este

$$S \equiv \frac{W}{A t} = \frac{E B}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{c B^2}{\mu_0} \quad \text{și definește vectorul Poynting: } \vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad (24)$$

- ▶ Energia transportată medie (pe unul sau mai multe cicluri de oscilație) este proporțională cu  $\langle E^2 \rangle$  sau  $\langle B^2 \rangle$ . Deoarece  $\langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle = 1/2$ , atunci

$$\langle E^2 \rangle = E_0^2/2 \quad \text{și} \quad \langle B^2 \rangle = B_0^2/2$$

- ▶ Intensitatea undelor EM va fi

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2} \frac{c B_0^2}{\mu_0} \quad (25)$$

**Thank you**