

# Teoria Relativității Specială

M. Penția

IFIN-HH, Departament Fizică Nucleară,  
P.O.Box MG-6, 077125, București-Măgurele, ROMANIA.  
e-mail: [pentia@nipne.ro](mailto:pentia@nipne.ro)

October 5, 2019

# *Teoria Relativității Specială*

*Dr. Mircea Penția*

*5 Octombrie 2019*

<https://indico.eli-np.ro/event/74/>

Pentru sesiunea de întrebări și răspunsuri  
vă rugăm să descărcați aplicația sli.do  
din App Store sau Google Play  
sli.do sau [www.slido.com](http://www.slido.com)

sli.do

COD EVENIMENT

#3387

# Partea I

## Teoria Relativității Specială

# Teoria Relativității Specială

## Postulatele Teoriei Relativității Speciale

### Relativitatea timpului

Călătorie cosmică (paradoxul gemenilor)

Semnal luminos din navă cosmică

Diagrama Minkowski

Transformarea relativistă a spațiu-timpului

Simultaneitatea

Călătorie cosmică (paradoxul gemenilor)

### Timpul și Spațiul într-un Sistem de Referință în mișcare

Dilatarea timpului

Contractia lungimii

### Transformarea Lorentz

Transformarea Lorentz de coordonate și timp

Transformarea Lorentz 4-dimensională

### Spațiul Minkowski

Intervalul spațio-temporal

### Energia și impulsul relativiste

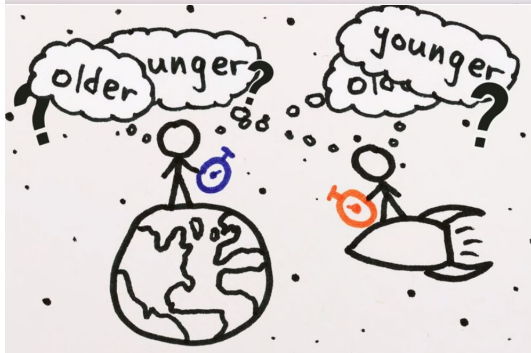
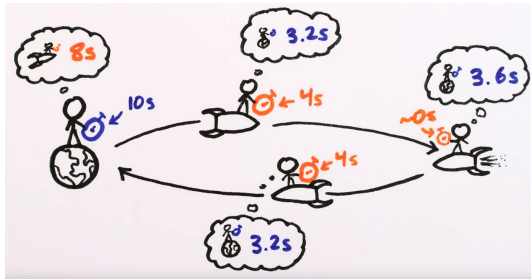
Energia și impulsul relativiste

### Probleme

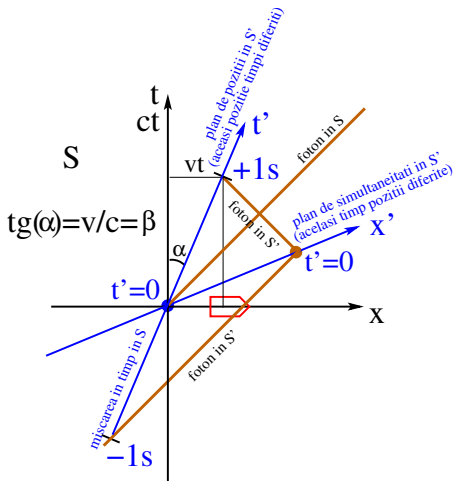
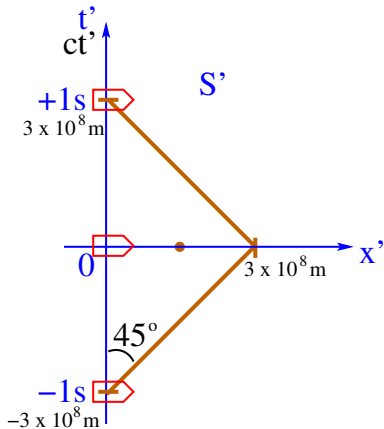
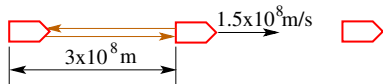
# Postulatele Teoriei Relativității Speciale

1. Principiul relativității: Legile fizicii sunt aceleași în orice sistem de referință inerțial (SRI).
2. Invarianța vitezei luminii: În orice sistem de referință inerțial, în vid, lumina se propagă cu aceeași viteză  $c$  independent de starea de mișcare a emițătorului.

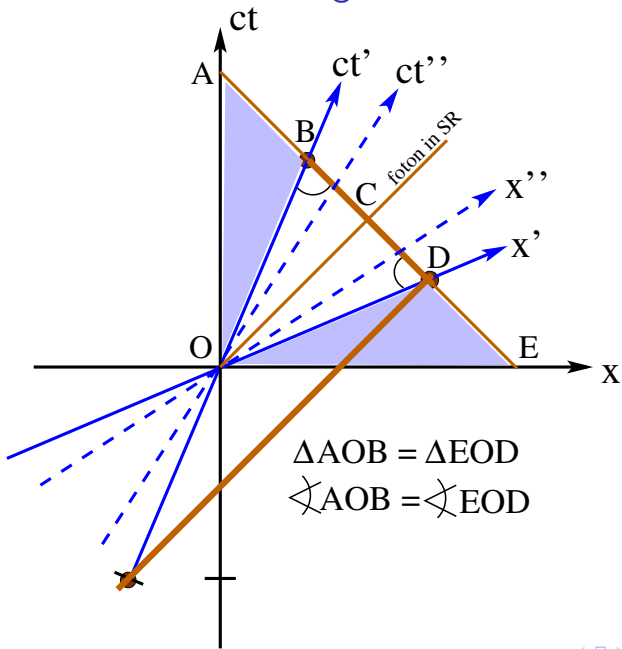
# Călătorie cosmică (paradoxul gemenilor)



# Semnal luminos din navă cosmică



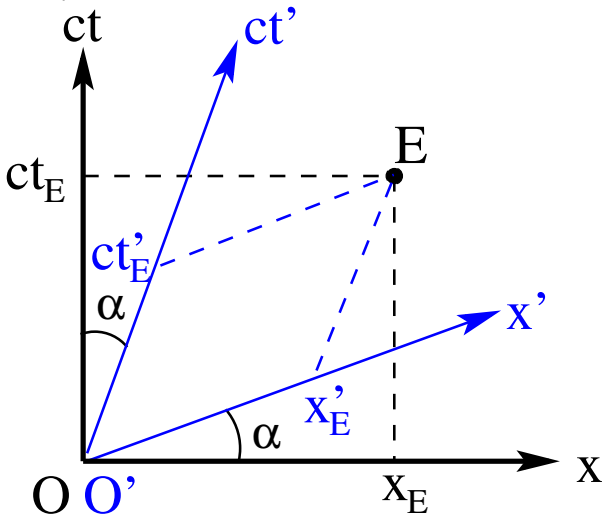
# Diagrama Minkowski



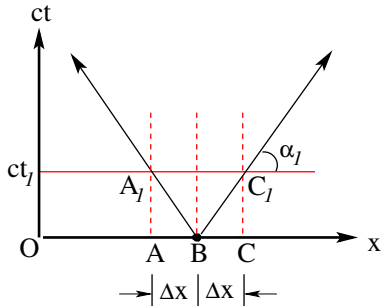
Cu cât  $S'$  are viteză mai mare față de  $S$  cu atât deschiderea  $x' - ct'$  (unghiul  $DOB$ ) se îngustează.

## Transformarea relativistă a spațiu-timpului

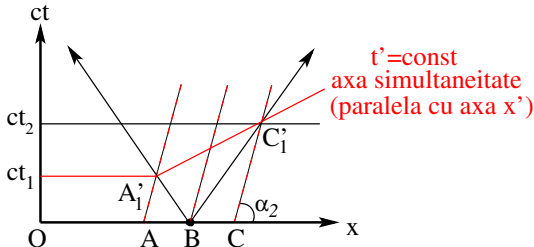
Schimbarea vitezei  $S'$  duce la rotirea  $\alpha$  a planului  $O'-x'$  de timp constant (simultaneitate) și  $O'-ct'$  de poziție constantă a  $S'$  față de  $S$  în repaus.



# Simultaneitatea

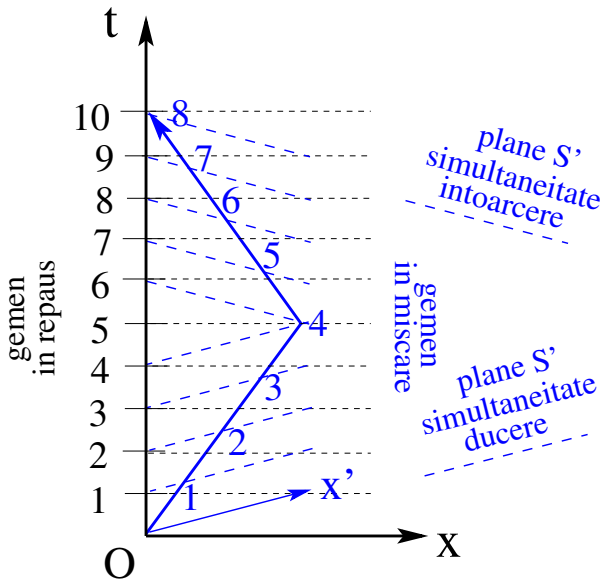


În  $B$  se dă un puls de lumină, care în  $S$  în repaus ajunge simultan în  $A$  și  $C$ .



Lumina pornită din  $B'$  simultan cu  $B$ , din  $S'$  aflat în mișcare cu viteza  $v$ , văzut din  $S$  ajunge mai repede în  $A$ , care îi vine în întâmpinare și mai târziu în  $C'$ . Dar văzut din  $S'$  vor fi tot simultane, axa de simultaneitate  $t' = \text{const}$ .

# Călătorie cosmică (paradoxul gemenilor)

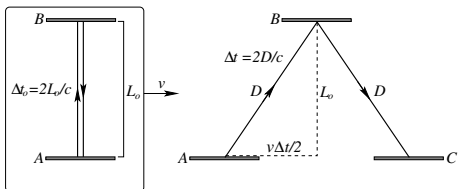


## Dilatarea timpului

- ▶ Un ceas, aflat într-un tren ce se mișcă cu viteza  $v$ , măsoară timpul  $\Delta t_0$  de propagare a luminii între două oglinzi  $A$  și  $B$  plasate vertical la distanța  $L_0$

In SR propriu  
(tren):

$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$



In SR peron:

$$\Delta t = \frac{2D}{c} \text{ unde}$$

$$D = \sqrt{\left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + L_0^2}$$

- ▶  $\Delta t$  din SR al peronului, se poate scrie prin  $\Delta t_0$  dacă înlocuim  $D$  de mai sus și exprimăm  $\Delta t^2 = 4D^2/c^2 = (v^2\Delta t^2 + 4L_0^2)/c^2$  sau  $\Delta t^2(c^2 - v^2) = 4L_0^2$  sau  $\Delta t^2(1 - v^2/c^2) = 4L_0^2/c^2$  adică,

$$\Delta t = \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1)$$

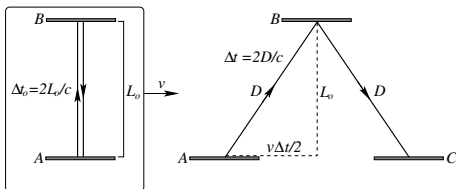
care exprimă *dilatarea timpului* ( $\Delta t > \Delta t_0$ )

## Dilatarea timpului

- Un ceas, aflat într-un tren ce se mișcă cu viteza  $v$ , măsoară timpul  $\Delta t_0$  de propagare a luminii între două oglinzi  $A$  și  $B$  plasate vertical la distanța  $L_0$

In SR propriu  
(tren):

$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$



In SR peron:

$$\Delta t = \frac{2D}{c} \text{ unde}$$

$$D = \sqrt{\left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + L_0^2}$$

- $\Delta t$  din SR al peronului, se poate scrie prin  $\Delta t_0$  dacă înlocuim  $D$  de mai sus și exprimăm  $\Delta t^2 = 4D^2/c^2 = (v^2\Delta t^2 + 4L_0^2)/c^2$  sau  $\Delta t^2(c^2 - v^2) = 4L_0^2$  sau  $\Delta t^2(1 - v^2/c^2) = 4L_0^2/c^2$  adică,

$$\Delta t = \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1)$$

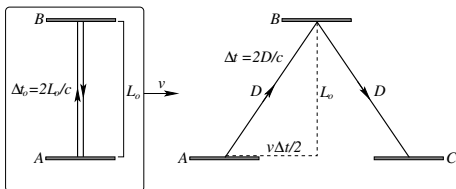
care exprimă *dilatarea timpului* ( $\Delta t > \Delta t_0$ )

## Dilatarea timpului

- Un ceas, aflat într-un tren ce se mișcă cu viteza  $v$ , măsoară timpul  $\Delta t_0$  de propagare a luminii între două oglinzi  $A$  și  $B$  plasate vertical la distanța  $L_0$

In SR propriu  
(tren):

$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$



In SR peron:

$$\Delta t = \frac{2D}{c} \text{ unde}$$

$$D = \sqrt{\left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + L_0^2}$$

- $\Delta t$  din SR al peronului, se poate scrie prin  $\Delta t_0$  dacă înlocuim  $D$  de mai sus și exprimăm  $\Delta t^2 = 4D^2/c^2 = (v^2\Delta t^2 + 4L_0^2)/c^2$  sau  $\Delta t^2(c^2 - v^2) = 4L_0^2$  sau  $\Delta t^2(1 - v^2/c^2) = 4L_0^2/c^2$  adică,

$$\Delta t = \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1)$$

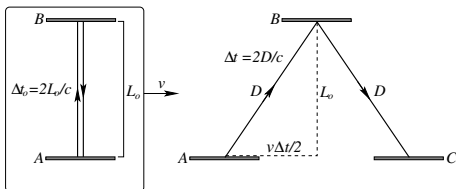
care exprimă *dilatarea timpului* ( $\Delta t > \Delta t_0$ )

## Dilatarea timpului

- Un ceas, aflat într-un tren ce se mișcă cu viteza  $v$ , măsoară timpul  $\Delta t_0$  de propagare a luminii între două oglinzi  $A$  și  $B$  plasate vertical la distanța  $L_0$

In SR propriu  
(tren):

$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$



In SR peron:

$$\Delta t = \frac{2D}{c} \text{ unde}$$

$$D = \sqrt{\left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + L_0^2}$$

- $\Delta t$  din SR al peronului, se poate scrie prin  $\Delta t_0$  dacă înlocuim  $D$  de mai sus și exprimăm  $\Delta t^2 = 4D^2/c^2 = (v^2\Delta t^2 + 4L_0^2)/c^2$  sau  $\Delta t^2(c^2 - v^2) = 4L_0^2$  sau  $\Delta t^2(1 - v^2/c^2) = 4L_0^2/c^2$  adică,

$$\Delta t = \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1)$$

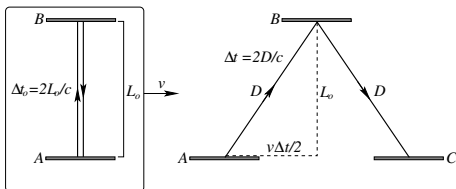
care exprimă *dilatarea timpului* ( $\Delta t > \Delta t_0$ )

## Dilatarea timpului

- Un ceas, aflat într-un tren ce se mișcă cu viteza  $v$ , măsoară timpul  $\Delta t_0$  de propagare a luminii între două oglinzi  $A$  și  $B$  plasate vertical la distanța  $L_0$

In SR propriu  
(tren):

$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$



In SR peron:

$$\Delta t = \frac{2D}{c} \text{ unde}$$

$$D = \sqrt{\left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + L_0^2}$$

- $\Delta t$  din SR al peronului, se poate scrie prin  $\Delta t_0$  dacă înlocuim  $D$  de mai sus și exprimăm  $\Delta t^2 = 4D^2/c^2 = (v^2\Delta t^2 + 4L_0^2)/c^2$  sau  $\Delta t^2(c^2 - v^2) = 4L_0^2$  sau  $\Delta t^2(1 - v^2/c^2) = 4L_0^2/c^2$  adică,

$$\Delta t = \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1)$$

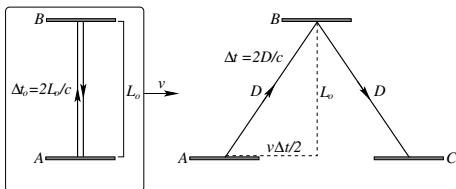
care exprimă *dilatarea timpului* ( $\Delta t > \Delta t_0$ )

## Dilatarea timpului

- Un ceas, aflat într-un tren ce se mișcă cu viteza  $v$ , măsoară timpul  $\Delta t_0$  de propagare a luminii între două oglinzi  $A$  și  $B$  plasate vertical la distanța  $L_0$

In SR propriu  
(tren):

$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$



In SR peron:

$$\Delta t = \frac{2D}{c} \text{ unde}$$

$$D = \sqrt{\left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + L_0^2}$$

- $\Delta t$  din SR al peronului, se poate scrie prin  $\Delta t_0$  dacă înlocuim  $D$  de mai sus și exprimăm  $\Delta t^2 = 4D^2/c^2 = (v^2\Delta t^2 + 4L_0^2)/c^2$  sau  $\Delta t^2(c^2 - v^2) = 4L_0^2$  sau  $\Delta t^2(1 - v^2/c^2) = 4L_0^2/c^2$  adică,

$$\Delta t = \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1)$$

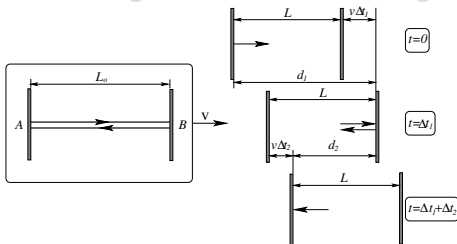
care exprimă *dilatarea timpului* ( $\Delta t > \Delta t_0$ )

## Contractia lungimii

- Să considerăm același ceas măsurând de data asta timpul parcurs de lumină între două oglinzi orientate de-a lungul mișcării trenului,

In SR propriu  
(tren):

$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$



In SR peron:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

Pentru peron, distanța  $d_1 = L + v\Delta t_1 = c\Delta t_1$ , de unde  $\Delta t_1 = L/(c - v)$

La întoarcere, distanța  $d_2 = L - v\Delta t_2 = c\Delta t_2$ , de unde  $\Delta t_2 = L/(c + v)$

Timpul total va fi  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$

Egalând cele două relații pentru  $\Delta t$ :  $\frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$  de unde,

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

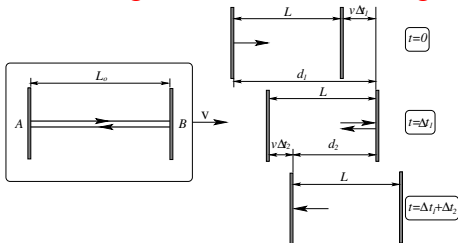
care exprimă *contractia lungimii* ( $L < L_0$ ).

## Contractia lungimii

- Să considerăm același ceas măsurând de data asta timpul parcurs de lumină între două oglinzi orientate de-a lungul mișcării trenului,

In SR propriu  
(tren):

$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$



In SR peron:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

Pentru peron, distanța  $d_1 = L + v\Delta t_1 = c\Delta t_1$ , de unde  $\Delta t_1 = L/(c - v)$

La întoarcere, distanța  $d_2 = L - v\Delta t_2 = c\Delta t_2$ , de unde  $\Delta t_2 = L/(c + v)$

Timpul total va fi  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$

Egalând cele două relații pentru  $\Delta t$ :  $\frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$  de unde,

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

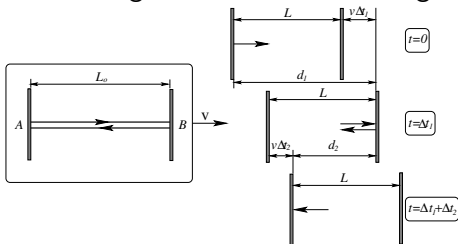
care exprimă *contractia lungimii* ( $L < L_0$ ).

## Contractia lungimii

- ▶ Să considerăm același ceas măsurând de data asta timpul parcurs de lumină între două oglinzi orientate de-a lungul mișcării trenului,

In SR propriu  
(tren):

$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$



In SR peron:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\end{aligned}$$

Pentru peron, distanța  $d_1 = L + v\Delta t_1 = c\Delta t_1$ , de unde  $\Delta t_1 = L/(c - v)$

La întoarcere, distanța  $d_2 = L - v\Delta t_2 = c\Delta t_2$ , de unde  $\Delta t_2 = L/(c + v)$

Timpul total va fi  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$

Egalând cele două relații pentru  $\Delta t$ :  $\frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$  de unde,

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

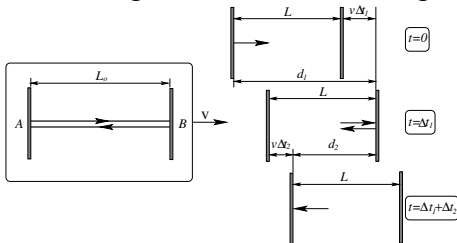
care exprimă *contractia lungimii* ( $L < L_0$ ).

## Contractia lungimii

- Să considerăm același ceas măsurând de data asta timpul parcurs de lumină între două oglinzi orientate de-a lungul mișcării trenului,

In SR propriu  
(tren):

$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$



In SR peron:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

Pentru peron, distanța  $d_1 = L + v\Delta t_1 = c\Delta t_1$ , de unde  $\Delta t_1 = L/(c - v)$

La întoarcere, distanța  $d_2 = L - v\Delta t_2 = c\Delta t_2$ , de unde  $\Delta t_2 = L/(c + v)$

Timpul total va fi  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$

Egalând cele două relații pentru  $\Delta t$ :  $\frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$  de unde,

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

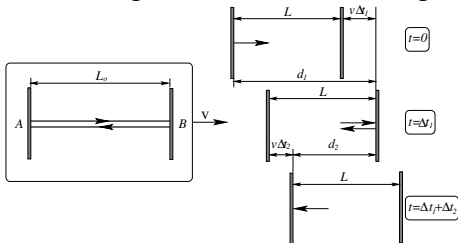
care exprimă *contractia lungimii* ( $L < L_0$ ).

## Contractia lungimii

- Să considerăm același ceas măsurând de data asta timpul parcurs de lumină între două oglinzi orientate de-a lungul mișcării trenului,

In SR propriu  
(tren):

$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$



In SR peron:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

Pentru peron, distanța  $d_1 = L + v\Delta t_1 = c\Delta t_1$ , de unde  $\Delta t_1 = L/(c - v)$

La întoarcere, distanța  $d_2 = L - v\Delta t_2 = c\Delta t_2$ , de unde  $\Delta t_2 = L/(c + v)$

Timpul total va fi  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$

Egalând cele două relații pentru  $\Delta t$ :  $\frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$  de unde,

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

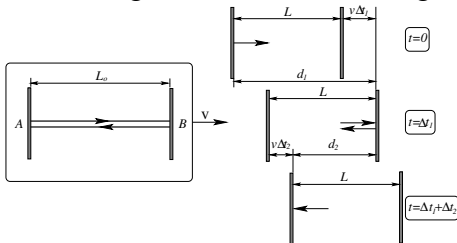
care exprimă *contractia lungimii* ( $L < L_0$ ).

## Contractia lungimii

- Să considerăm același ceas măsurând de data asta timpul parcurs de lumină între două oglinzi orientate de-a lungul mișcării trenului,

In SR propriu  
(tren):

$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$



In SR peron:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

Pentru peron, distanța  $d_1 = L + v\Delta t_1 = c\Delta t_1$ , de unde  $\Delta t_1 = L/(c - v)$

La întoarcere, distanța  $d_2 = L - v\Delta t_2 = c\Delta t_2$ , de unde  $\Delta t_2 = L/(c + v)$

Timpul total va fi  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$

Egalând cele două relații pentru  $\Delta t$ :  $\frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$  de unde,

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

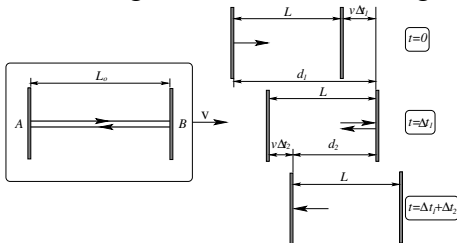
care exprimă *contractia lungimii* ( $L < L_0$ ).

## Contractia lungimii

- Să considerăm același ceas măsurând de data asta timpul parcurs de lumină între două oglinzi orientate de-a lungul mișcării trenului,

In SR propriu  
(tren):

$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$



In SR peron:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

Pentru peron, distanța  $d_1 = L + v\Delta t_1 = c\Delta t_1$ , de unde  $\Delta t_1 = L/(c - v)$

La întoarcere, distanța  $d_2 = L - v\Delta t_2 = c\Delta t_2$ , de unde  $\Delta t_2 = L/(c + v)$

Timpul total va fi  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$

Egalând cele două relații pentru  $\Delta t$ :  $\frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$  de unde,

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

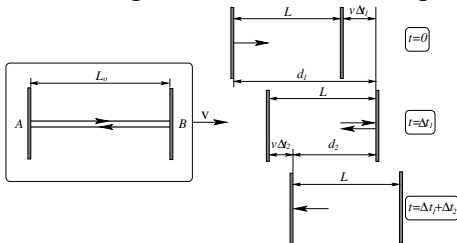
care exprimă *contractia lungimii* ( $L < L_0$ ).

## Contractia lungimii

- Să considerăm același ceas măsurând de data asta timpul parcurs de lumină între două oglinzi orientate de-a lungul mișcării trenului,

In SR propriu  
(tren):

$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$



In SR peron:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

Pentru peron, distanța  $d_1 = L + v\Delta t_1 = c\Delta t_1$ , de unde  $\Delta t_1 = L/(c - v)$

La întoarcere, distanța  $d_2 = L - v\Delta t_2 = c\Delta t_2$ , de unde  $\Delta t_2 = L/(c + v)$

Timpul total va fi  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$

Egalând cele două relații pentru  $\Delta t$ :  $\frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$  de unde,

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

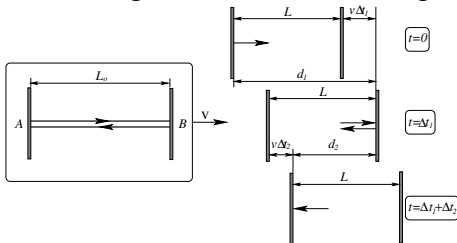
care exprimă *contractia lungimii* ( $L < L_0$ ).

## Contractia lungimii

- Să considerăm același ceas măsurând de data asta timpul parcurs de lumină între două oglinzi orientate de-a lungul mișcării trenului,

In SR propriu  
(tren):

$$\Delta t_0 = \frac{2L_0}{c}$$



In SR peron:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

Pentru peron, distanța  $d_1 = L + v\Delta t_1 = c\Delta t_1$ , de unde  $\Delta t_1 = L/(c - v)$

La întoarcere, distanța  $d_2 = L - v\Delta t_2 = c\Delta t_2$ , de unde  $\Delta t_2 = L/(c + v)$

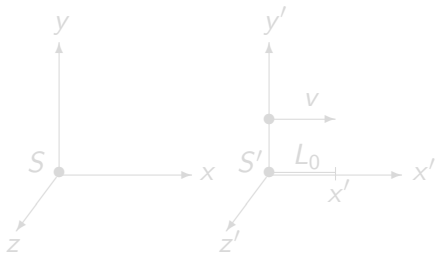
Timpul total va fi  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$

Egalând cele două relații pentru  $\Delta t$ :  $\frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$  de unde,

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

care exprimă *contractia lungimii* ( $L < L_0$ ).

# Transformarea Lorentz de coordonate și timp



- ▶ Dar față de SR fix  $S$ ,  $S'$  se mișcă cu  $v$ . La fel și poziția  $x'$  se mișcă cu viteza  $v$ . Deci,  $x = L + vt = x' \sqrt{1 - v^2/c^2} + vt$

- ▶ Pt. exprimarea inversă a lui  $x$  funcție de  $x'$  și  $t'$ , folosim un raționament similar, dar acum  $S$  se mișcă cu  $-v$  față de  $S'$

- ▶ Exprimarea  $t'$  funcție de  $t$  și  $x$  se obține din (4) și (3), prin eliminarea  $x'$ .

$$x' = x \sqrt{1 - v^2/c^2} - vt' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3)$$

adică:

$\Rightarrow$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4)$$

$\Rightarrow$

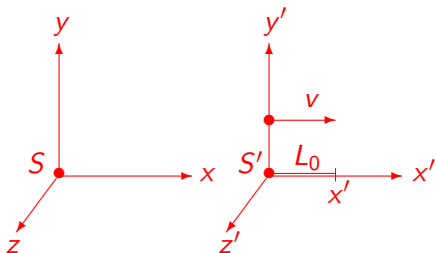
$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (5)$$

Contractția relativistă (2) exprimă lungimea  $L_0 \equiv x' (0 - x')$  din  $S'$  în mișcare, văzută însă din  $S$  în repaus

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

de unde:

# Transformarea Lorentz de coordonate și timp



- ▶ Dar față de SR fix  $S$ ,  $S'$  se mișcă cu  $v$ . La fel și poziția  $x'$  se mișcă cu viteza  $v$ . Deci,  $x = L + vt = x' \sqrt{1 - v^2/c^2} + vt$

- ▶ Pt. exprimarea inversă a lui  $x$  funcție de  $x'$  și  $t'$ , folosim un raționament similar, dar acum  $S$  se mișcă cu  $-v$  față de  $S'$

- ▶ Exprimarea  $t'$  funcție de  $t$  și  $x$  se obține din (4) și (3), prin eliminarea  $x'$ .

$$x' = x \sqrt{1 - v^2/c^2} - vt' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3)$$

adică:

$\Rightarrow$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4)$$

$\Rightarrow$

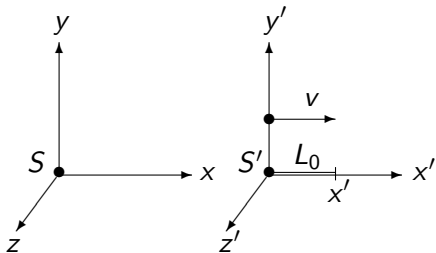
$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (5)$$

Contrația relativistă (2) exprimă lungimea  $L_0 \equiv x' (0 - x')$  din  $S'$  în mișcare, văzută însă din  $S$  în repaus

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

de unde:

# Transformarea Lorentz de coordonate și timp



- ▶ Dar față de SR fix  $S$ ,  $S'$  se mișcă cu  $v$ . La fel și poziția  $x'$  se mișcă cu viteza  $v$ . Deci,  $x = L + vt = x' \sqrt{1 - v^2/c^2} + vt$

- ▶ Pt. exprimarea inversă a lui  $x$  funcție de  $x'$  și  $t'$ , folosim un raționament similar, dar acum  $S$  se mișcă cu  $-v$  față de  $S'$

- ▶ Exprimarea  $t'$  funcție de  $t$  și  $x$  se obține din (4) și (3), prin eliminarea  $x'$ .

$$x' = x \sqrt{1 - v^2/c^2} - vt' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3)$$

adică:

$\Rightarrow$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4)$$

$\Rightarrow$

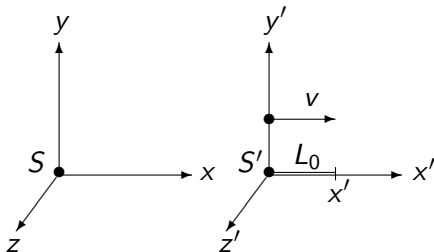
$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (5)$$

Contrația relativistă (2) exprimă lungimea  $L_0 \equiv x' (0 - x')$  din  $S'$  în mișcare, văzută însă din  $S$  în repaus

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

de unde:

# Transformarea Lorentz de coordonate și timp



- ▶ Dar față de SR fix  $S$ ,  $S'$  se mișcă cu  $v$ .  
La fel și poziția  $x'$  se mișcă cu viteza  $v$ .  
Deci,  $x = L + vt = x' \sqrt{1 - v^2/c^2} + vt$

- ▶ Pt. exprimarea inversă a lui  $x$  funcție de  $x'$  și  $t'$ , folosim un raționament similar, dar acum  $S$  se mișcă cu  $-v$  față de  $S'$
- ▶ Exprimarea  $t'$  funcție de  $t$  și  $x$  se obține din (4) și (3), prin eliminarea  $x'$ .

$$x' = x \sqrt{1 - v^2/c^2} - vt' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Contrația relativistă (2) exprimă lungimea  $L_0 \equiv x' (0 - x')$  din  $S'$  în mișcare, văzută însă din  $S$  în repaus

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

de unde:

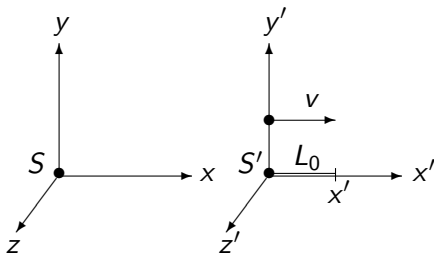
$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3)$$

adică:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4)$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (5)$$

# Transformarea Lorentz de coordonate și timp



- ▶ Dar față de SR fix  $S$ ,  $S'$  se mișcă cu  $v$ .  
La fel și poziția  $x'$  se mișcă cu viteza  $v$ .  
Deci,  $x = L + vt = x' \sqrt{1 - v^2/c^2} + vt$

- ▶ Pt. exprimarea inversă a lui  $x$  funcție de  $x'$  și  $t'$ , folosim un raționament similar, dar acum  $S$  se mișcă cu  $-v$  față de  $S'$

- ▶ Exprimarea  $t'$  funcție de  $t$  și  $x$  se obține din (4) și (3), prin eliminarea  $x'$ .

$$x' = x \sqrt{1 - v^2/c^2} - vt' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3)$$

Contrația relativistă (2) exprimă lungimea  $L_0 \equiv x' (0 - x')$  din  $S'$  în mișcare, văzută însă din  $S$  în repaus

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

de unde:

adică:

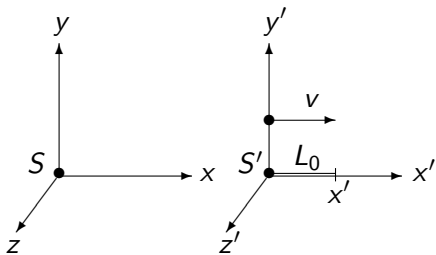
$\Rightarrow$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4)$$

$\Rightarrow$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (5)$$

# Transformarea Lorentz de coordonate și timp



- ▶ Dar față de SR fix  $S$ ,  $S'$  se mișcă cu  $v$ .  
La fel și poziția  $x'$  se mișcă cu viteza  $v$ .  
Deci,  $x = L + vt = x' \sqrt{1 - v^2/c^2} + vt$

- ▶ Pt. exprimarea inversă a lui  $x$  funcție de  $x'$  și  $t'$ , folosim un raționament similar, dar acum  $S$  se mișcă cu  $-v$  față de  $S'$

- ▶ Exprimarea  $t'$  funcție de  $t$  și  $x$  se obține din (4) și (3), prin eliminarea  $x'$ .

$$x' = x \sqrt{1 - v^2/c^2} - vt' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Contrația relativistă (2) exprimă lungimea  $L_0 \equiv x' (0 - x')$  din  $S'$  în mișcare, văzută însă din  $S$  în repaus

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

de unde:

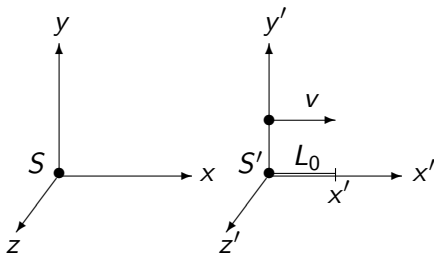
$$\Rightarrow \boxed{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \quad (3)$$

adică:

$$\Rightarrow x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \boxed{t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \quad (5)$$

# Transformarea Lorentz de coordonate și timp



- ▶ Dar față de SR fix  $S$ ,  $S'$  se mișcă cu  $v$ . La fel și poziția  $x'$  se mișcă cu viteza  $v$ . Deci,  $x = L + vt = x' \sqrt{1 - v^2/c^2} + vt$
- ▶ Pt. exprimarea inversă a lui  $x$  funcție de  $x'$  și  $t'$ , folosim un raționament similar, dar acum  $S$  se mișcă cu  $-v$  față de  $S'$

- ▶ Exprimarea  $t'$  funcție de  $t$  și  $x$  se obține din (4) și (3), prin eliminarea  $x'$ .

$$x' = x \sqrt{1 - v^2/c^2} - vt' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3)$$

Contrația relativistă (2) exprimă lungimea  $L_0 \equiv x' (0 - x')$  din  $S'$  în mișcare, văzută însă din  $S$  în repaus

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

de unde:

adică:

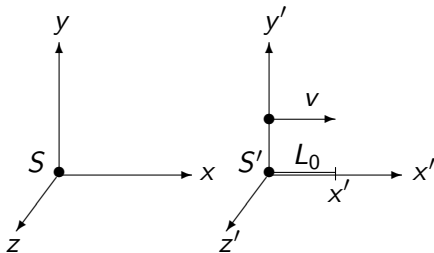
$\Rightarrow$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4)$$

$\Rightarrow$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (5)$$

# Transformarea Lorentz de coordonate și timp



- ▶ Dar față de SR fix  $S$ ,  $S'$  se mișcă cu  $v$ .  
La fel și poziția  $x'$  se mișcă cu viteza  $v$ .  
Deci,  $x = L + vt = x' \sqrt{1 - v^2/c^2} + vt$

- ▶ Pt. exprimarea inversă a lui  $x$  funcție de  $x'$  și  $t'$ , folosim un raționament similar, dar acum  $S$  se mișcă cu  $-v$  față de  $S'$

- ▶ Exprimarea  $t'$  funcție de  $t$  și  $x$  se obține din (4) și (3), prin eliminarea  $x'$ .

$$x' = x \sqrt{1 - v^2/c^2} - vt' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Contrația relativistă (2) exprimă lungimea  $L_0 \equiv x' (0 - x')$  din  $S'$  în mișcare, văzută însă din  $S$  în repaus

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

de unde:

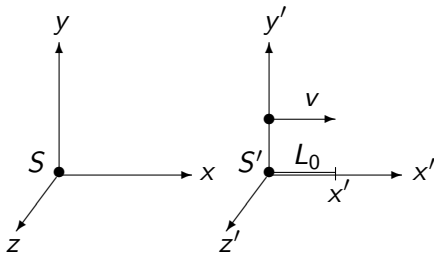
$$\Rightarrow \boxed{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \quad (3)$$

adică:

$$\Rightarrow x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \boxed{t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \quad (5)$$

## Transformarea Lorentz de coordonate și timp



- ▶ Dar față de SR fix  $S$ ,  $S'$  se mișcă cu  $v$ .  
La fel și poziția  $x'$  se mișcă cu viteza  $v$ .  
Deci,  $x = L + vt = x' \sqrt{1 - v^2/c^2} + vt$

- ▶ Pt. exprimarea inversă a lui  $x$  funcție de  $x'$  și  $t'$ , folosim un raționament similar, dar acum  $S$  se mișcă cu  $-v$  față de  $S'$

- ▶ Exprimarea  $t'$  funcție de  $t$  și  $x$  se obține din (4) și (3), prin eliminarea  $x'$ .

$$x' = x \sqrt{1 - v^2/c^2} - vt' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Contractția relativistă (2) exprimă lungimea  $L_0 \equiv x' (0 - x')$  din  $S'$  în mișcare, văzută însă din  $S$  în repaus

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

de unde:

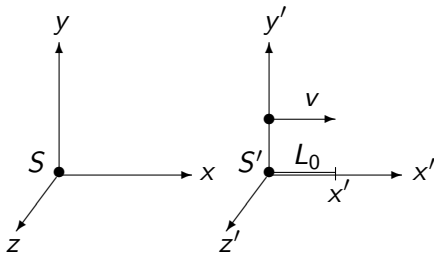
$$\Rightarrow \boxed{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \quad (3)$$

adică:

$$\Rightarrow x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \boxed{t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \quad (5)$$

## Transformarea Lorentz de coordonate și timp



- ▶ Dar față de SR fix  $S$ ,  $S'$  se mișcă cu  $v$ .  
La fel și poziția  $x'$  se mișcă cu viteza  $v$ .  
Deci,  $x = L + vt = x' \sqrt{1 - v^2/c^2} + vt$

- ▶ Pt. exprimarea inversă a lui  $x$  funcție de  $x'$  și  $t'$ , folosim un raționament similar, dar acum  $S$  se mișcă cu  $-v$  față de  $S'$

- ▶ Exprimarea  $t'$  funcție de  $t$  și  $x$  se obține din (4) și (3), prin eliminarea  $x'$ .

$$x' = x \sqrt{1 - v^2/c^2} - vt' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$\Rightarrow$

Contrația relativistă (2)  
exprimă lungimea  $L_0 \equiv x'$   
( $0 - x'$ ) din  $S'$  în mișcare,  
văzută însă din  $S$  în repaus

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (2)$$

de unde:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3)$$

adică:

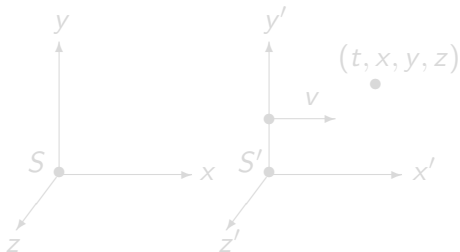
$\Rightarrow$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4)$$

$\Rightarrow$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (5)$$

# Transformarea Lorentz 4-dimensională



$$\begin{cases} t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

notăm:  $\beta = \frac{v}{c}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \beta x/c) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (6) \quad x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

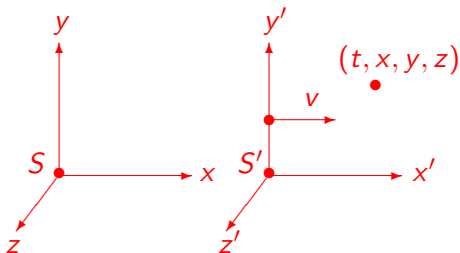
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}}_{x'^{\mu}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda_{\nu}^{\mu}} \underbrace{\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}_{x^{\nu}}$$

$$x'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (7)$$

$$dx'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} dx^{\nu} \quad (8)$$

(sumare după indicii care se repetă)

# Transformarea Lorentz 4-dimensională



$$\begin{cases} t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

notăm:  $\beta = \frac{v}{c}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \beta x/c) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (6) \quad x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

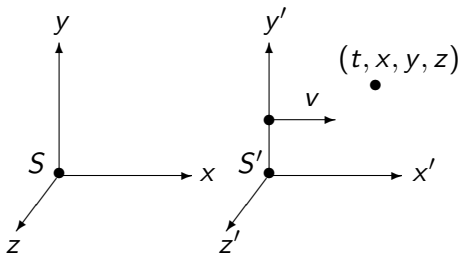
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}}_{x'^\mu} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda_\nu^\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}_{x^\nu}$$

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (7)$$

$$dx'^\mu = \Lambda_\nu^\mu dx^\nu \quad (8)$$

(sumare după indicii care se repetă)

# Transformarea Lorentz 4-dimensională



$$\begin{cases} t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

notăm:  $\beta = \frac{v}{c}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \beta x/c) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (6) \quad x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

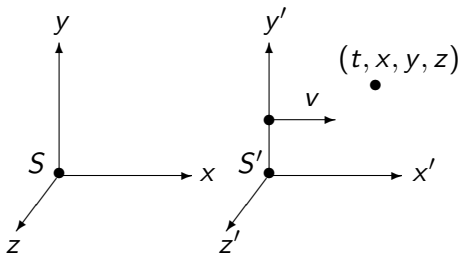
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}}_{x'^\mu} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda_\nu^\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}_{x^\nu}$$

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (7)$$

$$dx'^\mu = \Lambda_\nu^\mu dx^\nu \quad (8)$$

(sumare după indicii care se repetă)

# Transformarea Lorentz 4-dimensională



$$\begin{cases} t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

notăm:  $\beta = \frac{v}{c}$   
 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \beta x/c) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (6) \quad x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

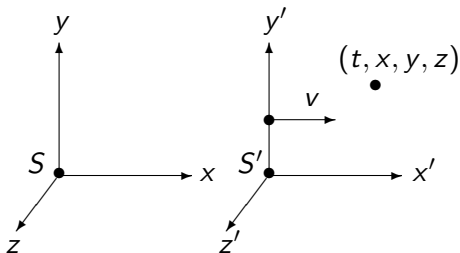
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}}_{x'^\mu} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda_\nu^\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}_{x^\nu}$$

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (7)$$

$$dx'^\mu = \Lambda_\nu^\mu dx^\nu \quad (8)$$

(sumare după indicii care se repetă)

# Transformarea Lorentz 4-dimensională



$$\begin{cases} t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

notăm:  $\beta = \frac{v}{c}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \begin{cases} t' = \gamma(t - \beta x/c) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (6) \quad x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

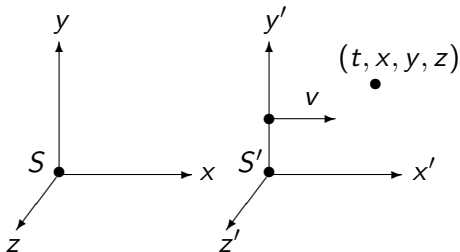
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}}_{x'^\mu} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda_\nu^\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}_{x^\nu}$$

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (7)$$

$$dx'^\mu = \Lambda_\nu^\mu dx^\nu \quad (8)$$

(sumare după indicii care se repetă)

# Transformarea Lorentz 4-dimensională



$$\begin{cases} t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

notăm:  $\beta = \frac{v}{c}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \beta x/c) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (6)$$

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

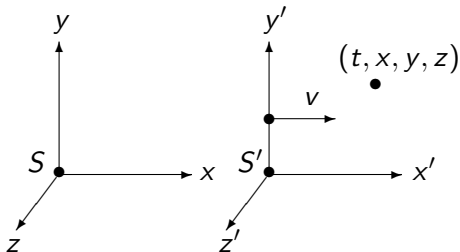
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}}_{x'^\mu} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda_\nu^\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}_{x^\nu}$$

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (7)$$

$$dx'^\mu = \Lambda_\nu^\mu dx^\nu \quad (8)$$

(sumare după indicii care se repetă)

# Transformarea Lorentz 4-dimensională



$$\begin{cases} t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

notăm:  $\beta = \frac{v}{c}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \beta x/c) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (6) \quad x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

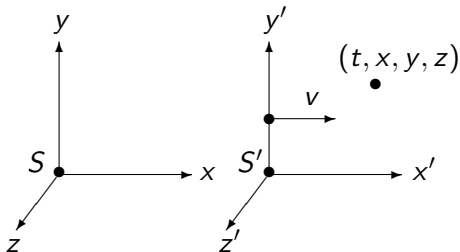
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}}_{x'^\mu} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda_\nu^\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}_{x^\nu}$$

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (7)$$

$$dx'^\mu = \Lambda_\nu^\mu dx^\nu \quad (8)$$

(sumare după indicii care se repetă)

# Transformarea Lorentz 4-dimensională



$$\begin{cases} t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

notăm:  $\beta = \frac{v}{c}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \begin{cases} t' = \gamma(t - \beta x/c) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (6) \quad x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

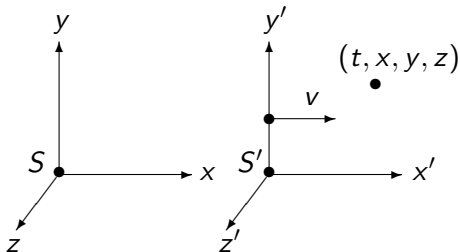
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}}_{x'^\mu} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda_\nu^\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}_{x^\nu}$$

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (7)$$

$$dx'^\mu = \Lambda_\nu^\mu dx^\nu \quad (8)$$

(sumare după indicii care se repetă)

# Transformarea Lorentz 4-dimensională



$$\begin{cases} t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

notăm:  $\beta = \frac{v}{c}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \beta x/c) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (6) \quad x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}}_{x'^\mu} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda_\nu^\mu} \underbrace{\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}_{x^\nu}$$

$$\boxed{x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu} \quad (7)$$

$$dx'^\mu = \Lambda_\nu^\mu dx^\nu \quad (8)$$

(sumare după indicii care se repetă)

## Spațiul Minkowski - Intervalul spațio-temporal

- ▶ Intervalul infinitezimal  $ds$  dintre două evenimente  $(t, x, y, z)$  și  $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$  este definit ca

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad \text{Atenție la semne !} \quad (9)$$

- ▶ Variația elementelor de coordonate în urma unei transformări Lorentz (6)
- $$\begin{cases} dt' = \gamma (dt - \beta dx/c) \\ dx' = \gamma (dx - \beta c dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases} \quad (10)$$

- ▶  $ds$  este *invariant Lorentz*. Să arătăm deci că:  $ds^2 = ds'^2$

$$\begin{aligned} ds'^2 &= c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \\ &= c^2 \gamma^2 \left( dt^2 + \frac{\beta^2}{c^2} dx^2 - 2 \frac{\beta}{c} dt dx \right) \\ &\quad - \gamma^2 \left( dx^2 + \beta^2 c^2 dt^2 - 2 \beta c dx dt \right) - dy^2 - dz^2 \\ &= c^2 \underbrace{\gamma^2 (1 - \beta^2)}_{=1} dt^2 - \underbrace{\gamma^2 (1 - \beta^2)}_{=1} dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2 \end{aligned} \quad (11)$$

## Spațiul Minkowski - Intervalul spațio-temporal

- ▶ Intervalul infinitezimal  $ds$  dintre două evenimente  $(t, x, y, z)$  și  $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$  este definit ca

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad \text{Atenție la semne !} \quad (9)$$

- ▶ Variația elementelor de coordonate în urma unei transformări Lorentz (6)
- $$\begin{cases} dt' = \gamma (dt - \beta dx/c) \\ dx' = \gamma (dx - \beta c dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases} \quad (10)$$

- ▶  $ds$  este *invariant Lorentz*. Să arătăm deci că:  $ds^2 = ds'^2$

$$\begin{aligned} ds'^2 &= c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \\ &= c^2 \gamma^2 \left( dt^2 + \frac{\beta^2}{c^2} dx^2 - 2 \frac{\beta}{c} dt dx \right) \\ &\quad - \gamma^2 \left( dx^2 + \beta^2 c^2 dt^2 - 2 \beta c dx dt \right) - dy^2 - dz^2 \\ &= c^2 \underbrace{\gamma^2 (1 - \beta^2)}_{=1} dt^2 - \underbrace{\gamma^2 (1 - \beta^2)}_{=1} dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2 \end{aligned} \quad (11)$$

## Spațiul Minkowski - Intervalul spațio-temporal

- ▶ Intervalul infinitezimal  $ds$  dintre două evenimente  $(t, x, y, z)$  și  $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$  este definit ca

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad \text{Atenție la semne !} \quad (9)$$

- ▶ Variația elementelor de coordonate în urma unei transformări Lorentz (6)
- $$\begin{cases} dt' = \gamma (dt - \beta dx/c) \\ dx' = \gamma (dx - \beta c dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases} \quad (10)$$

- ▶  $ds$  este invariant Lorentz. Să arătăm deci că:  $ds^2 = ds'^2$

$$\begin{aligned} ds'^2 &= c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \\ &= c^2 \gamma^2 \left( dt^2 + \frac{\beta^2}{c^2} dx^2 - 2 \frac{\beta}{c} dt dx \right) \\ &\quad - \gamma^2 \left( dx^2 + \beta^2 c^2 dt^2 - 2 \beta c dx dt \right) - dy^2 - dz^2 \\ &= c^2 \underbrace{\gamma^2 (1 - \beta^2)}_{=1} dt^2 - \underbrace{\gamma^2 (1 - \beta^2)}_{=1} dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2 \end{aligned} \quad (11)$$

## Spațiul Minkowski - Intervalul spațio-temporal

- ▶ Intervalul infinitezimal  $ds$  dintre două evenimente  $(t, x, y, z)$  și  $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$  este definit ca

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad \text{Atenție la semne !} \quad (9)$$

- ▶ Variația elementelor de coordonate în urma unei transformări Lorentz (6)

$$\begin{cases} dt' = \gamma (dt - \beta dx/c) \\ dx' = \gamma (dx - \beta c dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases} \quad (10)$$

- ▶  $ds$  este invariant Lorentz. Să arătăm deci că:  $ds^2 = ds'^2$

$$\begin{aligned} ds'^2 &= c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \\ &= c^2 \gamma^2 \left( dt^2 + \frac{\beta^2}{c^2} dx^2 - 2 \frac{\beta}{c} dt dx \right) \\ &\quad - \gamma^2 \left( dx^2 + \beta^2 c^2 dt^2 - 2 \beta c dx dt \right) - dy^2 - dz^2 \\ &= c^2 \underbrace{\gamma^2 (1 - \beta^2)}_{=1} dt^2 - \underbrace{\gamma^2 (1 - \beta^2)}_{=1} dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2 \end{aligned} \quad (11)$$

## Spațiul Minkowski - Intervalul spațio-temporal

- Intervalul infinitezimal  $ds$  dintre două evenimente  $(t, x, y, z)$  și  $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$  este definit ca

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad \text{Atenție la semne !} \quad (9)$$

- Variația elementelor de coordonate în urma unei transformări Lorentz (6)
- $$\begin{cases} dt' = \gamma (dt - \beta dx/c) \\ dx' = \gamma (dx - \beta c dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases} \quad (10)$$

- $ds$  este *invariant Lorentz*. Să arătăm deci că:  $ds^2 = ds'^2$

$$\begin{aligned} ds'^2 &= c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 \\ &= c^2 \gamma^2 \left( dt^2 + \frac{\beta^2}{c^2} dx^2 - 2 \frac{\beta}{c} dt dx \right) \\ &\quad - \gamma^2 \left( dx^2 + \beta^2 c^2 dt^2 - 2 \beta c dx dt \right) - dy^2 - dz^2 \\ &= c^2 \underbrace{\gamma^2 (1 - \beta^2)}_{=1} dt^2 - \underbrace{\gamma^2 (1 - \beta^2)}_{=1} dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2 \end{aligned} \quad (11)$$

# Energia și impulsul relativiste

► Impulsul:

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{x}}{dt_0} = m \underbrace{\frac{d\vec{x}}{dt}}_{\vec{v}} \underbrace{\frac{dt}{dt_0}}_{\gamma} = \gamma m \vec{v} \quad (12)$$

► Forța relativistă:  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v})$

► Energia cinetică:

$$T = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) \cdot \overbrace{\vec{v} dt}^{d\vec{s}} = m \int_0^{\gamma V} dt \frac{d}{dt}(\gamma \vec{v}) \cdot \vec{v}$$

integrând prin părți

$$T = m v(\gamma v) \Big|_0^{\gamma V} - m \int_0^{\gamma V} \gamma v dv = \gamma m V^2 - m \int_0^V \frac{v dv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$= \gamma m V^2 + mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \Big|_0^V = \gamma m V^2 + mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - mc^2$$

$$= \gamma [mV^2 + mc^2(1 - V^2/c^2)] - mc^2$$

$$= \cancel{\gamma m V^2} + \gamma mc^2 - \cancel{\gamma m V^2} - mc^2$$

$$T = (\gamma - 1)mc^2$$

► Energia totală relativistă:

$$E = T + mc^2 = \gamma mc^2 \quad (13)$$

► Relația energie-impuls:

Din avem (12)  $p^2 = \gamma^2 m^2 v^2$

$$p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 v^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \frac{v^2}{c^2}$$

$$= \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)$$

$$= \gamma^2 m^2 c^4 - m^2 c^4 = E^2 - m^2 c^4$$

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (14)$$





# Energia și impulsul relativiste

► Impulsul:

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{x}}{dt_0} = m \underbrace{\frac{d\vec{x}}{dt}}_{\vec{v}} \underbrace{\frac{dt}{dt_0}}_{\gamma} = \gamma m \vec{v} \quad (12)$$

► Forța relativistă:  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v})$

► Energia cinetică:

$$T = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) \cdot \overset{d\vec{s}}{\vec{v}} dt = m \int_0^{\gamma v} dt \frac{d}{dt}(\gamma \vec{v}) \cdot \vec{v}$$

integrând prin părți

$$T = m v(\gamma v) \Big|_0^{\gamma v} - m \int_0^{\gamma v} \gamma v dv = \gamma m V^2 - m \int_0^V \frac{v dv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$= \gamma m V^2 + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Big|_0^V = \gamma m V^2 + mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - mc^2$$

$$= \gamma [mV^2 + mc^2(1 - V^2/c^2)] - mc^2$$

$$= \cancel{\gamma m V^2} + \gamma mc^2 - \cancel{\gamma m V^2} - mc^2$$

$$T = (\gamma - 1)mc^2$$

► Energia totală relativistă:

$$E = T + mc^2 = \gamma mc^2 \quad (13)$$

► Relația energie-impuls:

Din avem (12)  $p^2 = \gamma^2 m^2 v^2$

$$p^2 c^2 = \gamma^2 m^2 v^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \frac{v^2}{c^2}$$

$$= \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)$$

$$= \gamma^2 m^2 c^4 - m^2 c^4 = E^2 - m^2 c^4$$

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (14)$$

## Energia și impulsul relativiste

► Impulsul:

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{x}}{dt_0} = m \underbrace{\frac{d\vec{x}}{dt}}_{\vec{v}} \underbrace{\frac{dt}{dt_0}}_{\gamma} = \gamma m \vec{v} \quad (12)$$

► Forța relativistă:  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v})$

► Energia cinetică:

$$T = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) \cdot \underbrace{d\vec{s}}_{\vec{v} dt} = m \int_0^{\gamma v} dt \frac{d}{dt}(\gamma \vec{v}) \cdot \vec{v}$$

integrând prin părți

$$\begin{aligned} T &= m v(\gamma v) \Big|_0^{\gamma v} - m \int_0^{\gamma v} \gamma v dv = \gamma m V^2 - m \int_0^V \frac{v dv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ &= \gamma m V^2 + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Big|_0^V = \gamma m V^2 + mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - mc^2 \\ &= \gamma [mV^2 + mc^2(1 - V^2/c^2)] - mc^2 \\ &= \cancel{\gamma m V^2} + \gamma mc^2 - \cancel{\gamma m V^2} - mc^2 \\ &= (\gamma - 1)mc^2 \end{aligned}$$

► Energia totală relativistă:

$$E = T + mc^2 = \gamma mc^2 \quad (13)$$

► Relația energie-impuls:

Din avem (12)  $p^2 = \gamma^2 m^2 v^2$

$$\begin{aligned} p^2 c^2 &= \gamma^2 m^2 v^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \frac{v^2}{c^2} \\ &= \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \\ &= \gamma^2 m^2 c^4 - m^2 c^4 = E^2 - m^2 c^4 \end{aligned}$$

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (14)$$

## Energia și impulsul relativiste

- Impulsul:

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{x}}{dt_0} = m \underbrace{\frac{d\vec{x}}{dt}}_{\vec{v}} \underbrace{\frac{dt}{dt_0}}_{\gamma} = \gamma m \vec{v} \quad (12)$$

- Forța relativistă:  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v})$

- Energia cinetică:

$$T = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) \cdot \underbrace{d\vec{s}}_{\vec{v} dt} = m \int_0^{\gamma v} dt \frac{d}{dt}(\gamma \vec{v}) \cdot \vec{v}$$

integrând prin părți

$$\begin{aligned} T &= m v(\gamma v) \Big|_0^{\gamma v} - m \int_0^{\gamma v} \gamma v dv = \gamma m V^2 - m \int_0^V \frac{v dv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ &= \gamma m V^2 + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Big|_0^V = \gamma m V^2 + mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - mc^2 \\ &= \gamma [mV^2 + mc^2(1 - V^2/c^2)] - mc^2 \\ &= \cancel{\gamma m V^2} + \gamma mc^2 - \cancel{\gamma m V^2} - mc^2 \\ &\quad \boxed{T = (\gamma - 1)mc^2} \end{aligned}$$

- Energia totală relativistă:

$$\boxed{E = T + mc^2 = \gamma mc^2} \quad (13)$$

- Relația energie-impuls:

Din avem (12)  $p^2 = \gamma^2 m^2 v^2$

$$\begin{aligned} p^2 c^2 &= \gamma^2 m^2 v^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \frac{v^2}{c^2} \\ &= \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \\ &= \gamma^2 m^2 c^4 - m^2 c^4 = E^2 - m^2 c^4 \end{aligned}$$

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (14)$$

## Energia și impulsul relativiste

- Impulsul:

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{x}}{dt_0} = m \underbrace{\frac{d\vec{x}}{dt}}_{\vec{v}} \underbrace{\frac{dt}{dt_0}}_{\gamma} = \gamma m \vec{v} \quad (12)$$

- Forța relativistă:  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v})$

- Energia cinetică:

$$T = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) \cdot \underbrace{d\vec{s}}_{\vec{v} dt} = m \int_0^{\gamma v} dt \frac{d}{dt}(\gamma \vec{v}) \cdot \vec{v}$$

integrând prin părți

$$\begin{aligned} T &= m v(\gamma v) \Big|_0^{\gamma v} - m \int_0^{\gamma v} \gamma v dv = \gamma m V^2 - m \int_0^V \frac{v dv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ &= \gamma m V^2 + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Big|_0^V = \gamma m V^2 + mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - mc^2 \\ &= \gamma [mV^2 + mc^2(1 - V^2/c^2)] - mc^2 \\ &= \cancel{\gamma m V^2} + \gamma mc^2 - \cancel{\gamma m V^2} - mc^2 \\ &\quad \boxed{T = (\gamma - 1)mc^2} \end{aligned}$$

- Energia totală relativistă:

$$\boxed{E = T + mc^2 = \gamma mc^2} \quad (13)$$

- Relația energie-impuls:

Din avem (12)  $p^2 = \gamma^2 m^2 v^2$

$$\begin{aligned} p^2 c^2 &= \gamma^2 m^2 v^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \frac{v^2}{c^2} \\ &= \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \\ &= \gamma^2 m^2 c^4 - m^2 c^4 = E^2 - m^2 c^4 \end{aligned}$$

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (14)$$

## Energia și impulsul relativiste

- Impulsul:

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{x}}{dt_0} = m \underbrace{\frac{d\vec{x}}{dt}}_{\vec{v}} \underbrace{\frac{dt}{dt_0}}_{\gamma} = \gamma m \vec{v} \quad (12)$$

- Forța relativistă:  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v})$

- Energia cinetică:

$$T = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) \cdot \underbrace{d\vec{s}}_{\vec{v} dt} = m \int_0^{\gamma v} dt \frac{d}{dt}(\gamma \vec{v}) \cdot \vec{v}$$

integrând prin părți

$$\begin{aligned} T &= m v(\gamma v) \Big|_0^{\gamma v} - m \int_0^{\gamma v} \gamma v dv = \gamma m V^2 - m \int_0^V \frac{v dv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ &= \gamma m V^2 + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Big|_0^V = \gamma m V^2 + mc^2 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - mc^2 \\ &= \gamma [mV^2 + mc^2(1 - V^2/c^2)] - mc^2 \\ &= \cancel{\gamma m V^2} + \gamma mc^2 - \cancel{\gamma m V^2} - mc^2 \\ &\quad \boxed{T = (\gamma - 1)mc^2} \end{aligned}$$

- Energia totală relativistă:

$$\boxed{E = T + mc^2 = \gamma mc^2} \quad (13)$$

- Relația energie-impuls:

Din avem (12)  $p^2 = \gamma^2 m^2 v^2$

$$\begin{aligned} p^2 c^2 &= \gamma^2 m^2 v^2 c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \frac{v^2}{c^2} \\ &= \gamma^2 m^2 c^4 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \\ &= \gamma^2 m^2 c^4 - m^2 c^4 = E^2 - m^2 c^4 \end{aligned}$$

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (14)$$

# Probleme

## Formule de bază

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad \beta = \frac{v}{c} ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (15)$$

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 c^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{E}{m_0 c^2}} \quad (16)$$

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 v \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = \frac{v}{c} = \frac{pc}{E}} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} E^2 - p^2 c^2 &= m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 = m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= \gamma^2 m_0^2 c^4 \frac{1}{\gamma^2} = (m_0 c^2)^2 \end{aligned} \quad (18)$$

sau

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (19)$$

1. Care este viteza unui pion (masă de repaus  $m_\pi = 140\text{MeV}$ ) cu un impuls de 480 MeV.

R: 
$$\beta = \frac{p}{E} = \frac{480}{\sqrt{480^2 + 140^2}} = 0.96$$

2. Cât trăiește în medie un muon (masa de repaus  $m_\mu = 100\text{MeV}$  timp mediu de viață  $\tau = 2.2\mu\text{sec}$  în sistemul propriu) având energia de 500 MeV.

R: 
$$t = \gamma \cdot \tau = \frac{E}{m} \cdot \tau = \frac{500}{100} \cdot 2.2 = 11\mu\text{sec}$$

1. Ce distanță parcurge un muon de impuls 500 MeV pe durata unui timp mediu de viață  $\tau = 2.2\mu\text{sec}$  (vezi întrebarea anterioară) și un foton de același impuls, în același timp, măsurat însă în sistemul laboratorului

$$\begin{aligned} \text{R: } s_{\mu} &= v \cdot t = \beta c \cdot \gamma \tau = \frac{p}{m_{\mu}} \cdot c \tau = \\ &= \frac{500}{100} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2.2 \cdot 10^{-6} = 3300m \\ s_{\gamma} &= c \cdot t = 3 \cdot 10^8 \cdot 2.2 \cdot 10^{-6} = 660m \end{aligned}$$

2. Care este, aproximativ, energia cinetică a unui proton ( $m_p \approx 1\text{GeV}$ ) de impuls 1GeV.

$$\begin{aligned} \text{R: } T &= E - m_p = \sqrt{p^2 + m_p^2} - m_p \\ T &= \sqrt{10^6 + 10^6} - 10^3 = 414\text{MeV} \end{aligned}$$