Câmpuri de particule

M. Penţia

IFIN-HH, Departament Fizică Nucleară,
P.O.Box MG-6, 077125, Bucureşti-Măgurele, ROMANIA.
e-mail: pentia@nipne.ro

October 18, 2019

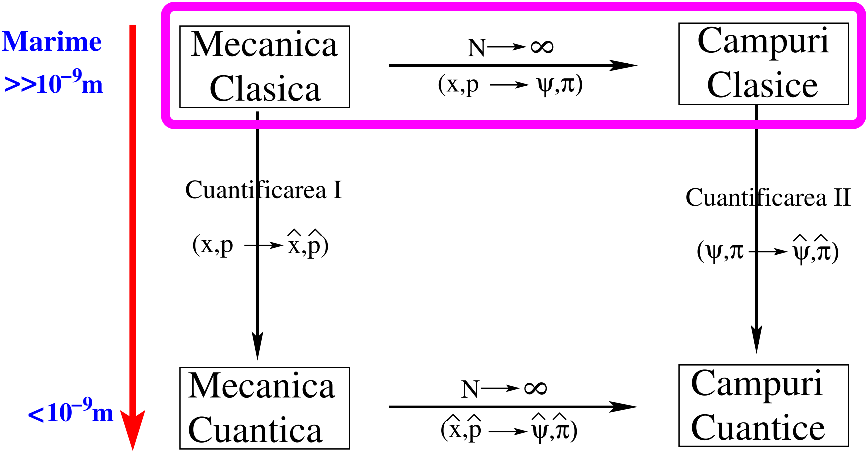

eli
nuclear physics
IFIN-HH
MHTC
Magurele High Tech Cluster
UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
VIRTUTE ET SAPIENTIA
TVR
Radio România Cultural
Edupedu
Câmpuri de particule
Dr. Mircea Penția
19 Octombrie 2019
https://indico.eli-np.ro/event/74/

Partea I

De la Mecanica Clasică la Câmpuri Clasice

Cuprins

De la Mecanica Clasică la Câmpuri Clasice



Ecuații de mișcare în mecanica clasică (oscilator armonic)

- Conform Newton $F = m\ddot{x}$. Un corp de masă m, sub acțiunea forței elastice $F(x) = -kx$, are ec. de mișcare $$\boxed{-k\,x = m\ddot{x}} \quad (1)$$
- Inlocuire variabile carteziene cu variabile legate de gradele de libertate.
- Lagrangian-ul ca funcție de x și $\dot{x}$: $L(x,\dot{x}) = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -kx\ ;\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$
- Pentru a exprima ec. (1), scriem și $m\ddot{x}$ prin L: $m\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)$, obținem

  Ecuația de mișcare Euler-Lagrange $$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0} \quad (2)$$
- Hamiltonian-ul ca funcție de x și p: $H(x,p) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} = kx\ ;\ \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$
- Pentru a exprima ec. (1), scriem $kx = -m\ddot{x} = -\dot{p}$ și $\frac{p}{m} = \dot{x}$, obținem

  Ecuațiile de mișcare Hamilton $$\boxed{\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}} \quad (3)$$
- Prin integrarea ecuației de mișcare (1) se obține "traiectoria" $x = x(t)$ a particulei. In cazul de față, *mișcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0\left[\exp(i\,\omega\,t) + \exp(-i\,\omega\,t)\right] \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4)$$

Ecuații de mișcare în mecanica clasică (oscilator armonic)

- Conform Newton $F = m\ddot{x}$. Un corp de masă m, sub acțiunea forței elastice $F(x) = -kx$, are ec. de mișcare $\boxed{-k\,x = m\ddot{x}}$ (1)
- Inlocuire variabile carteziene cu variabile legate de gradele de libertate.
- Lagrangian-ul ca funcție de x și $\dot{x}$: $L(x,\dot{x}) = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -kx\ ;\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$
- Pentru a exprima ec. (1), scriem și $m\ddot{x}$ prin L: $m\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)$, obținem

  Ecuația de mișcare Euler-Lagrange
  $$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0} \qquad (2)$$
- Hamiltonian-ul ca funcție de x și p: $H(x,p) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} = kx\ ;\ \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$
- Pentru a exprima ec. (1), scriem $kx = -m\ddot{x} = -\dot{p}$ și $\frac{p}{m} = \dot{x}$, obținem

  Ecuațiile de mișcare Hamilton
  $$\boxed{\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}} \qquad (3)$$
- Prin integrarea ecuației de mișcare (1) se obține "traiectoria" $x = x(t)$ a particulei. In cazul de față, *mișcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0\left[\exp(i\,\omega\,t) + \exp(-i\,\omega\,t)\right] \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (4)$$

Ecuații de mișcare în mecanica clasică (oscilator armonic)

- Conform Newton $F = m\ddot{x}$. Un corp de masă m, sub acțiunea forței elastice $F(x) = -kx$, are ec. de mișcare $\boxed{-k\,x = m\ddot{x}}$ (1)
- Inlocuire variabile carteziene cu variabile legate de gradele de libertate.
- Lagrangian-ul ca funcție de x și $\dot{x}$: $L(x,\dot{x}) = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -kx\ ;\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$
- Pentru a exprima ec. (1), scriem și $m\ddot{x}$ prin L: $m\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)$, obținem

  Ecuația de mișcare Euler-Lagrange $$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0} \qquad (2)$$
- Hamiltonian-ul ca funcție de x și p: $H(x,p) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} = kx\ ;\ \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$
- Pentru a exprima ec. (1), scriem $kx = -m\ddot{x} = -\dot{p}$ și $\frac{p}{m} = \dot{x}$, obținem

  Ecuațiile de mișcare Hamilton $$\boxed{\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}} \qquad (3)$$
- Prin integrarea ecuației de mișcare (1) se obține "traiectoria" $x = x(t)$ a particulei. In cazul de față, *mișcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0\left[\exp(i\,\omega\,t) + \exp(-i\,\omega\,t)\right] \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (4)$$

Ecuații de mișcare în mecanica clasică (oscilator armonic)

- Conform Newton $F = m\ddot{x}$. Un corp de masă m, sub acțiunea forței elastice $F(x) = -kx$, are ec. de mișcare $$\boxed{-k\,x = m\ddot{x}} \quad (1)$$
- Inlocuire variabile carteziene cu variabile legate de gradele de libertate.
- Lagrangian-ul ca funcție de x și $\dot{x}$: $L(x,\dot{x}) = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \;\Rightarrow\; \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \;;\; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$
- Pentru a exprima ec. (1), scriem și $m\ddot{x}$ prin L: $m\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)$, obținem

  Ecuația de mișcare Euler-Lagrange $$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0} \quad (2)$$
- Hamiltonian-ul ca funcție de x și p: $H(x,p) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} = kx \;;\; \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$
- Pentru a exprima ec. (1), scriem $kx = -m\ddot{x} = -\dot{p}$ și $\frac{p}{m} = \dot{x}$, obținem

  Ecuațiile de mișcare Hamilton $$\boxed{\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}} \quad (3)$$
- Prin integrarea ecuației de mișcare (1) se obține "traiectoria" $x = x(t)$ a particulei. In cazul de față, *mișcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0\left[\exp(i\,\omega\,t) + \exp(-i\,\omega\,t)\right] \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4)$$

Ecuații de mișcare în mecanica clasică (oscilator armonic)

- Conform Newton $F = m\ddot{x}$. Un corp de masă m, sub acțiunea forței elastice $F(x) = -kx$, are ec. de mișcare $\boxed{-k\,x = m\ddot{x}}$ (1)
- Inlocuire variabile carteziene cu variabile legate de gradele de libertate.
- Lagrangian-ul ca funcție de x și $\dot{x}$: $L(x,\dot{x}) = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -kx\ ;\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$
- Pentru a exprima ec. (1), scriem și $m\ddot{x}$ prin L: $m\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)$, obținem

  Ecuația de mișcare Euler-Lagrange $$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0} \qquad (2)$$
- Hamiltonian-ul ca funcție de x și p: $H(x,p) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} = kx\ ;\ \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$
- Pentru a exprima ec. (1), scriem $kx = -m\ddot{x} = -\dot{p}$ și $\frac{p}{m} = \dot{x}$, obținem

  Ecuațiile de mișcare Hamilton $$\boxed{\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}} \qquad (3)$$
- Prin integrarea ecuației de mișcare (1) se obține "traiectoria" $x = x(t)$ a particulei. In cazul de față, *mișcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0\left[\exp(i\,\omega\,t) + \exp(-i\,\omega\,t)\right] \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (4)$$

Ecuații de mișcare în mecanica clasică (oscilator armonic)

- Conform Newton $F = m\ddot{x}$. Un corp de masă m, sub acțiunea forței elastice $F(x) = -kx$, are ec. de mișcare $\boxed{-k\,x = m\ddot{x}}$ (1)
- Inlocuire variabile carteziene cu variabile legate de gradele de libertate.
- Lagrangian-ul ca funcție de x și $\dot{x}$: $L(x,\dot{x}) = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \; ; \; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$
- Pentru a exprima ec. (1), scriem și $m\ddot{x}$ prin L: $m\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)$, obținem

  Ecuația de mișcare Euler-Lagrange $\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0}$ (2)
- Hamiltonian-ul ca funcție de x și p: $H(x,p) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} = kx \; ; \; \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$
- Pentru a exprima ec. (1), scriem $kx = -m\ddot{x} = -\dot{p}$ și $\frac{p}{m} = \dot{x}$, obținem

  Ecuațiile de mișcare Hamilton $\boxed{\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}}$ (3)
- Prin integrarea ecuației de mișcare (1) se obține "traiectoria" $x = x(t)$ a particulei. In cazul de față, *mișcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0\left[\exp(i\,\omega\,t) + \exp(-i\,\omega\,t)\right] \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (4)$$

Ecuații de mișcare în mecanica clasică (oscilator armonic)

- Conform Newton $F = m\ddot{x}$. Un corp de masă m, sub acțiunea forței elastice $F(x) = -kx$, are ec. de mișcare $$\boxed{-k\,x = m\ddot{x}} \qquad (1)$$
- Inlocuire variabile carteziene cu variabile legate de gradele de libertate.
- Lagrangian-ul ca funcție de x și $\dot{x}$: $L(x,\dot{x}) = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \; ; \; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$
- Pentru a exprima ec. (1), scriem și $m\ddot{x}$ prin L: $m\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)$, obținem

  Ecuația de mișcare Euler-Lagrange $$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0} \qquad (2)$$
- Hamiltonian-ul ca funcție de x și p: $H(x,p) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} = kx \; ; \; \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$
- Pentru a exprima ec. (1), scriem $kx = -m\ddot{x} = -\dot{p}$ și $\frac{p}{m} = \dot{x}$, obținem

  Ecuațiile de mișcare Hamilton $$\boxed{\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}} \qquad (3)$$
- Prin integrarea ecuației de mișcare (1) se obține "traiectoria" $x = x(t)$ a particulei. In cazul de față, *mișcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0\left[\exp\left(i\,\omega\,t\right) + \exp\left(-i\,\omega\,t\right)\right] \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (4)$$

Ecuații de mișcare în mecanica clasică (oscilator armonic)

- Conform Newton $F = m\ddot{x}$. Un corp de masă m, sub acțiunea forței elastice $F(x) = -kx$, are ec. de mișcare $$\boxed{-k\,x = m\ddot{x}} \qquad (1)$$
- Inlocuire variabile carteziene cu variabile legate de gradele de libertate.
- Lagrangian-ul ca funcție de x și $\dot{x}$: $L(x,\dot{x}) = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$; $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$
- Pentru a exprima ec. (1), scriem și $m\ddot{x}$ prin L: $m\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)$, obținem

  Ecuația de mișcare Euler-Lagrange $$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0} \qquad (2)$$
- Hamiltonian-ul ca funcție de x și p: $H(x,p) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} = kx$; $\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$
- Pentru a exprima ec. (1), scriem $kx = -m\ddot{x} = -\dot{p}$ și $\frac{p}{m} = \dot{x}$, obținem

  Ecuațiile de mișcare Hamilton $$\boxed{\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}} \qquad (3)$$
- Prin integrarea ecuației de mișcare (1) se obține "traiectoria" $x = x(t)$ a particulei. In cazul de față, *mișcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0\left[\exp\left(i\,\omega\,t\right) + \exp\left(-i\,\omega\,t\right)\right] \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (4)$$

Ecuații de mișcare în mecanica clasică (oscilator armonic)

- Conform Newton $F = m\ddot{x}$. Un corp de masă m, sub acțiunea forței elastice $F(x) = -kx$, are ec. de mișcare $\boxed{-k\,x = m\ddot{x}}$ (1)
- Inlocuire variabile carteziene cu variabile legate de gradele de libertate.
- Lagrangian-ul ca funcție de x și $\dot{x}$: $L(x,\dot{x}) = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \;\Rightarrow\; \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \;;\; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$
- Pentru a exprima ec. (1), scriem și $m\ddot{x}$ prin L: $m\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)$, obținem

  Ecuația de mișcare Euler-Lagrange
  $$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0} \qquad (2)$$
- Hamiltonian-ul ca funcție de x și p: $H(x,p) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \;\Rightarrow\; \frac{\partial H}{\partial x} = kx \;;\; \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$
- Pentru a exprima ec. (1), scriem $kx = -m\ddot{x} = -\dot{p}$ și $\frac{p}{m} = \dot{x}$, obținem

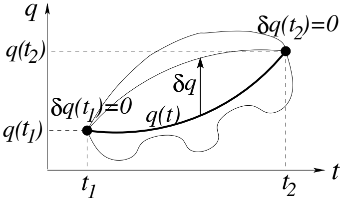
  Ecuațiile de mișcare Hamilton
  $$\boxed{\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}} \qquad (3)$$
- Prin integrarea ecuației de mișcare (1) se obține "traiectoria" $x = x(t)$ a particulei. In cazul de față, *mișcarea oscilatorie armonică*,
  $$x(t) = x_0\left[\exp(i\,\omega\,t) + \exp(-i\,\omega\,t)\right] \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (4)$$

Principiul minimei acțiuni - Ecuațiile de mișcare

- Dinamica unui sistem mecanic, e dată de Lagrangian: $L(q^i, \dot{q}^i, t) = T - V$ cu T- energ.cin. V- energ.pot. $q^i(t)$- coord. gen. ($i = 1, n$ gr. libertate)
- "Traiectoria" $q(t)$ căutată, este cea de <u>*minimă acțiune*</u> S_{min}: $\boxed{\delta S = 0}$
- Acțiunea: $S(q) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t)\, dt$ (5)

  $q^i(t)$ coord. și $\dot{q}^i(t) \equiv dq^i/dt$ viteza particulei i
- Variația δS cu $\delta q^i, \delta \dot{q}^i$, pt. $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i(t) \right) dt = 0 \quad (6)$$



- Cu $\delta \leftrightarrow \frac{d}{dt}$ și integrarea prin părți $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$ a termenului doi

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d\delta q^i(t)}{dt}\, dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \Big|_{t_1}^{t_2}}_{\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i\, dt$$

- $$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \delta q^i\, dt = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0} \quad \underset{\text{(i=1,...,n)}}{(7)}$$

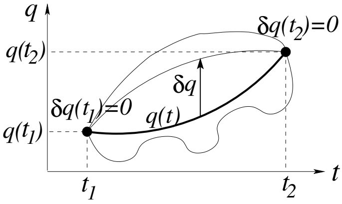
Acestea sunt *ecuațiile Euler-Lagrange*, un sistem de n-ecuații diferențiale cuplate de ordin 2, cu $2n$ var. indep. $q^i, \dot{q}^i$, și $2n$ cond. inițiale $q^i(t=0)$, $\dot{q}^i(t=0)$, într-un spațiu n-dim (spațiul configurațiilor). Soluția este *ecuația de mișcare* $q^i(t)$ a sistemului mecanic.

Principiul minimei acțiuni - Ecuațiile de mișcare

- Dinamica unui sistem mecanic, e dată de Lagrangian: $L(q^i, \dot{q}^i, t) = T - V$ cu T- energ.cin. V- energ.pot. $q^i(t)$- coord. gen. ($i=1, n$ gr. libertate)
- "Traiectoria" $q(t)$ căutată, este cea de <u>*minimă acțiune*</u> S_{min}: $\boxed{\delta S = 0}$
- Acțiunea: $S(q) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t)\, dt$ (5)

  $q^i(t)$ coord. și $\dot{q}^i(t) \equiv dq^i/dt$ viteza particulei i
- Variația δS cu $\delta q^i, \delta \dot{q}^i$, pt. $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i(t) \right) dt = 0 \quad (6)$$



- Cu $\delta \leftrightarrow \frac{d}{dt}$ și integrarea prin părți $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$ a termenului doi

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d\delta q^i(t)}{dt}\, dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \Big|_{t_1}^{t_2}}_{\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i\, dt$$

- $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \delta q^i\, dt = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0}$ (7) (i=1,...,n)

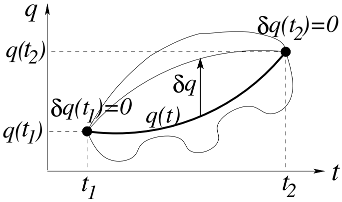
Acestea sunt *ecuațiile Euler-Lagrange*, un sistem de n-ecuații diferențiale cuplate de ordin 2, cu $2n$ var. indep. $q^i, \dot{q}^i$, și $2n$ cond. inițiale $q^i(t=0)$, $\dot{q}^i(t=0)$, într-un spațiu n-dim (spațiul configurațiilor). Soluția este *ecuația de mișcare* $q^i(t)$ a sistemului mecanic.

Principiul minimei acțiuni - Ecuațiile de mișcare

- Dinamica unui sistem mecanic, e dată de Lagrangian: $L(q^i, \dot{q}^i, t) = T - V$ cu T- energ.cin. V- energ.pot. $q^i(t)$- coord. gen. $(i = 1, n$ gr. libertate$)$
- "Traiectoria" $q(t)$ căutată, este cea de *minimă acțiune* S_{min}: $\boxed{\delta S = 0}$
- Acțiunea: $S(q) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t)\, dt$ (5)

  $q^i(t)$ coord. și $\dot{q}^i(t) \equiv dq^i/dt$ viteza particulei i
- Variația δS cu $\delta q^i, \delta \dot{q}^i$, pt. $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i(t) \right) dt = 0 \quad (6)$$



- Cu $\delta \leftrightarrow \frac{d}{dt}$ și integrarea prin părți $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$ a termenului doi

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d\delta q^i(t)}{dt} dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \Big|_{t_1}^{t_2}}_{\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i\, dt$$

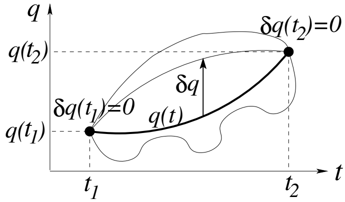
- $$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \delta q^i\, dt = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0} \quad \underset{(i=1,\dots,n)}{(7)}$$

Acestea sunt *ecuațiile Euler-Lagrange*, un sistem de n-ecuații diferențiale cuplate de ordin 2, cu $2n$ var. indep. $q^i, \dot{q}^i$, și $2n$ cond. inițiale $q^i(t=0)$, $\dot{q}^i(t=0)$, într-un spațiu n-dim (spațiul configurațiilor). Soluția este *ecuația de mișcare* $q^i(t)$ a sistemului mecanic.

Principiul minimei acțiuni - Ecuațiile de mișcare

- Dinamica unui sistem mecanic, e dată de Lagrangian: $L(q^i, \dot{q}^i, t) = T - V$ cu T- energ.cin. V- energ.pot. $q^i(t)$- coord. gen. ($i = 1, n$ gr. libertate)
- "Traiectoria" $q(t)$ căutată, este cea de <u>*minimă acțiune*</u> S_{min}: $\boxed{\delta S = 0}$
- Acțiunea: $S(q) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t)\, dt \quad (5)$

  $q^i(t)$ coord. și $\dot{q}^i(t) \equiv dq^i/dt$ viteza particulei i



- Variația δS cu $\delta q^i, \delta \dot{q}^i$, pt. $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i(t) \right) dt = 0 \quad (6)$$

- Cu $\delta \leftrightarrow \frac{d}{dt}$ și integrarea prin părți $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$ a termenului doi

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d\delta q^i(t)}{dt}\, dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \Big|_{t_1}^{t_2}}_{\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i\, dt$$

- $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \delta q^i\, dt = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0} \quad (7)$ (i=1,...,n)

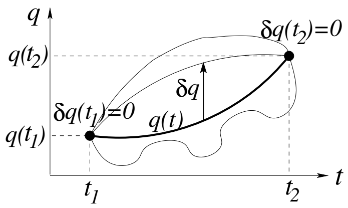
Acestea sunt *ecuațiile Euler-Lagrange*, un sistem de n-ecuații diferențiale cuplate de ordin 2, cu $2n$ var. indep. $q^i, \dot{q}^i$, și $2n$ cond. inițiale $q^i(t=0)$, $\dot{q}^i(t=0)$, într-un spațiu n-dim (spațiul configurațiilor). Soluția este *ecuația de mișcare* $q^i(t)$ a sistemului mecanic.

Principiul minimei acțiuni - Ecuațiile de mișcare

- Dinamica unui sistem mecanic, e dată de Lagrangian: $L(q^i, \dot{q}^i, t) = T - V$ cu T- energ.cin. V- energ.pot. $q^i(t)$- coord. gen. ($i = 1, n$ gr. libertate)
- "Traiectoria" $q(t)$ căutată, este cea de *minimă acțiune* S_{min}: $\boxed{\delta S = 0}$
- Acțiunea: $S(q) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t)\, dt \quad (5)$

  $q^i(t)$ coord. și $\dot{q}^i(t) \equiv dq^i/dt$ viteza particulei i
- Variația δS cu $\delta q^i, \delta \dot{q}^i$, pt. $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i(t) \right) dt = 0 \quad (6)$$



- Cu $\delta \leftrightarrow \frac{d}{dt}$ și integrarea prin părți $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$ a termenului doi

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d \delta q^i(t)}{dt}\, dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \Big|_{t_1}^{t_2}}_{\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i\, dt$$

- $$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \delta q^i\, dt = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0} \quad \begin{matrix} (7) \\ (i=1,\ldots,n) \end{matrix}$$

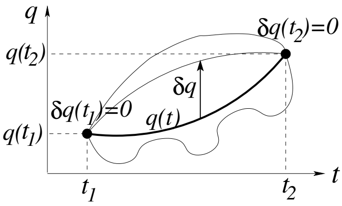
Acestea sunt *ecuațiile Euler-Lagrange*, un sistem de n-ecuații diferențiale cuplate de ordin 2, cu $2n$ var. indep. $q^i, \dot{q}^i$, și $2n$ cond. inițiale $q^i(t=0)$, $\dot{q}^i(t=0)$, într-un spațiu n-dim (spațiul configurațiilor). Soluția este *ecuația de mișcare* $q^i(t)$ a sistemului mecanic.

Principiul minimei acțiuni - Ecuațiile de mișcare

- Dinamica unui sistem mecanic, e dată de Lagrangian: $L(q^i, \dot{q}^i, t) = T - V$ cu T- energ.cin. V- energ.pot. $q^i(t)$- coord. gen. ($i = 1, n$ gr. libertate)
- "Traiectoria" $q(t)$ căutată, este cea de <u>*minimă acțiune*</u> S_{min}: $\boxed{\delta S = 0}$
- Acțiunea: $S(q) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t)\, dt$ (5)

  $q^i(t)$ coord. și $\dot{q}^i(t) \equiv dq^i/dt$ viteza particulei i
- Variația δS cu $\delta q^i, \delta \dot{q}^i$, pt. $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i(t) \right) dt = 0 \quad (6)$$



- Cu $\delta \leftrightarrow \frac{d}{dt}$ și integrarea prin părți $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$ a termenului doi

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d\delta q^i(t)}{dt}\, dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \Big|_{t_1}^{t_2}}_{\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i\, dt$$

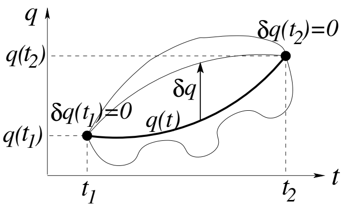
- $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \delta q^i\, dt = 0 \implies \boxed{\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0}$ (7) (i=1,...,n)

Acestea sunt *ecuațiile Euler-Lagrange*, un sistem de n-ecuații diferențiale cuplate de ordin 2, cu $2n$ var. indep. $q^i, \dot{q}^i$, și $2n$ cond. inițiale $q^i(t=0)$, $\dot{q}^i(t=0)$, într-un spațiu n-dim (spațiul configurațiilor). Soluția este *ecuația de mișcare* $q^i(t)$ a sistemului mecanic.

Principiul minimei acțiuni - Ecuațiile de mișcare

- Dinamica unui sistem mecanic, e dată de Lagrangian: $L(q^i, \dot{q}^i, t) = T - V$ cu T-energ.cin. V-energ.pot. $q^i(t)$-coord. gen. ($i = 1, n$ gr. libertate)
- "Traiectoria" $q(t)$ căutată, este cea de <u>*minimă acțiune*</u> S_{min}: $\boxed{\delta S = 0}$
- Acțiunea: $S(q) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t)\, dt \quad (5)$

  $q^i(t)$ coord. și $\dot{q}^i(t) \equiv dq^i/dt$ viteza particulei i



- Variația δS cu $\delta q^i, \delta \dot{q}^i$, pt. $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i(t) \right) dt = 0 \quad (6)$$

- Cu $\delta \leftrightarrow \frac{d}{dt}$ și integrarea prin părți $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$ a termenului doi

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\, \delta \dot{q}^i\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\, \frac{d\delta q^i(t)}{dt}\, dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\, \delta q^i \Big|_{t_1}^{t_2}}_{\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i\, dt$$

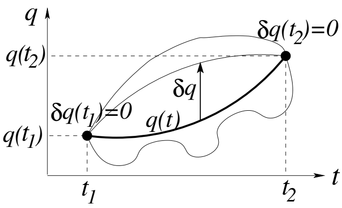
- $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \delta q^i\, dt = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0} \quad (7)$ (i=1,...,n)

Acestea sunt *ecuațiile Euler-Lagrange*, un sistem de n-ecuații diferențiale cuplate de ordin 2, cu $2n$ var. indep. $q^i, \dot{q}^i$, și $2n$ cond. inițiale $q^i(t=0)$, $\dot{q}^i(t=0)$, într-un spațiu n-dim (spațiul configurațiilor). Soluția este *ecuația de mișcare* $q^i(t)$ a sistemului mecanic.

Principiul minimei acțiuni - Ecuațiile de mișcare

- Dinamica unui sistem mecanic, e dată de Lagrangian: $L(q^i, \dot{q}^i, t) = T - V$ cu T- energ.cin. V- energ.pot. $q^i(t)$- coord. gen. ($i = 1, n$ gr. libertate)
- "Traiectoria" $q(t)$ căutată, este cea de <u>*minimă acțiune*</u> S_{min}: $\boxed{\delta S = 0}$
- Acțiunea: $S(q) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t)\, dt$ (5)

  $q^i(t)$ coord. și $\dot{q}^i(t) \equiv dq^i/dt$ viteza particulei i



- Variația δS cu $\delta q^i, \delta\dot{q}^i$, pt. $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i(t) \right) dt = 0 \quad (6)$$

- Cu $\delta \leftrightarrow \frac{d}{dt}$ și integrarea prin părți $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$ a termenului doi

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\, \delta \dot{q}^i\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\, \frac{d\delta q^i(t)}{dt}\, dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\, \delta q^i \Big|_{t_1}^{t_2}}_{\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i\ dt$$

- $$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \delta q^i\, dt = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0} \quad \underset{(i=1,\ldots,n)}{(7)}$$

Acestea sunt *ecuațiile Euler-Lagrange*, un sistem de n-ecuații diferențiale cuplate de ordin 2, cu $2n$ var. indep. $q^i, \dot{q}^i$, și $2n$ cond. inițiale $q^i(t=0)$, $\dot{q}^i(t=0)$, într-un spațiu n-dim (spațiul configurațiilor). Soluția este *ecuația de mișcare* $q^i(t)$ a sistemului mecanic.

Descriere Lagrange și Hamilton

- Dinamica unui sistem discret descrisă de Lagrangian $\boxed{L(q,\dot{q},t)=T-V}$

  Ecuațiile (7) Euler-Lagrange $\boxed{\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)=0}$ Impulsul conjugat $p_i\equiv\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ \Rightarrow\ \frac{\partial L}{\partial q^i}=\dot{p}_i$

- $$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_i\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^i}}_{din\,Ec.E-L}\dot{q}^i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i=\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)$$ dacă L nu dep. explicit de t

  $$-\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{d}{dt}\left(\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i-L\right)=0\ \Longrightarrow$$ conserv. energ. $H=\sum p_i\dot{q}^i-L=const.$

- Dinamica descrisă prin Hamiltonian: $\boxed{H(q,p)=T+V=\sum p_i\,\dot{q}^i-L(q,\dot{q})}$

- $$dH=\sum_i\left(dp_i\,\dot{q}^i+\cancel{p_i\,d\dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}dq^i-\cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}d\dot{q}^i}\right)=\sum_i\left(dp_i\,\dot{q}^i-\dot{p}_i\,dq^i\right)$$

  Ecuațiile Hamilton $$\boxed{\frac{\partial H}{\partial q^i}=-\dot{p}_i\quad;\quad\frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{q}^i}\qquad \text{(i=1,...,n)}\qquad (8)$$

  Ecuațiile Hamilton - sistem $2n$-ecuații diferențiale cuplate de ordin 1, cu $2n$ var. indep. q^i, p_i și $2n$ cond. inițiale $q^i(t=0)$, $p_i(t=0)$, într-un spațiu cu $2n$-dim (spațiul fazelor).

- Descrierile Newton → Lagrange → Hamilton echivalente, conduc la aceleași rezultate. Diferențele constau în evidențierea diverselor proprietăți mecanice: simetrii, invarianțe sau flexibilitate la transformări de coordonate.

Descriere Lagrange și Hamilton

- Dinamica unui sistem discret descrisă de Lagrangian $\boxed{L(q,\dot q,t)=T-V}$

Ecuațiile (7) Euler-Lagrange $\boxed{\dfrac{\partial L}{\partial q^i}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right)=0}$ Impulsul conjugat $p_i\equiv\dfrac{\partial L}{\partial \dot q^i}\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial L}{\partial q^i}=\dot p_i$

- $$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_i\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^i}}_{din\,Ec.E-L}\dot q^i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\ddot q^i=\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\dot q^i\right)$$ dacă L nu dep. explicit de t

$$-\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{d}{dt}\left(\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\dot q^i-L\right)=0\ \Longrightarrow$$ conserv. energ. $H=\sum p_i\dot q^i-L=const.$

- Dinamica descrisă prin Hamiltonian: $\boxed{H(q,p)=T+V=\sum p_i\,\dot q^i-L(q,\dot q)}$

- $$dH=\sum_i\left(dp_i\,\dot q^i+\cancel{p_i\,d\dot q^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}dq^i-\cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}d\dot q^i}\right)=\sum_i\left(dp_i\,\dot q^i-\dot p_i\,dq^i\right)$$

Ecuațiile Hamilton $\boxed{\dfrac{\partial H}{\partial q^i}=-\dot p_i\quad;\quad\dfrac{\partial H}{\partial p_i}=\dot q^i}$ (i=1,...,n) (8)

Ecuațiile Hamilton - sistem $2n$-ecuații diferențiale cuplate de ordin 1, cu $2n$ var. indep. q^i, p_i și $2n$ cond. inițiale $q^i(t=0)$, $p_i(t=0)$, într-un spațiu cu $2n$-dim (spațiul fazelor).

- Descrierile Newton $\rightarrow$ Lagrange $\rightarrow$ Hamilton echivalente, conduc la aceleași rezultate. Diferențele constau în evidențierea diverselor proprietăți mecanice: simetrii, invarianțe sau flexibilitate la transformări de coordonate.

Descriere Lagrange și Hamilton

- Dinamica unui sistem discret descrisă de Lagrangian $\boxed{L(q,\dot q,t)=T-V}$

Ecuațiile (7) Euler-Lagrange $\boxed{\dfrac{\partial L}{\partial q^i}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right)=0}$ Impulsul conjugat $p_i\equiv\dfrac{\partial L}{\partial \dot q^i}\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial L}{\partial q^i}=\dot p_i$

- $$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^i}}_{din\,Ec.E-L}\dot q^i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\ddot q^i=\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\dot q^i\right)$$ dacă L nu dep. explicit de t

$$-\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{d}{dt}\left(\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\dot q^i-L\right)=0\ \Longrightarrow$$ conserv. energ. $H=\sum p_i\dot q^i-L=const.$

- Dinamica descrisă prin Hamiltonian: $\boxed{H(q,p)=T+V=\sum p_i\,\dot q^i-L(q,\dot q)}$

- $$dH=\sum_i\left(dp_i\,\dot q^i+\cancel{p_i\,d\dot q^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}dq^i-\cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}d\dot q^i}\right)=\sum_i\left(dp_i\,\dot q^i-\dot p_i\,dq^i\right)$$

Ecuațiile Hamilton $$\boxed{\frac{\partial H}{\partial q^i}=-\dot p_i\quad;\quad\frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot q^i}\quad (i=1,\dots,n)\qquad (8)$$

Ecuațiile Hamilton - sistem $2n$-ecuații diferențiale cuplate de ordin 1, cu $2n$ var. indep. q^i, p_i și $2n$ cond. inițiale $q^i(t=0)$, $p_i(t=0)$, într-un spațiu cu $2n$-dim (spațiul fazelor).

- Descrierile Newton $\rightarrow$ Lagrange $\rightarrow$ Hamilton echivalente, conduc la aceleași rezultate. Diferențele constau în evidențierea diverselor proprietăți mecanice: simetrii, invarianțe sau flexibilitate la transformări de coordonate.

Descriere Lagrange și Hamilton

- Dinamica unui sistem discret descrisă de Lagrangian $\boxed{L(q,\dot{q},t)=T-V}$

Ecuațiile (7) Euler-Lagrange $\boxed{\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)=0}$ Impulsul conjugat $p_i\equiv\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ \Rightarrow\ \frac{\partial L}{\partial q^i}=\dot{p}_i$

- $\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^i}}_{din\,Ec.E-L}\dot{q}^i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i=\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)$ dacă L nu dep. explicit de t

$$-\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{d}{dt}\left(\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i-L\right)=0\quad\Longrightarrow$$ conserv. energ. $H=\sum p_i\dot{q}^i-L=const.$

- Dinamica descrisă prin Hamiltonian: $\boxed{H(q,p)=T+V=\sum p_i\,\dot{q}^i-L(q,\dot{q})}$

- $dH=\sum_i\left(dp_i\,\dot{q}^i+\cancel{p_i\,d\dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}dq^i-\cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}d\dot{q}^i}\right)=\sum_i\left(dp_i\,\dot{q}^i-\dot{p}_i\,dq^i\right)$

Ecuațiile Hamilton $\boxed{\frac{\partial H}{\partial q^i}=-\dot{p}_i\quad;\quad\frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{q}^i}$ (i=1,...,n) (8)

Ecuațiile Hamilton - sistem $2n$-ecuații diferențiale cuplate de ordin 1, cu $2n$ var. indep. q^i, p_i și $2n$ cond. inițiale $q^i(t=0)$, $p_i(t=0)$, într-un spațiu cu $2n$-dim (spațiul fazelor).

- Descrierile Newton → Lagrange → Hamilton echivalente, conduc la aceleași rezultate. Diferențele constau în evidențierea diverselor proprietăți mecanice: simetrii, invarianțe sau flexibilitate la transformări de coordonate.

Descriere Lagrange și Hamilton

- Dinamica unui sistem discret descrisă de Lagrangian $\boxed{L(q,\dot{q},t)=T-V}$

Ecuațiile (7) Euler-Lagrange $\boxed{\dfrac{\partial L}{\partial q^i}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)=0}$ Impulsul conjugat $p_i \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \Rightarrow \dfrac{\partial L}{\partial q^i}=\dot{p}_i$

- $\dfrac{dL}{dt}=\dfrac{\partial L}{\partial t}+\sum_i \underbrace{\dfrac{\partial L}{\partial q^i}}_{din\,Ec.E-L}\dot{q}^i+\sum_i \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i=\dfrac{\partial L}{\partial t}+\sum_i \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)$ dacă L nu dep. explicit de t

$$-\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i-L\right)=0 \quad\Longrightarrow$$ conserv. energ. $H=\sum p_i\dot{q}^i-L=const.$

- Dinamica descrisă prin Hamiltonian: $\boxed{H(q,p)=T+V=\sum p_i\,\dot{q}^i\;-\;L(q,\dot{q})}$

- $dH=\sum_i\left(dp_i\,\dot{q}^i+\cancel{p_i\,d\dot{q}^i}-\dfrac{\partial L}{\partial q^i}dq^i-\cancel{\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}d\dot{q}^i}\right)=\sum_i\left(dp_i\,\dot{q}^i-\dot{p}_i\,dq^i\right)$

Ecuațiile Hamilton $\boxed{\dfrac{\partial H}{\partial q^i}=-\dot{p}_i \quad ; \quad \dfrac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{q}^i}$ (i=1,...,n) (8)

Ecuațiile Hamilton - sistem $2n$-ecuații diferențiale cuplate de ordin 1, cu $2n$ var. indep. q^i, p_i și $2n$ cond. inițiale $q^i(t=0)$, $p_i(t=0)$, într-un spațiu cu $2n$-dim (spațiul fazelor).

- Descrierile Newton → Lagrange → Hamilton echivalente, conduc la aceleași rezultate. Diferențele constau în evidențierea diverselor proprietăți mecanice: simetrii, invarianțe sau flexibilitate la transformări de coordonate.

Descriere Lagrange și Hamilton

- Dinamica unui sistem discret descrisă de Lagrangian $\boxed{L(q,\dot q,t)=T-V}$

Ecuațiile (7) Euler-Lagrange $\boxed{\dfrac{\partial L}{\partial q^i}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right)=0}$ Impulsul conjugat $p_i\equiv\dfrac{\partial L}{\partial \dot q^i}\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial L}{\partial q^i}=\dot p_i$

- $$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^i}}_{din\,Ec.E-L}\dot q^i+\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\ddot q^i=\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\dot q^i\right)$$ dacă L nu dep. explicit de t

$$-\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\dot q^i-L\right)=0 \implies$$ conserv. energ. $H=\sum p_i\dot q^i-L=const.$

- Dinamica descrisă prin Hamiltonian: $\boxed{H(q,p)=T+V=\sum p_i\,\dot q^i\;-\;L(q,\dot q)}$

- $$dH=\sum_i\left(dp_i\,\dot q^i+\cancel{p_i\,d\dot q^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}dq^i-\cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}d\dot q^i}\right)=\sum_i\left(dp_i\,\dot q^i-\dot p_i\,dq^i\right)$$

Ecuațiile Hamilton $$\boxed{\frac{\partial H}{\partial q^i}=-\dot p_i\quad;\quad\frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot q^i}\quad \text{(i=1,...,n)}\qquad(8)$$

Ecuațiile Hamilton - sistem $2n$-ecuații diferențiale cuplate de ordin 1, cu $2n$ var. indep. q^i, p_i și $2n$ cond. inițiale $q^i(t=0)$, $p_i(t=0)$, într-un spațiu cu $2n$-dim (spațiul fazelor).

- Descrierile Newton → Lagrange → Hamilton echivalente, conduc la aceleași rezultate. Diferențele constau în evidențierea diverselor proprietăți mecanice: simetrii, invarianțe sau flexibilitate la transformări de coordonate.

Descriere Lagrange și Hamilton

- Dinamica unui sistem discret descrisă de Lagrangian $\boxed{L(q,\dot{q},t) = T - V}$

Ecuațiile (7) Euler-Lagrange $\boxed{\dfrac{\partial L}{\partial q^i} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0}$ Impulsul conjugat $p_i \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \Rightarrow \dfrac{\partial L}{\partial q^i} = \dot{p}_i$

- $$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^i}}_{din\, Ec.E-L} \dot{q}^i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i\right)$$ dacă L nu dep. explicit de t

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L\right) = 0 \quad \Longrightarrow$$ conserv. energ. $H = \sum p_i \dot{q}^i - L = const.$

- Dinamica descrisă prin Hamiltonian: $\boxed{H(q,p) = T + V = \sum p_i\, \dot{q}^i \, - \, L(q,\dot{q})}$

- $$dH = \sum_i \left(dp_i\, \dot{q}^i + \cancel{p_i\, d\dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i}\right) = \sum_i \left(dp_i\, \dot{q}^i - \dot{p}_i\, dq^i\right)$$

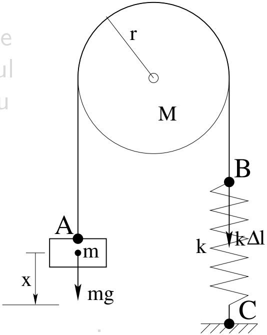
Ecuațiile Hamilton $$\boxed{\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\dot{p}_i \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i} \quad \text{(i=1,...,n)} \qquad (8)$$

Ecuațiile Hamilton - sistem $2n$-ecuații diferențiale cuplate de ordin 1, cu $2n$ var. indep. q^i, p_i și $2n$ cond. inițiale $q^i(t=0)$, $p_i(t=0)$, într-un spațiu cu $2n$-dim (spațiul fazelor).

- Descrierile Newton $\rightarrow$ Lagrange $\rightarrow$ Hamilton echivalente, conduc la aceleași rezultate. Diferențele constau în evidențierea diverselor proprietăți mecanice: simetrii, invarianțe sau flexibilitate la transformări de coordonate.

Exemplu 1 - Ecuația de mișcare

- Pe un scripete de masă M și rază r este trecut un fir AB. In A este suspendat un corp de masă m. In B este legat la un resort, cu constanta elastică k. In momentul inițial greutatea din A trece prin poziția de echilibru cu viteza v_0. Să se găsească ecuația de mișcare.



- In poziția de echilibru: $mg = k\,\Delta l \;\Rightarrow\; \Delta l = \dfrac{mg}{k}$
  Alegem coordonata independentă, deplasarea x a greutății A față de poziția de echilibru.

- Ecuația Euler-Lagrange (7) $\quad \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

$$L = T - V \quad \text{unde} \quad T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega_0^2}{2} \quad \text{cu} \quad v = \dot{x} \quad \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{\dot{x}}{r} \quad J = Mr^2$$

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{Mr^2\dot{x}^2}{2r^2} = \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 \quad ; \quad V = mgx - \frac{k(\Delta l + x)^2}{2} \quad ; \quad \omega_0 \text{ - viteza unghiulară}$$

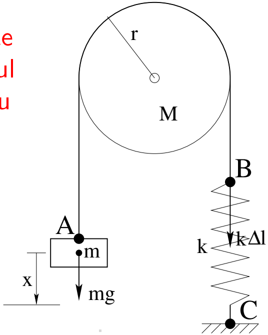
- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial x} = mg - k(\Delta l + x) = -kx \quad [mg = k\Delta l]\ ; \quad \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{-kx = (M+m)\ddot{x}} \text{ cu soluția } x = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

ec. oscilatorului armonic. $\qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$ (pulsație)

Exemplu 1 - Ecuația de mișcare

- Pe un scripete de masă M și rază r este trecut un fir AB. In A este suspendat un corp de masă m. In B este legat la un resort, cu constanta elastică k. In momentul inițial greutatea din A trece prin poziția de echilibru cu viteza v_0. Să se găsească ecuația de mișcare.



- In poziția de echilibru: $mg = k\,\Delta l \;\Rightarrow\; \Delta l = \dfrac{mg}{k}$
  Alegem coordonata independentă, deplasarea x a greutății A față de poziția de echilibru.

- Ecuația Euler-Lagrange (7) $\quad \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

$$L = T - V \quad \text{unde} \quad T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega_0^2}{2} \quad \text{cu} \quad v = \dot{x} \quad \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{\dot{x}}{r} \quad J = Mr^2$$

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{Mr^2\dot{x}^2}{2r^2} = \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 \;\; ; \;\; V = mgx - \frac{k(\Delta l + x)^2}{2} \;\; ; \;\; \omega_0 \text{ - viteza unghiulară}$$

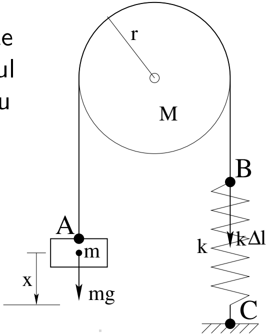
- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial x} = mg - k(\Delta l + x) = -kx \quad [mg = k\Delta l]\;; \quad \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{-kx = (M+m)\ddot{x}} \text{ cu soluția } x = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

ec. oscilatorului armonic. $\qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$ (pulsație)

Exemplu 1 - Ecuația de mișcare

- Pe un scripete de masă M și rază r este trecut un fir AB. In A este suspendat un corp de masă m. In B este legat la un resort, cu constanta elastică k. In momentul inițial greutatea din A trece prin poziția de echilibru cu viteza v_0. Să se găsească ecuația de mișcare.



- In poziția de echilibru: $mg = k\,\Delta l \;\Rightarrow\; \Delta l = \dfrac{mg}{k}$
  Alegem coordonata independentă, deplasarea x a greutății A față de poziția de echilibru.

- Ecuația Euler-Lagrange (7) $\quad \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

  $L = T - V$ unde $T = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{J\omega_0^2}{2}$ cu $v = \dot{x}$ $\quad \omega_0 = \dfrac{v}{r} = \dfrac{\dot{x}}{r}$ $\quad J = Mr^2$

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{Mr^2\dot{x}^2}{2r^2} = \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 \quad ; \quad V = mgx - \frac{k(\Delta l + x)^2}{2} \quad ; \quad \omega_0 \text{ - viteza unghiulară}$$

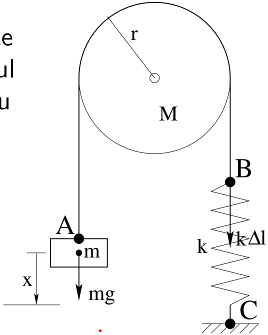
- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial x} = mg - k(\Delta l + x) = -kx \quad [mg = k\Delta l]\ ; \quad \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x}$

  $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} \quad \Longrightarrow \boxed{-kx = (M+m)\ddot{x}}$ cu soluția $x = \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t$

  ec. oscilatorului armonic. $\qquad \omega = \sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$ (pulsație)

Exemplu 1 - Ecuația de mișcare

- Pe un scripete de masă M și rază r este trecut un fir AB. In A este suspendat un corp de masă m. In B este legat la un resort, cu constanta elastică k. In momentul inițial greutatea din A trece prin poziția de echilibru cu viteza v_0. Să se găsească ecuația de mișcare.



- In poziția de echilibru: $mg = k\,\Delta l \;\Rightarrow\; \Delta l = \dfrac{mg}{k}$
  Alegem coordonata independentă, deplasarea x a greutății A față de poziția de echilibru.
- Ecuația Euler-Lagrange (7) $\quad \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

$L = T - V$ unde $T = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{J\omega_0^2}{2}$ cu $v = \dot{x}$ $\quad \omega_0 = \dfrac{v}{r} = \dfrac{\dot{x}}{r}$ $\quad J = Mr^2$

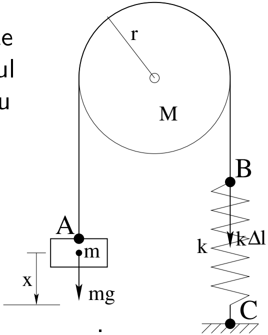
$T = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} + \dfrac{Mr^2\dot{x}^2}{2r^2} = \dfrac{M+m}{2}\dot{x}^2$; $V = mgx - \dfrac{k(\Delta l + x)^2}{2}$; ω_0 - viteza unghiulară

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial x} = mg - k(\Delta l + x) = -kx \quad [mg = k\Delta l]$; $\quad \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x}$

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{-kx = (M+m)\ddot{x}}$ cu soluția $x = \dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t$

ec. oscilatorului armonic. $\qquad \omega = \sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$ (pulsație)

Exemplu 1 - Ecuația de mișcare



- Pe un scripete de masă M și rază r este trecut un fir AB. In A este suspendat un corp de masă m. In B este legat la un resort, cu constanta elastică k. In momentul inițial greutatea din A trece prin poziția de echilibru cu viteza v_0. Să se găsească ecuația de mișcare.
- In poziția de echilibru: $mg = k\,\Delta l \;\Rightarrow\; \Delta l = \dfrac{mg}{k}$
  Alegem coordonata independentă, deplasarea x a greutății A față de poziția de echilibru.
- Ecuația Euler-Lagrange (7) $\quad \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

$$L = T - V \quad \text{unde} \quad T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega_0^2}{2} \quad \text{cu} \quad v = \dot{x} \quad \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{\dot{x}}{r} \quad J = Mr^2$$

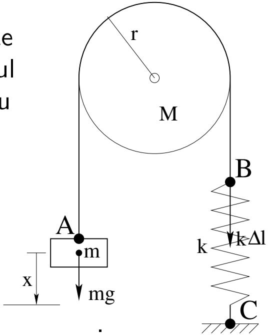
$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{Mr^2\dot{x}^2}{2r^2} = \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 \quad ; \quad V = mgx - \frac{k(\Delta l + x)^2}{2} \quad ; \quad \omega_0 \text{ - viteza unghiulară}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial x} = mg - k(\Delta l + x) = -kx \quad [mg = k\Delta l]\ ; \quad \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{-kx = (M+m)\ddot{x}} \text{ cu soluția } x = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

ec. oscilatorului armonic. $\qquad \omega = \sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$ (pulsație)

Exemplu 1 - Ecuația de mișcare



- Pe un scripete de masă M și rază r este trecut un fir AB. In A este suspendat un corp de masă m. In B este legat la un resort, cu constanta elastică k. In momentul inițial greutatea din A trece prin poziția de echilibru cu viteza v_0. Să se găsească ecuația de mișcare.
- In poziția de echilibru: $mg = k\,\Delta l \;\Rightarrow\; \Delta l = \dfrac{mg}{k}$
  Alegem coordonata independentă, deplasarea x a greutății A față de poziția de echilibru.
- Ecuația Euler-Lagrange (7) $\quad \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

$$L = T - V \quad \text{unde} \quad T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega_0^2}{2} \quad \text{cu} \quad v = \dot{x} \quad \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{\dot{x}}{r} \quad J = Mr^2$$

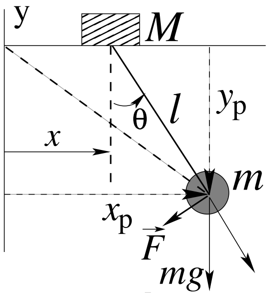
$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{Mr^2\dot{x}^2}{2r^2} = \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 \quad ; \quad V = mgx - \frac{k(\Delta l + x)^2}{2} \quad ; \quad \omega_0 \text{ - viteza unghiulară}$$

- $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial x} = mg - k(\Delta l + x) = -kx \quad [mg = k\Delta l] \;;\quad \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{-kx = (M+m)\ddot{x}} \text{ cu soluția } x = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

ec. oscilatorului armonic. $\qquad \omega = \sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$ (pulsație)

Exemplu 2 - Ecuația de mișcare



- Un pendul de masă m și lungime l este atașat unei mase M ce glisează de-a lungul axei x.
- Alegem coord. independente: pozitia x și unghiul θ. Atunci, comp. de coordonată și viteză pendul sunt:

$$x_p = x + l\sin\theta \implies \dot{x}_p = \dot{x} + l\,\dot{\theta}\cos\theta$$
$$y_p = -l\cos\theta \implies \dot{y}_p = l\dot{\theta}\sin\theta$$

- Ec. Euler-Lagrange (7) pentru coordonata x: $\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

$$\begin{cases} T = \dfrac{M\dot{x}^2}{2} + \dfrac{m\left(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2\right)}{2} \\ V = mgy_p \end{cases} \quad L = T - V = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left[\left(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(l\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right] + mgl\cos\theta$$
$$= \frac{(M+m)\dot{x}^2}{2} + m\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0\,;\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta\,;\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml(\dot{x}\dot{\theta} + g)\sin\theta\,;\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(\dot{x}l\cos\theta + l^2\dot{\theta})$$

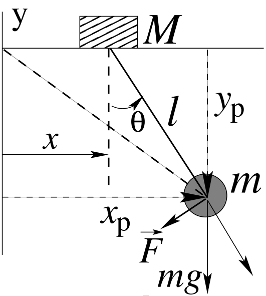
- Ec.Euler-Lagrange pt. coord. x: $(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$
- Ec.Euler-Lagrange pt. coord. θ: $ml(\dot{x}\dot{\theta} + g)\sin\theta + \dfrac{d}{dt}\left[m(\dot{x}l\cos\theta + l^2\dot{\theta})\right] = 0 \;|\,/l^2$

$$\text{sau} \quad \ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{l}\cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

pentru $\ddot{x} = 0$ avem ecuația de pendul simplu: $F = ma$ sau $-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$

Exemplu 2 - Ecuația de mișcare

- Un pendul de masă m și lungime l este atașat unei mase M ce glisează de-a lungul axei x.



- Alegem coord. independente: pozitia x și unghiul θ
  Atunci, comp. de coordonată și viteză pendul sunt:

$$x_p = x + l\sin\theta \implies \dot{x}_p = \dot{x} + l\,\dot{\theta}\cos\theta$$

$$y_p = -l\cos\theta \implies \dot{y}_p = l\dot{\theta}\sin\theta$$

- Ec. Euler-Lagrange (7) pentru coordonata x: $\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

$$\begin{cases} T = \dfrac{M\dot{x}^2}{2} + \dfrac{m\left(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2\right)}{2} \\ V = mgy_p \end{cases} \quad \Bigg| \quad L = T - V = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left[\left(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(l\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right] + mgl\cos\theta$$

$$= \frac{(M+m)\dot{x}^2}{2} + m\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0\,;\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta\,;\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml(\dot{x}\dot{\theta} + g)\sin\theta\,;\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(\dot{x}l\cos\theta + l^2\dot{\theta})$$

- Ec.Euler-Lagrange pt. coord. x: $(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$
- Ec.Euler-Lagrange pt. coord. θ: $ml(\dot{x}\dot{\theta} + g)\sin\theta + \dfrac{d}{dt}\Big[m(\dot{x}l\cos\theta + l^2\dot{\theta})\Big] = 0 \ \Big|\, / l^2$

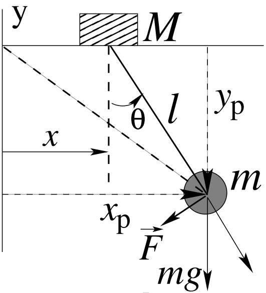
$$\text{sau} \quad \ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{l}\cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

pentru $\ddot{x} = 0$ avem ecuația de pendul simplu: $F = ma$ sau $-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$

Exemplu 2 - Ecuația de mișcare

- Un pendul de masă m și lungime l este atașat unei mase M ce glisează de-a lungul axei x.
- Alegem coord. independente: pozitia x și unghiul θ
  Atunci, comp. de coordonată și viteză pendul sunt:

$$x_p = x + l\sin\theta \implies \dot{x}_p = \dot{x} + l\,\dot{\theta}\cos\theta$$
$$y_p = -l\cos\theta \implies \dot{y}_p = l\dot{\theta}\sin\theta$$



- Ec. Euler-Lagrange (7) pentru coordonata x: $\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

$$\begin{cases} T = \dfrac{M\dot{x}^2}{2} + \dfrac{m\left(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2\right)}{2} \\ V = mgy_p \end{cases} \quad L = T - V = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left[\left(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(l\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right] + mgl\cos\theta$$
$$= \frac{(M+m)\dot{x}^2}{2} + m\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0\,;\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta\,;\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml(\dot{x}\dot{\theta} + g)\sin\theta\,;\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(\dot{x}l\cos\theta + l^2\dot{\theta})$$

- Ec.Euler-Lagrange pt. coord. x: $(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$
- Ec.Euler-Lagrange pt. coord. θ: $ml(\dot{x}\dot{\theta} + g)\sin\theta + \dfrac{d}{dt}\left[m(\dot{x}l\cos\theta + l^2\dot{\theta})\right] = 0 \;|\,/l^2$

$$\text{sau} \quad \ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{l}\cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

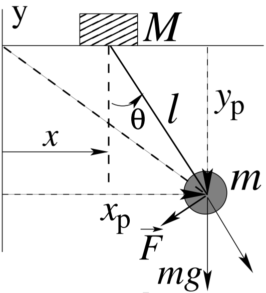
pentru $\ddot{x} = 0$ avem ecuația de pendul simplu: $F = ma$ sau $-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$

Exemplu 2 - Ecuația de mișcare

- Un pendul de masă m și lungime l este atașat unei mase M ce glisează de-a lungul axei x.
- Alegem coord. independente: pozitia x și unghiul θ
  Atunci, comp. de coordonată și viteză pendul sunt:

$$x_p = x + l\sin\theta \implies \dot{x}_p = \dot{x} + l\,\dot{\theta}\cos\theta$$
$$y_p = -l\cos\theta \implies \dot{y}_p = l\dot{\theta}\sin\theta$$

- Ec. Euler-Lagrange (7) pentru coordonata x: $\quad \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$



$$\begin{cases} T = \dfrac{M\dot{x}^2}{2} + \dfrac{m\left(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2\right)}{2} \\ V = mgy_p \end{cases} \quad \begin{aligned} L = T - V &= \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left[\left(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(l\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right] + mgl\cos\theta \\ &= \frac{(M+m)\dot{x}^2}{2} + m\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl\cos\theta \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0\,;\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta\,;\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml(\dot{x}\dot{\theta} + g)\sin\theta\,;\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(\dot{x}l\cos\theta + l^2\dot{\theta})$$

- Ec.Euler-Lagrange pt. coord. x: $(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$
- Ec.Euler-Lagrange pt. coord. θ: $ml(\dot{x}\dot{\theta} + g)\sin\theta + \dfrac{d}{dt}\left[m(\dot{x}l\cos\theta + l^2\dot{\theta})\right] = 0 \ \Big|\, / l^2$

$$\text{sau} \quad \ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{l}\cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

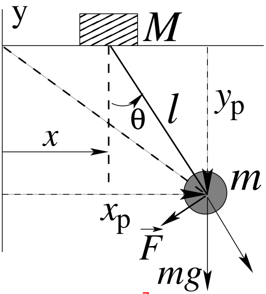
pentru $\ddot{x} = 0$ avem ecuația de pendul simplu: $F = ma$ sau $-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$

Exemplu 2 - Ecuația de mișcare

- Un pendul de masă m și lungime l este atașat unei mase M ce glisează de-a lungul axei x.
- Alegem coord. independente: pozitia x și unghiul θ
  Atunci, comp. de coordonată și viteză pendul sunt:

$$\begin{aligned} x_p &= x + l\sin\theta &\implies& \quad \dot{x}_p = \dot{x} + l\,\dot{\theta}\cos\theta \\ y_p &= -l\cos\theta &\implies& \quad \dot{y}_p = l\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned}$$

- Ec. Euler-Lagrange (7) pentru coordonata x: $\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$



$$\begin{cases} T = \dfrac{M\dot{x}^2}{2} + \dfrac{m\left(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2\right)}{2} \\ V = mgy_p \end{cases}$$

$$L = T - V = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left[\left(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(l\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right] + mgl\cos\theta$$

$$= \frac{(M+m)\dot{x}^2}{2} + m\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl\cos\theta$$

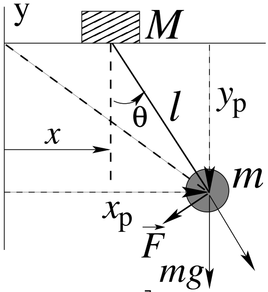
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0\,;\; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta\,;\; \frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml(\dot{x}\dot{\theta} + g)\sin\theta\,;\; \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(\dot{x}l\cos\theta + l^2\dot{\theta})$$

- Ec.Euler-Lagrange pt. coord. x: $(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$
- Ec.Euler-Lagrange pt. coord. θ: $ml(\dot{x}\dot{\theta} + g)\sin\theta + \dfrac{d}{dt}\left[m(\dot{x}l\cos\theta + l^2\dot{\theta})\right] = 0 \;|\, /l^2$

$$\text{sau} \qquad \ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{l}\cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

pentru $\ddot{x} = 0$ avem ecuația de pendul simplu: $F = ma$ sau $-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$

Exemplu 2 - Ecuația de mișcare



- Un pendul de masă m și lungime l este atașat unei mase M ce glisează de-a lungul axei x.
- Alegem coord. independente: pozitia x și unghiul θ
  Atunci, comp. de coordonată și viteză pendul sunt:

$$x_p = x + l\sin\theta \implies \dot{x}_p = \dot{x} + l\,\dot{\theta}\cos\theta$$
$$y_p = -l\cos\theta \implies \dot{y}_p = l\dot{\theta}\sin\theta$$

- Ec. Euler-Lagrange (7) pentru coordonata x: $\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

$$\begin{cases} T = \dfrac{M\dot{x}^2}{2} + \dfrac{m\left(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2\right)}{2} \\ V = mgy_p \end{cases} \quad \Bigg| \quad L = T - V = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left[\left(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(l\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right] + mgl\cos\theta$$
$$= \frac{(M+m)\dot{x}^2}{2} + m\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl\cos\theta$$

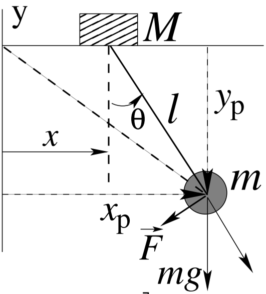
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0\,;\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta\,;\quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml(\dot{x}\dot{\theta} + g)\sin\theta\,;\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(\dot{x}l\cos\theta + l^2\dot{\theta})$$

- Ec.Euler-Lagrange pt. coord. x: $(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$
- Ec.Euler-Lagrange pt. coord. θ: $ml(\dot{x}\dot{\theta} + g)\sin\theta + \dfrac{d}{dt}\left[m(\dot{x}l\cos\theta + l^2\dot{\theta})\right] = 0 \;|\, /l^2$

$$\text{sau} \quad \ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{l}\cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

pentru $\ddot{x} = 0$ avem ecuația de pendul simplu: $F = ma$ sau $-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$

Exemplu 2 - Ecuația de mișcare



- Un pendul de masă m și lungime l este atașat unei mase M ce glisează de-a lungul axei x.
- Alegem coord. independente: pozitia x și unghiul θ
  Atunci, comp. de coordonată și viteză pendul sunt:

$$x_p = x + l\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad \dot{x}_p = \dot{x} + l\,\dot{\theta}\cos\theta$$
$$y_p = -l\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad \dot{y}_p = l\dot{\theta}\sin\theta$$

- Ec. Euler-Lagrange (7) pentru coordonata x: $\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

$$\begin{cases} T = \dfrac{M\dot{x}^2}{2} + \dfrac{m\left(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2\right)}{2} \\ V = mgy_p \end{cases} \Bigg| \; L = T - V = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left[\left(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(l\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right] + mgl\cos\theta$$
$$= \frac{(M+m)\dot{x}^2}{2} + m\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl\cos\theta$$

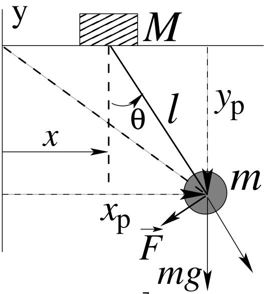
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0\,;\; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta\,;\; \frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml(\dot{x}\dot{\theta} + g)\sin\theta\,;\; \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(\dot{x}l\cos\theta + l^2\dot{\theta})$$

- Ec.Euler-Lagrange pt. coord. x: $(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$
- Ec.Euler-Lagrange pt. coord. θ: $ml(\dot{x}\dot{\theta} + g)\sin\theta + \dfrac{d}{dt}\left[m(\dot{x}l\cos\theta + l^2\dot{\theta})\right] = 0 \;\; | \,/\, l^2$

  sau $\quad \ddot{\theta} + \dfrac{\ddot{x}}{l}\cos\theta + \dfrac{g}{l}\sin\theta = 0$

  pentru $\ddot{x} = 0$ avem ecuația de pendul simplu: $F = ma \quad$ sau $\; -mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$

Exemplu 2 - Ecuația de mișcare



- Un pendul de masă m și lungime l este atașat unei mase M ce glisează de-a lungul axei x.
- Alegem coord. independente: pozitia x și unghiul θ
  Atunci, comp. de coordonată și viteză pendul sunt:

$$x_p = x + l\sin\theta \implies \dot{x}_p = \dot{x} + l\,\dot{\theta}\cos\theta$$
$$y_p = -l\cos\theta \implies \dot{y}_p = l\dot{\theta}\sin\theta$$

- Ec. Euler-Lagrange (7) pentru coordonata x: $\quad \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$

$$\begin{cases} T = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m\left(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2\right)}{2} \\ V = mgy_p \end{cases} \Bigg| \; L = T - V = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2}\left[\left(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(l\dot{\theta}\sin\theta\right)^2\right] + mgl\cos\theta$$
$$= \frac{(M+m)\dot{x}^2}{2} + m\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + mgl\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0\,;\; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta\,;\; \frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml(\dot{x}\dot{\theta} + g)\sin\theta\,;\; \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(\dot{x}l\cos\theta + l^2\dot{\theta})$$

- Ec.Euler-Lagrange pt. coord. x: $(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$
- Ec.Euler-Lagrange pt. coord. θ: $ml(\dot{x}\dot{\theta} + g)\sin\theta + \frac{d}{dt}\left[m(\dot{x}l\cos\theta + l^2\dot{\theta})\right] = 0 \;\; | \, / l^2$

sau $\quad \ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{l}\cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

pentru $\ddot{x} = 0$ avem ecuația de pendul simplu: $F = ma$ sau $-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$

Oscilator armonic - ecuația de mișcare

- Căutăm ecuația de mișcare a unei particule de masă m supusă acțiunii unei forțe elastice 1-dimensionale: $F(x) = -kx$?
- In mecanica Newton $F = m\ddot{x}$, iar ec. de mișcare este $\boxed{-kx = m\ddot{x}}$ (9)
- Acum, Lagrangian-ul: $L = T - V$, iar $q \equiv x$,

$$\text{unde } T = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad \textit{iar} \quad V = -\int F(x)\, dx = \frac{kx^2}{2}$$

$$\text{Adică, } \boxed{L(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2} \implies \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \; ; \; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad (10)$$

- Final, ecuația de mișcare Euler-Lagrange (7) $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$ este, pt. oscilatorul armonic: $-kx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0$ adică, $-kx = m\ddot{x}$, la fel ca în mecanica newtoniană (9).
- Prin integrarea ecuației de mișcare se obține "traiectoria" $x = x(t)$ a particulei. In cazul de față, *mișcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0 \exp(\pm i\,\omega\, t) \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (11)$$

Oscilator armonic - ecuația de mișcare

- Căutăm ecuația de mișcare a unei particule de masă m supusă acțiunii unei forțe elastice 1-dimensionale: $F(x) = -kx$?
- In mecanica Newton $F = m\ddot{x}$, iar ec. de mișcare este $\boxed{-kx = m\ddot{x}}$ (9)
- Acum, Lagrangian-ul: $L = T - V$, iar $q \equiv x$,

$$\text{unde } T = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad iar \quad V = -\int F(x)\, dx = \frac{kx^2}{2}$$

Adică, $\boxed{L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2} \implies \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \; ; \; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ (10)

- Final, ecuația de mișcare Euler-Lagrange (7) $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$ este, pt. oscilatorul armonic: $-kx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0$ adică, $-kx = m\ddot{x}$, la fel ca în mecanica newtoniană (9).
- Prin integrarea ecuației de mișcare se obține "traiectoria" $x = x(t)$ a particulei. In cazul de față, *mișcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0 \exp(\pm i\, \omega\, t) \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (11)$$

Oscilator armonic - ecuația de mișcare

- Căutăm ecuația de mișcare a unei particule de masă m supusă acțiunii unei forțe elastice 1-dimensionale: $F(x) = -kx$?
- In mecanica Newton $F = m\ddot{x}$, iar ec. de mișcare este $\boxed{-kx = m\ddot{x}}$ (9)
- Acum, Lagrangian-ul: $L = T - V$, iar $q \equiv x$,

$$\text{unde } T = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad iar \quad V = -\int F(x)\, dx = \frac{kx^2}{2}$$

Adică, $\boxed{L(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2} \implies \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \;;\; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ (10)

- Final, ecuația de mișcare Euler-Lagrange (7) $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$ este, pt. oscilatorul armonic: $-kx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0$ adică, $-kx = m\ddot{x}$, la fel ca în mecanica newtoniană (9).
- Prin integrarea ecuației de mișcare se obține "traiectoria" $x = x(t)$ a particulei. In cazul de față, *mișcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0 \exp(\pm i\,\omega\, t) \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (11)$$

Oscilator armonic - ecuația de mișcare

- Căutăm ecuația de mișcare a unei particule de masă m supusă acțiunii unei forțe elastice 1-dimensionale: $F(x) = -kx$?
- In mecanica Newton $F = m\ddot{x}$, iar ec. de mișcare este $\boxed{-kx = m\ddot{x}}$ (9)
- Acum, Lagrangian-ul: $L = T - V$, iar $q \equiv x$,

$$\text{unde } T = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad \textit{iar} \quad V = -\int F(x)\,dx = \frac{kx^2}{2}$$

$$\text{Adică, } \boxed{L(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2} \implies \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \ ; \ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad (10)$$

- Final, ecuația de mișcare Euler-Lagrange (7) $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$ este, pt. oscilatorul armonic: $-kx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0$ adică, $-kx = m\ddot{x}$, la fel ca în mecanica newtoniană (9).
- Prin integrarea ecuației de mișcare se obține "traiectoria" $x = x(t)$ a particulei. In cazul de față, *mișcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0 \exp(\pm i\,\omega\,t) \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (11)$$

Oscilator armonic - ecuația de mișcare

- Căutăm ecuația de mișcare a unei particule de masă m supusă acțiunii unei forțe elastice 1-dimensionale: $F(x) = -kx$?
- In mecanica Newton $F = m\ddot{x}$, iar ec. de mișcare este $\boxed{-kx = m\ddot{x}}$ (9)
- Acum, Lagrangian-ul: $L = T - V$, iar $q \equiv x$,

$$\text{unde } T = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad iar \quad V = -\int F(x)\, dx = \frac{kx^2}{2}$$

Adică, $$\boxed{L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2} \implies \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \;\; ; \;\; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad (10)$$

- Final, ecuația de mișcare Euler-Lagrange (7) $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$ este, pt. oscilatorul armonic: $-kx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0$ adică, $-kx = m\ddot{x}$, la fel ca în mecanica newtoniană (9).
- Prin integrarea ecuației de mișcare se obține "traiectoria" $x = x(t)$ a particulei. In cazul de față, *mișcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0 \exp(\pm i\, \omega\, t) \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (11)$$

Oscilator armonic - ecuația de mișcare

- Căutăm ecuația de mișcare a unei particule de masă m supusă acțiunii unei forțe elastice 1-dimensionale: $F(x) = -kx$?
- In mecanica Newton $F = m\ddot{x}$, iar ec. de mișcare este $\boxed{-kx = m\ddot{x}}$ (9)
- Acum, Lagrangian-ul: $L = T - V$, iar $q \equiv x$,

$$\text{unde } T = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad iar \quad V = -\int F(x)\,dx = \frac{kx^2}{2}$$

$$\text{Adică, } \boxed{L(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2} \implies \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \ ; \ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad (10)$$

- Final, ecuația de mișcare Euler-Lagrange (7) $\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$ este, pt. oscilatorul armonic: $-kx - \dfrac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0$ adică, $-kx = m\ddot{x}$, la fel ca în mecanica newtoniană (9).
- Prin integrarea ecuației de mișcare se obține "traiectoria" $x = x(t)$ a particulei. In cazul de față, *mișcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0 \exp(\pm i\,\omega\,t) \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (11)$$

Oscilator armonic - ecuația de mișcare

- Căutăm ecuația de mișcare a unei particule de masă m supusă acțiunii unei forțe elastice 1-dimensionale: $F(x) = -kx$?
- In mecanica Newton $F = m\ddot{x}$, iar ec. de mișcare este $\boxed{-kx = m\ddot{x}}$ (9)
- Acum, Lagrangian-ul: $L = T - V$, iar $q \equiv x$,

$$\text{unde } T = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad iar \quad V = -\int F(x)\,dx = \frac{kx^2}{2}$$

$$\text{Adică, } \boxed{L(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2} \implies \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \;;\; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad (10)$$

- Final, ecuația de mișcare Euler-Lagrange (7) $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$ este, pt. oscilatorul armonic: $-kx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0$ adică, $-kx = m\ddot{x}$, la fel ca în mecanica newtoniană (9).
- Prin integrarea ecuației de mișcare se obține "traiectoria" $x = x(t)$ a particulei. In cazul de față, *mișcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0 \exp\left(\pm i\,\omega\, t\right) \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (11)$$

Particula încărcată în câmp electric și magnetic

- Asupra unei particule cu sarcină electrică q, aflată în câmp electric $\vec{E}$ și câmp magnetic $\vec{B}$, acționează *forța Lorentz*:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) \tag{12}$$

- Legătura între $\vec{E}$ și $\vec{B}$ cu potențialele scalar φ și vectorial $\vec{A}$ este dată de (vezi Ec. Maxwell pt. potențiale):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{13}$$

- Inlocuind (13) în (12), obținem:

$$\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right)$$

- Dezvoltarea triplului produs vectorial

$$\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$$

conduce la expresia forței Lorentz: $\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \underbrace{\left[\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right]} + \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right)$

dar $\quad \dfrac{d}{dt}\vec{A}(\vec{x},t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x},t) + \sum_j \dfrac{dx_j}{dt}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\vec{A}(\vec{x},t) = \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$

- In final, expresia forței Lorentz este:

$$\boxed{\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right)} \tag{14}$$

Particula încărcată în câmp electric și magnetic

- Asupra unei particule cu sarcină electrică q, aflată în câmp electric $\vec{E}$ și câmp magnetic $\vec{B}$, acționează *forța Lorentz*:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \qquad (12)$$

- Legătura între $\vec{E}$ și $\vec{B}$ cu potențialele scalar φ și vectorial $\vec{A}$ este dată de (vezi Ec. Maxwell pt. potențiale):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad (13)$$

- Inlocuind (13) în (12), obținem:

$$\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right)$$

- Dezvoltarea triplului produs vectorial

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

conduce la expresia forței Lorentz: $\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \underbrace{\left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}\right]} + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A})\right)$

dar $\quad \frac{d}{dt}\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x}, t) + \sum_j \frac{dx_j}{dt}\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$

- In final, expresia forței Lorentz este:

$$\boxed{\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A})\right)} \qquad (14)$$

Particula încărcată în câmp electric și magnetic

- Asupra unei particule cu sarcină electrică q, aflată în câmp electric $\vec{E}$ și câmp magnetic $\vec{B}$, acționează *forța Lorentz*:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{12}$$

- Legătura între $\vec{E}$ și $\vec{B}$ cu potențialele scalar φ și vectorial $\vec{A}$ este dată de (vezi Ec. Maxwell pt. potențiale):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{13}$$

- Inlocuind (13) în (12), obținem: $\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right)$

- Dezvoltarea triplului produs vectorial $\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$

conduce la expresia forței Lorentz: $\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \underbrace{\left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}\right]} + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A})\right)$

dar $\quad \frac{d}{dt}\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x}, t) + \sum_j \frac{dx_j}{dt}\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$

- In final, expresia forței Lorentz este:

$$\boxed{\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A})\right)} \tag{14}$$

Particula încărcată în câmp electric și magnetic

- Asupra unei particule cu sarcină electrică q, aflată în câmp electric $\vec{E}$ și câmp magnetic $\vec{B}$, acționează *forța Lorentz*:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \qquad (12)$$

- Legătura între $\vec{E}$ și $\vec{B}$ cu potențialele scalar φ și vectorial $\vec{A}$ este dată de (vezi Ec. Maxwell pt. potențiale):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad (13)$$

- Inlocuind (13) în (12), obținem:

$$\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right)$$

- Dezvoltarea triplului produs vectorial

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

conduce la expresia forței Lorentz:

$$\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \underbrace{\left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}\right]} + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A})\right)$$

dar

$$\frac{d}{dt}\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x}, t) + \sum_j \frac{dx_j}{dt}\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

- In final, expresia forței Lorentz este:

$$\boxed{\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A})\right)} \qquad (14)$$

Particula încărcată în câmp electric și magnetic

- Asupra unei particule cu sarcină electrică q, aflată în câmp electric $\vec{E}$ și câmp magnetic $\vec{B}$, acționează *forța Lorentz*:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{12}$$

- Legătura între $\vec{E}$ și $\vec{B}$ cu potențialele scalar φ și vectorial $\vec{A}$ este dată de (vezi Ec. Maxwell pt. potențiale):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{13}$$

- Inlocuind (13) în (12), obținem:

$$\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right)$$

- Dezvoltarea triplului produs vectorial

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

conduce la expresia forței Lorentz:

$$\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \underbrace{\left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}\right]} + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A})\right)$$

dar

$$\frac{d}{dt}\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x}, t) + \sum_j \frac{dx_j}{dt}\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

- In final, expresia forței Lorentz este:

$$\boxed{\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A})\right)} \tag{14}$$

Particula încărcată în câmp electric și magnetic

- Asupra unei particule cu sarcină electrică q, aflată în câmp electric $\vec{E}$ și câmp magnetic $\vec{B}$, acționează *forța Lorentz*:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{12}$$

- Legătura între $\vec{E}$ și $\vec{B}$ cu potențialele scalar φ și vectorial $\vec{A}$ este dată de (vezi Ec. Maxwell pt. potențiale):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{13}$$

- Inlocuind (13) în (12), obținem:

$$\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right)$$

- Dezvoltarea triplului produs vectorial

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

conduce la expresia forței Lorentz: $\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \left[\underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}}\right] + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A})\right)$

dar $$\frac{d}{dt}\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x}, t) + \sum_j \frac{dx_j}{dt}\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

- In final, expresia forței Lorentz este:

$$\boxed{\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A})\right)} \tag{14}$$

Particula încărcată în câmp electric și magnetic

- Asupra unei particule cu sarcină electrică q, aflată în câmp electric $\vec{E}$ și câmp magnetic $\vec{B}$, acționează *forța Lorentz*:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{12}$$

- Legătura între $\vec{E}$ și $\vec{B}$ cu potențialele scalar φ și vectorial $\vec{A}$ este dată de (vezi Ec. Maxwell pt. potențiale):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{13}$$

- Inlocuind (13) în (12), obținem:

$$\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right)$$

- Dezvoltarea triplului produs vectorial

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

conduce la expresia forței Lorentz: $\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \underbrace{\left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}\right]} + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A})\right)$

dar $$\frac{d}{dt}\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x}, t) + \sum_j \frac{dx_j}{dt}\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

- In final, expresia forței Lorentz este:

$$\boxed{\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A})\right)} \tag{14}$$

Lagrangian și Hamiltonian de particulă în câmp E și M

- Pt. ec. de mișcare a unei particule de sarcină q aflată în câmp Electric și Magnetic staționar, căutăm Lagrangian-ul și Hamiltonian-ul corespunzător.
- Pentru mișcarea unidimensională: $T = \dfrac{m\dot{x}^2}{2}$ iar $V = -\int F(x)\,dx$
- Forța Lorentz (14) $F(x)$, independentă de timp: $\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right)$

$$dL_{mec} = F\cdot dx = -q\,\frac{d\varphi}{dx}dx + q\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{A})}{dx}dx = -q\,d\varphi + q\,d(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

Deci, în final, energia potențială este: $$V = -\int F(x)\,dx = q\,\varphi - q\,\dot{x}A \qquad (15)$$

- Lagrangian-ul: $\boxed{L = T - V = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} - q\,\varphi + q\dot{x}A}$ iar $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA$ (16)
- Hamiltonian-ul: $H = p\dot{x} - L = (m\dot{x} + \cancel{qA})\dot{x} - \dfrac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi - \cancel{q\dot{x}A} = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi$
- Inlocuind $\dot{x} \to p$ din (16) $\dot{x} = \dfrac{p - qA}{m}$ obținem $\boxed{H = \dfrac{(p-qA)^2}{2m} + q\varphi}$
- In absența câmpului EM: $H = \dfrac{p^2}{2m}$
- Contribuția câmpului magnetic se traduce prin înlocuirea: $p \to (p - qA)$.

Lagrangian și Hamiltonian de particulă în câmp E și M

- Pt. ec. de mișcare a unei particule de sarcină q aflată în câmp Electric și Magnetic staționar, căutăm Lagrangian-ul și Hamiltonian-ul corespunzător.
- Pentru mișcarea unidimensională: $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ iar $V = -\int F(x)\,dx$
- Forța Lorentz (14) $F(x)$, independentă de timp: $\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right)$

$$dL_{mec} = F\cdot dx = -q\,\frac{d\varphi}{dx}dx + q\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{A})}{dx}dx = -q\,d\varphi + q\,d(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

Deci, în final, energia potențială este: $$V = -\int F(x)\,dx = q\,\varphi - q\,\dot{x}A \qquad (15)$$

- Lagrangian-ul: $\boxed{L = T - V = \frac{m\dot{x}^2}{2} - q\,\varphi + q\dot{x}A}$ iar $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA \qquad (16)$
- Hamiltonian-ul: $H = p\dot{x} - L = (m\dot{x} + \cancel{qA})\dot{x} - \frac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi - \cancel{q\dot{x}A} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi$
- Inlocuind $\dot{x} \to p$ din (16) $\dot{x} = \frac{p - qA}{m}$ obținem $\boxed{H = \frac{(p-qA)^2}{2m} + q\varphi}$
- In absența câmpului EM: $H = \frac{p^2}{2m}$
- Contribuția câmpului magnetic se traduce prin înlocuirea: $p \to (p - qA)$.

Lagrangian și Hamiltonian de particulă în câmp E și M

- Pt. ec. de mișcare a unei particule de sarcină q aflată în câmp Electric și Magnetic staționar, căutăm Lagrangian-ul și Hamiltonian-ul corespunzător.
- Pentru mișcarea unidimensională: $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ iar $V = -\int F(x)\, dx$
- Forța Lorentz (14) $F(x)$, independentă de timp: $\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right)$

$$dL_{mec} = F\cdot dx = -q\,\frac{d\varphi}{dx}dx + q\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{A})}{dx}dx = -q\,d\varphi + q\,d(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

Deci, în final, energia potențială este: $$V = -\int F(x)\, dx = q\,\varphi - q\,\dot{x}A \qquad (15)$$

- Lagrangian-ul: $\boxed{L = T - V = \frac{m\dot{x}^2}{2} - q\,\varphi + q\dot{x}A}$ iar $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA \qquad (16)$
- Hamiltonian-ul: $H = p\dot{x} - L = (m\dot{x} + \cancel{qA})\dot{x} - \frac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi - \cancel{q\dot{x}A} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi$
- Inlocuind $\dot{x} \to p$ din (16) $\dot{x} = \frac{p - qA}{m}$ obținem $\boxed{H = \frac{(p-qA)^2}{2m} + q\varphi}$
- In absența câmpului EM: $H = \frac{p^2}{2m}$
- Contribuția câmpului magnetic se traduce prin înlocuirea: $p \to (p - qA)$.

Lagrangian și Hamiltonian de particulă în câmp E și M

- Pt. ec. de mișcare a unei particule de sarcină q aflată în câmp Electric și Magnetic staționar, căutăm Lagrangian-ul și Hamiltonian-ul corespunzător.
- Pentru mișcarea unidimensională: $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ iar $V = -\int F(x)\, dx$
- Forța Lorentz (14) $F(x)$, independentă de timp: $\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A})\right)$

$$dL_{mec} = F \cdot dx = -q\,\frac{d\varphi}{dx}dx + q\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{A})}{dx}dx = -q\, d\varphi + q\, d(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

Deci, în final, energia potențială este: $$V = -\int F(x)\, dx = q\,\varphi - q\,\dot{x}A \qquad (15)$$

- Lagrangian-ul: $\boxed{L = T - V = \frac{m\dot{x}^2}{2} - q\,\varphi + q\dot{x}A}$ iar $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA \qquad (16)$
- Hamiltonian-ul: $H = p\dot{x} - L = (m\dot{x} + \cancel{qA})\dot{x} - \frac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi - \cancel{q\dot{x}A} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi$
- Inlocuind $\dot{x} \to p$ din (16) $\dot{x} = \frac{p - qA}{m}$ obținem $\boxed{H = \frac{(p - qA)^2}{2m} + q\varphi}$
- In absența câmpului EM: $H = \frac{p^2}{2m}$
- Contribuția câmpului magnetic se traduce prin înlocuirea: $p \to (p - qA)$.

Lagrangian și Hamiltonian de particulă în câmp E și M

- Pt. ec. de mișcare a unei particule de sarcină q aflată în câmp Electric și Magnetic staționar, căutăm Lagrangian-ul și Hamiltonian-ul corespunzător.
- Pentru mișcarea unidimensională: $T = \dfrac{m\dot{x}^2}{2}$ iar $V = -\int F(x)\,dx$
- Forța Lorentz (14) $F(x)$, independentă de timp: $\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right)$

  $$dL_{mec} = F\cdot dx = -q\,\frac{d\varphi}{dx}dx + q\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{A})}{dx}dx = -q\,d\varphi + q\,d(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

  Deci, în final, energia potențială este: $$V = -\int F(x)\,dx = q\,\varphi - q\,\dot{x}A \qquad (15)$$
- Lagrangian-ul: $\boxed{L = T - V = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} - q\,\varphi + q\dot{x}A}$ iar $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA \qquad (16)$
- Hamiltonian-ul: $H = p\dot{x} - L = (m\dot{x} + \cancel{qA})\dot{x} - \dfrac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi - \cancel{q\dot{x}A} = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi$
- Inlocuind $\dot{x} \to p$ din (16) $\dot{x} = \dfrac{p - qA}{m}$ obținem $\boxed{H = \dfrac{(p-qA)^2}{2m} + q\varphi}$
- In absența câmpului EM: $H = \dfrac{p^2}{2m}$
- Contribuția câmpului magnetic se traduce prin înlocuirea: $p \to (p - qA)$.

Lagrangian și Hamiltonian de particulă în câmp E și M

- Pt. ec. de mișcare a unei particule de sarcină q aflată în câmp Electric și Magnetic staționar, căutăm Lagrangian-ul și Hamiltonian-ul corespunzător.
- Pentru mișcarea unidimensională: $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ iar $V = -\int F(x)\,dx$
- Forța Lorentz (14) $F(x)$, independentă de timp: $\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right)$

$$dL_{mec} = F\cdot dx = -q\,\frac{d\varphi}{dx}dx + q\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{A})}{dx}dx = -q\,d\varphi + q\,d(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

Deci, în final, energia potențială este: $$V = -\int F(x)\,dx = q\,\varphi - q\,\dot{x}A \qquad (15)$$

- Lagrangian-ul: $\boxed{L = T - V = \frac{m\dot{x}^2}{2} - q\,\varphi + q\dot{x}A}$ iar $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA \qquad (16)$
- Hamiltonian-ul: $H = p\dot{x} - L = (m\dot{x} + \cancel{qA})\dot{x} - \frac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi - \cancel{q\dot{x}A} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi$
- Inlocuind $\dot{x} \to p$ din (16) $\dot{x} = \frac{p - qA}{m}$ obținem $\boxed{H = \frac{(p-qA)^2}{2m} + q\varphi}$
- In absența câmpului EM: $H = \frac{p^2}{2m}$
- Contribuția câmpului magnetic se traduce prin înlocuirea: $p \to (p - qA)$.

Lagrangian și Hamiltonian de particulă în câmp E și M

- Pt. ec. de mișcare a unei particule de sarcină q aflată în câmp Electric și Magnetic staționar, căutăm Lagrangian-ul și Hamiltonian-ul corespunzător.
- Pentru mișcarea unidimensională: $T = \dfrac{m\dot{x}^2}{2}$ iar $V = -\displaystyle\int F(x)\,dx$
- Forța Lorentz (14) $F(x)$, independentă de timp: $\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right)$

  $$dL_{mec} = F \cdot dx = -q\,\frac{d\varphi}{dx}dx + q\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{A})}{dx}dx = -q\,d\varphi + q\,d(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

  Deci, în final, energia potențială este: $$V = -\int F(x)\,dx = q\,\varphi - q\,\dot{x}A \qquad (15)$$
- Lagrangian-ul: $\boxed{L = T - V = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} - q\,\varphi + q\dot{x}A}$ iar $$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA \qquad (16)$$
- Hamiltonian-ul: $H = p\dot{x} - L = (m\dot{x} + \cancel{qA})\dot{x} - \dfrac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi - \cancel{q\dot{x}A} = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi$
- Inlocuind $\dot{x} \to p$ din (16) $\dot{x} = \dfrac{p - qA}{m}$ obținem $\boxed{H = \dfrac{(p - qA)^2}{2m} + q\varphi}$
- In absența câmpului EM: $H = \dfrac{p^2}{2m}$
- Contribuția câmpului magnetic se traduce prin înlocuirea: $p \to (p - qA)$.

Lagrangian și Hamiltonian de particulă în câmp E și M

- Pt. ec. de mișcare a unei particule de sarcină q aflată în câmp Electric și Magnetic staționar, căutăm Lagrangian-ul și Hamiltonian-ul corespunzător.
- Pentru mișcarea unidimensională: $T = \dfrac{m\dot{x}^2}{2}$ iar $V = -\displaystyle\int F(x)\,dx$
- Forța Lorentz (14) $F(x)$, independentă de timp: $\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right)$

$$dL_{mec} = F\cdot dx = -q\,\frac{d\varphi}{dx}dx + q\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{A})}{dx}dx = -q\,d\varphi + q\,d(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

Deci, în final, energia potențială este: $$V = -\int F(x)\,dx = q\,\varphi - q\,\dot{x}A \qquad (15)$$

- Lagrangian-ul: $\boxed{L = T - V = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} - q\,\varphi + q\dot{x}A}$ iar $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA$ (16)
- Hamiltonian-ul: $H = p\dot{x} - L = (m\dot{x} + \cancel{qA})\dot{x} - \dfrac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi - \cancel{q\dot{x}A} = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi$
- Inlocuind $\dot{x} \to p$ din (16) $\dot{x} = \dfrac{p - qA}{m}$ obținem $\boxed{H = \dfrac{(p-qA)^2}{2m} + q\varphi}$
- In absența câmpului EM: $H = \dfrac{p^2}{2m}$
- Contribuția câmpului magnetic se traduce prin înlocuirea: $p \to (p - qA)$.

Lagrangian și Hamiltonian de particulă în câmp E și M

- Pt. ec. de mișcare a unei particule de sarcină q aflată în câmp Electric și Magnetic staționar, căutăm Lagrangian-ul și Hamiltonian-ul corespunzător.
- Pentru mișcarea unidimensională: $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ iar $V = -\int F(x)\,dx$
- Forța Lorentz (14) $F(x)$, independentă de timp: $\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right)$

$$dL_{mec} = F\cdot dx = -q\,\frac{d\varphi}{dx}dx + q\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{A})}{dx}dx = -q\,d\varphi + q\,d(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

Deci, în final, energia potențială este: $$V = -\int F(x)\,dx = q\,\varphi - q\,\dot{x}A \qquad (15)$$

- Lagrangian-ul: $\boxed{L = T - V = \frac{m\dot{x}^2}{2} - q\,\varphi + q\dot{x}A}$ iar $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA \qquad (16)$
- Hamiltonian-ul: $H = p\dot{x} - L = (m\dot{x} + \cancel{qA})\dot{x} - \frac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi - \cancel{q\dot{x}A} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi$
- Inlocuind $\dot{x} \to p$ din (16) $\dot{x} = \frac{p - qA}{m}$ obținem $\boxed{H = \frac{(p-qA)^2}{2m} + q\varphi}$
- In absența câmpului EM: $H = \frac{p^2}{2m}$
- Contribuția câmpului magnetic se traduce prin înlocuirea: $p \to (p - qA)$.

Lagrangian și Hamiltonian de particulă în câmp E și M

- Pt. ec. de mișcare a unei particule de sarcină q aflată în câmp Electric și Magnetic staționar, căutăm Lagrangian-ul și Hamiltonian-ul corespunzător.
- Pentru mișcarea unidimensională: $T = \dfrac{m\dot{x}^2}{2}$ iar $V = -\int F(x)\,dx$
- Forța Lorentz (14) $F(x)$, independentă de timp: $\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right)$

$$dL_{mec} = F\cdot dx = -q\,\frac{d\varphi}{dx}dx + q\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{A})}{dx}dx = -q\,d\varphi + q\,d(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

Deci, în final, energia potențială este: $$V = -\int F(x)\,dx = q\,\varphi - q\,\dot{x}A \qquad (15)$$

- Lagrangian-ul: $\boxed{L = T - V = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} - q\,\varphi + q\dot{x}A}$ iar $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA$ (16)
- Hamiltonian-ul: $H = p\dot{x} - L = (m\dot{x} + \cancel{qA})\dot{x} - \dfrac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi - \cancel{q\dot{x}A} = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi$
- Inlocuind $\dot{x} \to p$ din (16) $\dot{x} = \dfrac{p - qA}{m}$ obținem $\boxed{H = \dfrac{(p - qA)^2}{2m} + q\varphi}$
- In absența câmpului EM: $H = \dfrac{p^2}{2m}$
- Contribuția câmpului magnetic se traduce prin înlocuirea: $p \to (p - qA)$.

Vectori Covarianți și Contravarianți

- $\boxed{x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) = (x^0, \vec{x})}$ **vector contravariant**

  Produsul scalar: $x \cdot y = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \equiv x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$

- Datorită semnului minus, introducem un nou tip de 4-vector, $\boxed{x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -x, -y, -z) = (x_0, -\vec{x})}$ **vector covariant**

  Produsul scalar se va scrie: $x \cdot y = x_\mu y^\mu = x_0 y^0 - x_1 y^1 - x_2 y^2 - x_3 y^3$

- Dacă folosim versorii spațiali: e_1, e_2, e_3, și versorul temporal: e_0, 4-vectorii de poziție se scriu: $x = e_\mu x^\mu \quad y = e_\nu y^\nu$.

$$x \cdot y = \underbrace{e_\mu e_\nu}_{g_{\mu\nu}} x^\mu y^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \tag{17}$$

  - Aici am introdus *tensorul (metric)* $g_{\mu\nu}$, definit prin

$$g_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

  - similar: $g^{\mu\nu} = e^\mu e^\nu = g_{\mu\nu}$.

Vectori Covarianți și Contravarianți

- $\boxed{x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) = (x^0, \vec{x})}$ **vector contravariant**

  Produsul scalar: $x \cdot y = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \equiv x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$

- Datorită semnului minus, introducem un nou tip de 4-vector, $\boxed{x_{\mu} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -x, -y, -z) = (x_0, -\vec{x})}$ **vector covariant**

  Produsul scalar se va scrie: $x \cdot y = x_{\mu} y^{\mu} = x_0 y^0 - x_1 y^1 - x_2 y^2 - x_3 y^3$

- Dacă folosim versorii spațiali: e_1, e_2, e_3, și versorul temporal: e_0, 4-vectorii de poziție se scriu: $x = e_{\mu} x^{\mu} \quad y = e_{\nu} y^{\nu}$.

$$x \cdot y = \underbrace{e_{\mu} e_{\nu}}_{g_{\mu\nu}} x^{\mu} y^{\nu} = g_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu} \qquad (17)$$

- Aici am introdus *tensorul (metric)* $g_{\mu\nu}$, definit prin

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu} e_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (18)$$

- similar: $g^{\mu\nu} = e^{\mu} e^{\nu} = g_{\mu\nu}$.

Vectori Covarianți și Contravarianți

- $\boxed{x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) = (x^0, \vec{x})}$ **vector contravariant**

  Produsul scalar: $x \cdot y = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \equiv x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$
- Datorită semnului minus, introducem un nou tip de 4-vector,

  $\boxed{x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -x, -y, -z) = (x_0, -\vec{x})}$ **vector covariant**

  Produsul scalar se va scrie: $x \cdot y = x_\mu y^\mu = x_0 y^0 - x_1 y^1 - x_2 y^2 - x_3 y^3$
- Dacă folosim versorii spațiali: e_1, e_2, e_3, și versorul temporal: e_0, 4-vectorii de poziție se scriu: $x = e_\mu x^\mu \quad y = e_\nu y^\nu$.

$$x \cdot y = \underbrace{e_\mu e_\nu}_{g_{\mu\nu}} x^\mu y^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \tag{17}$$

  - Aici am introdus *tensorul (metric)* $g_{\mu\nu}$, definit prin

$$g_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

  - similar: $g^{\mu\nu} = e^\mu e^\nu = g_{\mu\nu}$.

Vectori Covarianți și Contravarianți

- $\boxed{x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) = (x^0, \vec{x})}$ **vector contravariant**

  Produsul scalar: $x \cdot y = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \equiv x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$

- Datorită semnului minus, introducem un nou tip de 4-vector,

  $\boxed{x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -x, -y, -z) = (x_0, -\vec{x})}$ **vector covariant**

  Produsul scalar se va scrie: $x \cdot y = x_\mu y^\mu = x_0 y^0 - x_1 y^1 - x_2 y^2 - x_3 y^3$

- Dacă folosim versorii spațiali: e_1, e_2, e_3, și versorul temporal: e_0, 4-vectorii de poziție se scriu: $x = e_\mu x^\mu \quad y = e_\nu y^\nu$.

$$x \cdot y = \underbrace{e_\mu e_\nu}_{g_{\mu\nu}} x^\mu y^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \qquad (17)$$

- Aici am introdus *tensorul (metric)* $g_{\mu\nu}$, definit prin

$$g_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (18)$$

- similar: $g^{\mu\nu} = e^\mu e^\nu = g_{\mu\nu}$.

Vectori Covarianți și Contravarianți

- $\boxed{x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) = (x^0, \vec{x})}$ **vector contravariant**

  Produsul scalar: $x \cdot y = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \equiv x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$
- Datorită semnului minus, introducem un nou tip de 4-vector,

  $\boxed{x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -x, -y, -z) = (x_0, -\vec{x})}$ **vector covariant**

  Produsul scalar se va scrie: $x \cdot y = x_\mu y^\mu = x_0 y^0 - x_1 y^1 - x_2 y^2 - x_3 y^3$
- Dacă folosim versorii spațiali: e_1, e_2, e_3, și versorul temporal: e_0, 4-vectorii de poziție se scriu: $x = e_\mu x^\mu \quad y = e_\nu y^\nu$.

$$x \cdot y = \underbrace{e_\mu e_\nu}_{g_{\mu\nu}} x^\mu y^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \tag{17}$$

- Aici am introdus *tensorul (metric)* $g_{\mu\nu}$, definit prin

$$g_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

- similar: $g^{\mu\nu} = e^\mu e^\nu = g_{\mu\nu}.$

Vectori Covarianți și Contravarianți

- $\boxed{x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) = (x^0, \vec{x})}$ **vector contravariant**

  Produsul scalar: $x \cdot y = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \equiv x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$
- Datorită semnului minus, introducem un nou tip de 4-vector,

  $\boxed{x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -x, -y, -z) = (x_0, -\vec{x})}$ **vector covariant**

  Produsul scalar se va scrie: $x \cdot y = x_\mu y^\mu = x_0 y^0 - x_1 y^1 - x_2 y^2 - x_3 y^3$
- Dacă folosim versorii spațiali: e_1, e_2, e_3, și versorul temporal: e_0, 4-vectorii de poziție se scriu: $x = e_\mu x^\mu \quad y = e_\nu y^\nu$.

$$x \cdot y = \underbrace{e_\mu e_\nu}_{g_{\mu\nu}} x^\mu y^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \tag{17}$$

- Aici am introdus *tensorul (metric)* $g_{\mu\nu}$, definit prin

$$g_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

- similar: $g^{\mu\nu} = e^\mu e^\nu = g_{\mu\nu}.$

Vectori Covarianți și Contravarianți

- $\boxed{x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) = (x^0, \vec{x})}$ **vector contravariant**

  Produsul scalar: $x \cdot y = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \equiv x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$
- Datorită semnului minus, introducem un nou tip de 4-vector, $\boxed{x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -x, -y, -z) = (x_0, -\vec{x})}$ **vector covariant**

  Produsul scalar se va scrie: $x \cdot y = x_\mu y^\mu = x_0 y^0 - x_1 y^1 - x_2 y^2 - x_3 y^3$
- Dacă folosim versorii spațiali: e_1, e_2, e_3, și versorul temporal: e_0, 4-vectorii de poziție se scriu: $x = e_\mu x^\mu \quad y = e_\nu y^\nu$.

$$x \cdot y = \underbrace{e_\mu e_\nu}_{g_{\mu\nu}} x^\mu y^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \tag{17}$$

- Aici am introdus *tensorul (metric)* $g_{\mu\nu}$, definit prin

$$g_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

- similar: $g^{\mu\nu} = e^\mu e^\nu = g_{\mu\nu}$.

Exemple de 4-vectori și forme diferențiale

- **4-vec de poziție:** $x^\mu = (ct, x, y, z)$; $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$; $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad x_\mu = (ct \quad -\vec{x}) \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial^t & \vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

$$\partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = \Box^2 \quad \text{unde} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x^1}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial x^2}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial x^3}\vec{k}$$

$$\boxed{ds^2 = dx_\mu dx^\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \quad \text{Interval 4-dimensional}$$

- **4-vec energie-moment:** $p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)$; $p_\mu = (E/c, -p_x, -p_y, -p_z)$

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad p_\mu = (E/c \quad -\vec{p}) \quad \boxed{p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2}$$

Relația masă-energ.

- **4-vec potențial:** $A^\mu = (\phi/c, A_x, A_y, A_z)$; $A_\mu = (\phi/c, -A_x, -A_y, -A_z)$

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad A_\mu = \left(\phi/c \quad -\vec{A}\right) \quad \boxed{\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$$

Transf. calibrare Lorenz

- **4-vec curent:** $j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z)$; $j_\mu = (c\rho, -j_x, -j_y, -j_z)$

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \quad j_\mu = \left(c\rho \quad -\vec{j}\right) \quad \boxed{\partial_\mu j^\mu \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}$$

Ec. cont.

Exemple de 4-vectori și forme diferențiale

- **4-vec de poziție:** $x^\mu = (ct, x, y, z)$; $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$; $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad x_\mu = \begin{pmatrix} ct & -\vec{x} \end{pmatrix} \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial^t & \vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

$$\partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = \Box^2 \quad \text{unde} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x^1}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial x^2}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial x^3}\vec{k}$$

$$\boxed{ds^2 = dx_\mu dx^\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$ Interval 4-dimensional

- **4-vec energie-moment:** $p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)$; $p_\mu = (E/c, -p_x, -p_y, -p_z)$

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad p_\mu = \begin{pmatrix} E/c & -\vec{p} \end{pmatrix} \quad \boxed{p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2}$$ Relația masă-energ.

- **4-vec potențial:** $A^\mu = (\phi/c, A_x, A_y, A_z)$; $A_\mu = (\phi/c, -A_x, -A_y, -A_z)$

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad A_\mu = \begin{pmatrix} \phi/c & -\vec{A} \end{pmatrix} \quad \boxed{\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$$ Transf. calibrare Lorenz

- **4-vec curent:** $j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z)$; $j_\mu = (c\rho, -j_x, -j_y, -j_z)$

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \quad j_\mu = \begin{pmatrix} c\rho & -\vec{j} \end{pmatrix} \quad \boxed{\partial_\mu j^\mu \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}$$ Ec. cont.

Exemple de 4-vectori și forme diferențiale

- **4-vec de poziție:** $x^\mu = (ct, x, y, z)$; $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$; $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad x_\mu = \begin{pmatrix} ct & -\vec{x} \end{pmatrix} \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial^t & \vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

$$\partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = \Box^2 \quad \text{unde} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x^1}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial x^2}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial x^3}\vec{k}$$

$$\boxed{ds^2 = dx_\mu dx^\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \quad \text{Interval 4-dimensional}$$

- **4-vec energie-moment:** $p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)$; $p_\mu = (E/c, -p_x, -p_y, -p_z)$

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad p_\mu = \begin{pmatrix} E/c & -\vec{p} \end{pmatrix} \quad \boxed{p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2} \quad \text{Relația masă-energ.}$$

- **4-vec potențial:** $A^\mu = (\phi/c, A_x, A_y, A_z)$; $A_\mu = (\phi/c, -A_x, -A_y, -A_z)$

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad A_\mu = \begin{pmatrix} \phi/c & -\vec{A} \end{pmatrix} \quad \boxed{\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0} \quad \text{Transf. calibrare Lorenz}$$

- **4-vec curent:** $j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z)$; $j_\mu = (c\rho, -j_x, -j_y, -j_z)$

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \quad j_\mu = \begin{pmatrix} c\rho & -\vec{j} \end{pmatrix} \quad \boxed{\partial_\mu j^\mu \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0} \quad \text{Ec. cont.}$$

Exemple de 4-vectori și forme diferențiale

- **4-vec de poziție:** $x^\mu = (ct, x, y, z)$; $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$; $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad x_\mu = \begin{pmatrix} ct & -\vec{x} \end{pmatrix} \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial^t & \vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

$$\partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = \Box^2 \quad \text{unde} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x^1}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial x^2}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial x^3}\vec{k}$$

$$\boxed{ds^2 = dx_\mu dx^\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$ Interval 4-dimensional

- **4-vec energie-moment:** $p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)$; $p_\mu = (E/c, -p_x, -p_y, -p_z)$

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad p_\mu = \begin{pmatrix} E/c & -\vec{p} \end{pmatrix} \quad \boxed{p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2}$$ Relația masă-energ.

- **4-vec potențial:** $A^\mu = (\phi/c, A_x, A_y, A_z)$; $A_\mu = (\phi/c, -A_x, -A_y, -A_z)$

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad A_\mu = \begin{pmatrix} \phi/c & -\vec{A} \end{pmatrix} \quad \boxed{\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$$ Transf. calibrare Lorenz

- **4-vec curent:** $j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z)$; $j_\mu = (c\rho, -j_x, -j_y, -j_z)$

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \quad j_\mu = \begin{pmatrix} c\rho & -\vec{j} \end{pmatrix} \quad \boxed{\partial_\mu j^\mu \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}$$ Ec. cont.

Exemple de 4-vectori și forme diferențiale

- **4-vec de poziție:** $x^\mu = (ct, x, y, z)$; $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$; $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad x_\mu = \begin{pmatrix} ct & -\vec{x} \end{pmatrix} \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial^t & \vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

$$\partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = \square^2 \quad \text{unde} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x^1}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial x^2}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial x^3}\vec{k}$$

$$\boxed{ds^2 = dx_\mu dx^\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$ Interval 4-dimensional

- **4-vec energie-moment:** $p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)$; $p_\mu = (E/c, -p_x, -p_y, -p_z)$

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad p_\mu = \begin{pmatrix} E/c & -\vec{p} \end{pmatrix} \quad \boxed{p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2}$$ Relația masă-energ.

- **4-vec potențial:** $A^\mu = (\phi/c, A_x, A_y, A_z)$; $A_\mu = (\phi/c, -A_x, -A_y, -A_z)$

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad A_\mu = \begin{pmatrix} \phi/c & -\vec{A} \end{pmatrix} \quad \boxed{\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$$ Transf. calibrare Lorenz

- **4-vec curent:** $j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z)$; $j_\mu = (c\rho, -j_x, -j_y, -j_z)$

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \quad j_\mu = \begin{pmatrix} c\rho & -\vec{j} \end{pmatrix} \quad \boxed{\partial_\mu j^\mu \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}$$ Ec. cont.

Exemple de 4-vectori și forme diferențiale

- **4-vec de poziție:** $x^\mu = (ct, x, y, z)$; $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$; $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad x_\mu = \begin{pmatrix} ct & -\vec{x} \end{pmatrix} \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial^t & \vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

$$\partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = \Box^2 \quad \text{unde} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x^1}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial x^2}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial x^3}\vec{k}$$

$$\boxed{ds^2 = dx_\mu dx^\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \quad \text{Interval 4-dimensional}$$

- **4-vec energie-moment:** $p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)$; $p_\mu = (E/c, -p_x, -p_y, -p_z)$

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad p_\mu = \begin{pmatrix} E/c & -\vec{p} \end{pmatrix} \quad \boxed{p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2} \quad \text{Relația masă-energ.}$$

- **4-vec potențial:** $A^\mu = (\phi/c, A_x, A_y, A_z)$; $A_\mu = (\phi/c, -A_x, -A_y, -A_z)$

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad A_\mu = \begin{pmatrix} \phi/c & -\vec{A} \end{pmatrix} \quad \boxed{\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0} \quad \text{Transf. calibrare Lorenz}$$

- **4-vec curent:** $j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z)$; $j_\mu = (c\rho, -j_x, -j_y, -j_z)$

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \quad j_\mu = \begin{pmatrix} c\rho & -\vec{j} \end{pmatrix} \quad \boxed{\partial_\mu j^\mu \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0} \quad \text{Ec. cont.}$$

Exemple de 4-vectori și forme diferențiale

- **4-vec de poziție:** $x^\mu=(ct,x,y,z)$; $x_\mu=(ct,-x,-y,-z)$; $\mu=0,1,2,3$

$$x^\mu=\begin{pmatrix}ct\\ \vec{x}\end{pmatrix}\quad x_\mu=\begin{pmatrix}ct & -\vec{x}\end{pmatrix}\quad \partial^\mu\equiv\frac{\partial}{\partial x_\mu}=\begin{pmatrix}\frac{1}{c}\partial_t\\ -\vec{\nabla}\end{pmatrix}\quad \partial_\mu\equiv\frac{\partial}{\partial x^\mu}=\begin{pmatrix}\frac{1}{c}\partial^t & \vec{\nabla}\end{pmatrix}$$

$$\partial^2\equiv\partial_\mu\partial^\mu=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\vec{\nabla}^2=\Box^2\quad \text{unde}\quad \vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x^1}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial x^2}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial x^3}\vec{k}$$

$$\boxed{ds^2=dx_\mu dx^\mu=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2}\ \text{Interval 4-dimensional}$$

- **4-vec energie-moment:** $p^\mu=(E/c,p_x,p_y,p_z)$; $p_\mu=(E/c,-p_x,-p_y,-p_z)$

$$p^\mu=\begin{pmatrix}E/c\\ \vec{p}\end{pmatrix}\quad p_\mu=\begin{pmatrix}E/c & -\vec{p}\end{pmatrix}\quad \boxed{p_\mu p^\mu=\frac{E^2}{c^2}-\vec{p}^2=m^2c^2}\ \text{Relația masă-energ.}$$

- **4-vec potențial:** $A^\mu=(\phi/c,A_x,A_y,A_z)$; $A_\mu=(\phi/c,-A_x,-A_y,-A_z)$

$$A^\mu=\begin{pmatrix}\phi/c\\ \vec{A}\end{pmatrix}\quad A_\mu=\begin{pmatrix}\phi/c & -\vec{A}\end{pmatrix}\quad \boxed{\partial_\mu A^\mu=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0}\ \text{Transf. calibrare Lorenz}$$

- **4-vec curent:** $j^\mu=(c\rho,j_x,j_y,j_z)$; $j_\mu=(c\rho,-j_x,-j_y,-j_z)$

$$j^\mu=\begin{pmatrix}c\rho\\ \vec{j}\end{pmatrix}\quad j_\mu=\begin{pmatrix}c\rho & -\vec{j}\end{pmatrix}\quad \boxed{\partial_\mu j^\mu=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0}\ \text{Ec. cont.}$$

Exemple de 4-vectori și forme diferențiale

- **4-vec de poziție:** $x^\mu = (ct, x, y, z)$; $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$; $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad x_\mu = (ct \quad -\vec{x}) \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial^t & \vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

$$\partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = \Box^2 \quad \text{unde} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x^1}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial x^2}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial x^3}\vec{k}$$

$$\boxed{ds^2 = dx_\mu dx^\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$ Interval 4-dimensional

- **4-vec energie-moment:** $p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)$; $p_\mu = (E/c, -p_x, -p_y, -p_z)$

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad p_\mu = (E/c \quad -\vec{p}) \quad \boxed{p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2}$$ Relația masă-energ.

- **4-vec potențial:** $A^\mu = (\phi/c, A_x, A_y, A_z)$; $A_\mu = (\phi/c, -A_x, -A_y, -A_z)$

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad A_\mu = \begin{pmatrix} \phi/c & -\vec{A} \end{pmatrix} \quad \boxed{\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$$ Transf. calibrare Lorenz

- **4-vec curent:** $j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z)$; $j_\mu = (c\rho, -j_x, -j_y, -j_z)$

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \quad j_\mu = \begin{pmatrix} c\rho & -\vec{j} \end{pmatrix} \quad \boxed{\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}$$ Ec. cont.

Exemple de 4-vectori și forme diferențiale

- **4-vec de poziție:** $x^\mu = (ct, x, y, z)$; $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$; $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad x_\mu = \begin{pmatrix} ct & -\vec{x} \end{pmatrix} \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial^t & \vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

$$\partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = \Box^2 \quad \text{unde} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x^1}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial x^2}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial x^3}\vec{k}$$

$$\boxed{ds^2 = dx_\mu dx^\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \quad \text{Interval 4-dimensional}$$

- **4-vec energie-moment:** $p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)$; $p_\mu = (E/c, -p_x, -p_y, -p_z)$

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad p_\mu = \begin{pmatrix} E/c & -\vec{p} \end{pmatrix} \quad \boxed{p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2} \quad \text{Relația masă-energ.}$$

- **4-vec potențial:** $A^\mu = (\phi/c, A_x, A_y, A_z)$; $A_\mu = (\phi/c, -A_x, -A_y, -A_z)$

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad A_\mu = \begin{pmatrix} \phi/c & -\vec{A} \end{pmatrix} \quad \boxed{\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0} \quad \text{Transf. calibrare Lorenz}$$

- **4-vec curent:** $j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z)$; $j_\mu = (c\rho, -j_x, -j_y, -j_z)$

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \quad j_\mu = \begin{pmatrix} c\rho & -\vec{j} \end{pmatrix} \quad \boxed{\partial_\mu j^\mu \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0} \quad \text{Ec. cont.}$$

Exemple de 4-vectori și forme diferențiale

- **4-vec de poziție:** $x^\mu = (ct, x, y, z)$; $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$; $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad x_\mu = \begin{pmatrix} ct & -\vec{x} \end{pmatrix} \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial^t & \vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

$$\partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = \Box^2 \quad \text{unde} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x^1}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial x^2}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial x^3}\vec{k}$$

$$\boxed{ds^2 = dx_\mu dx^\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$ Interval 4-dimensional

- **4-vec energie-moment:** $p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)$; $p_\mu = (E/c, -p_x, -p_y, -p_z)$

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad p_\mu = \begin{pmatrix} E/c & -\vec{p} \end{pmatrix} \quad \boxed{p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2}$$ Relația masă-energ.

- **4-vec potențial:** $A^\mu = (\phi/c, A_x, A_y, A_z)$; $A_\mu = (\phi/c, -A_x, -A_y, -A_z)$

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad A_\mu = \begin{pmatrix} \phi/c & -\vec{A} \end{pmatrix} \quad \boxed{\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0}$$ Transf. calibrare Lorenz

- **4-vec curent:** $j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z)$; $j_\mu = (c\rho, -j_x, -j_y, -j_z)$

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \quad j_\mu = \begin{pmatrix} c\rho & -\vec{j} \end{pmatrix} \quad \boxed{\partial_\mu j^\mu \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}$$ Ec. cont.

Trecerea de la Mecanica Clasică la Câmpuri Clasice

- In teoria câmpurilor clasice coordonatele spațiale și timpul nu se mai folosesc ca variabile de mișcare. Ele nu mai descriu mișcarea particulei, sub forma $x^i(t)$, ele sunt acum variabile complet independente ce caracterizează sau etichetează câmpul în diversele puncte din spațiu-timp. Variabila independentă t din mecanică este acum înlocuită prin 4-coordonata x^μ. Singurele mărimi care variază sunt valorile de câmp la trecerea de la un punct la altul sau de la un moment la altul. Acum avem dependența valorilor de câmp $\varphi^r(x^\mu)$ de coordonata 4-dim $x^\mu=(t,\vec{x})$. Pt. a obține ec. de mișcare (Euler-Lagrange sau Hamilton) de câmp clasice, înlocuim:

Mărime fizică	Mecanica clasică	Câmpuri clasice	
Coord. generalizate	q^i	$\varphi^r(\vec{x},t)$	(19)
Viteze generalizate	$\dot{q}^i \equiv \frac{dq^i}{dt}$	$\partial_\mu\varphi^r \equiv \frac{\partial\varphi^r}{\partial x^\mu}$	(20)
Lagrangian	$L(q^i,\dot{q}^i)$	$L(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r)=\int d^3x\,\mathcal{L}(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r)$	(21)
Impulsul conjugat	$p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}$	$\pi_r^\mu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}$	(22)
Acțiunea S	$S=\int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q^i,\dot{q}^i)$	$S=\int d^4x\,\mathcal{L}(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r)$	(23)
Variația $\delta S=0$ da ec. de mișcare Euler-Lagrange	$\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)=0$	$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}\right)=0$	(24)
Hamiltonian	$\mathcal{H}(\varphi^r,\pi_r)=\pi_r\dot{\varphi}^r-\mathcal{L}$	$\mathcal{H}(\varphi^r,\pi_r)=\pi_r^\mu\partial_\mu\varphi^r-\mathcal{L}$	(25)
Ecuații de mișcare Hamilton	$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i}$; $\dot{q}^i=\frac{\partial H}{\partial p_i}$	$\partial_\mu\pi_r^\mu=-\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\varphi^r}$; $\partial_\mu\varphi^r=\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\pi_r^\mu}$	(26)

Trecerea de la Mecanica Clasică la Câmpuri Clasice

- In teoria câmpurilor clasice coordonatele spațiale și timpul nu se mai folosesc ca variabile de mișcare. Ele nu mai descriu mișcarea particulei, sub forma $x^i(t)$, ele sunt acum variabile complet independente ce caracterizează sau etichetează câmpul în diversele puncte din spațiu-timp. Variabila independentă t din mecanică este acum înlocuită prin 4-coordonata x^μ. Singurele mărimi care variază sunt valorile de câmp la trecerea de la un punct la altul sau de la un moment la altul. Acum avem dependența valorilor de câmp $\varphi^r(x^\mu)$ de coordonata 4-dim $x^\mu = (t, \vec{x})$. Pt. a obține ec. de mișcare (Euler-Lagrange sau Hamilton) de câmp clasice, înlocuim:

Mărime fizică	Mecanica clasică	Câmpuri clasice	
Coord. generalizate	q^i	$\varphi^r(\vec{x}, t)$	(19)
Viteze generalizate	$\dot{q}^i \equiv \frac{dq^i}{dt}$	$\partial_\mu \varphi^r \equiv \frac{\partial \varphi^r}{\partial x^\mu}$	(20)
Lagrangian	$L(q^i, \dot{q}^i)$	$L(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r) = \int d^3x\, \mathcal{L}(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r)$	(21)
Impulsul conjugat	$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$	$\pi_r^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^r)}$	(22)
Acțiunea S	$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\; L(q^i, \dot{q}^i)$	$S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r)$	(23)
Variația $\delta S = 0$ da ec. de mișcare Euler-Lagrange	$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0$	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^r)}\right) = 0$	(24)
Hamiltonian	$\mathcal{H}(\varphi^r, \pi_r) = \pi_r \dot{\varphi}^r - \mathcal{L}$	$\mathcal{H}(\varphi^r, \pi_r) = \pi_r^\mu \partial_\mu \varphi^r - \mathcal{L}$	(25)
Ecuații de mișcare Hamilton	$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}\;;\; \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$	$\partial_\mu \pi_r^\mu = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi^r}\;;\; \partial_\mu \varphi^r = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_r^\mu}$	(26)

Trecerea de la Mecanica Clasică la Câmpuri Clasice

- In teoria câmpurilor clasice coordonatele spațiale și timpul nu se mai folosesc ca variabile de mișcare. Ele nu mai descriu mișcarea particulei, sub forma $x^i(t)$, ele sunt acum variabile complet independente ce caracterizează sau etichetează câmpul în diversele puncte din spațiu-timp. Variabila independentă t din mecanică este acum înlocuită prin 4-coordonata x^μ. Singurele mărimi care variază sunt valorile de câmp la trecerea de la un punct la altul sau de la un moment la altul. Acum avem dependența valorilor de câmp $\varphi^r(x^\mu)$ de coordonata 4-dim $x^\mu=(t,\vec{x})$. Pt. a obține ec. de mișcare (Euler-Lagrange sau Hamilton) de câmp clasice, înlocuim:

Mărime fizică	Mecanica clasică	Câmpuri clasice	
Coord. generalizate	q^i	$\varphi^r(\vec{x},t)$	(19)
Viteze generalizate	$\dot{q}^i \equiv \frac{dq^i}{dt}$	$\partial_\mu\varphi^r \equiv \frac{\partial\varphi^r}{\partial x^\mu}$	(20)
Lagrangian	$L(q^i,\dot{q}^i)$	$L(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r)=\int d^3x\, \mathcal{L}(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r)$	(21)
Impulsul conjugat	$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$	$\pi^\mu_r=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}$	(22)
Acțiunea S	$S=\int_{t_1}^{t_2} dt\; L(q^i,\dot{q}^i)$	$S=\int d^4x\, \mathcal{L}(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r)$	(23)
Variația $\delta S=0$ da ec. de mișcare Euler-Lagrange	$\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)=0$	$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}\right)=0$	(24)
Hamiltonian	$\mathcal{H}(\varphi^r,\pi_r)=\pi_r\dot{\varphi}^r-\mathcal{L}$	$\mathcal{H}(\varphi^r,\pi_r)=\pi^\mu_r\partial_\mu\varphi^r-\mathcal{L}$	(25)
Ecuații de mișcare Hamilton	$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i}$; $\dot{q}^i=\frac{\partial H}{\partial p_i}$	$\partial_\mu\pi^\mu_r=-\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\varphi^r}$; $\partial_\mu\varphi^r=\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\pi^\mu_r}$	(26)

Trecerea de la Mecanica Clasică la Câmpuri Clasice

- In teoria câmpurilor clasice coordonatele spațiale și timpul nu se mai folosesc ca variabile de mișcare. Ele nu mai descriu mișcarea particulei, sub forma $x^i(t)$, ele sunt acum variabile complet independente ce caracterizează sau etichetează câmpul în diversele puncte din spațiu-timp. Variabila independentă t din mecanică este acum înlocuită prin 4-coordonata x^μ. Singurele mărimi care variază sunt valorile de câmp la trecerea de la un punct la altul sau de la un moment la altul. Acum avem dependența valorilor de câmp $\varphi^r(x^\mu)$ de coordonata 4-dim $x^\mu = (t,\vec{x})$. Pt. a obține ec. de mișcare (Euler-Lagrange sau Hamilton) de câmp clasice, înlocuim:

Mărime fizică	Mecanica clasică	Câmpuri clasice	
Coord. generalizate	q^i	$\varphi^r(\vec{x},t)$	(19)
Viteze generalizate	$\dot{q}^i \equiv \dfrac{dq^i}{dt}$	$\partial_\mu\varphi^r \equiv \dfrac{\partial\varphi^r}{\partial x^\mu}$	(20)
Lagrangian	$L(q^i,\dot{q}^i)$	$L(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r) = \int d^3x\, \mathcal{L}(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r)$	(21)
Impulsul conjugat	$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$	$\pi^\mu_r = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}$	(22)
Acțiunea S	$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q^i,\dot{q}^i)$	$S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r)$	(23)
Variația $\delta S = 0$ da ec. de mișcare Euler-Lagrange	$\dfrac{\partial L}{\partial q^i} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0$	$\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r} - \partial_\mu\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}\right) = 0$	(24)
Hamiltonian	$\mathcal{H}(\varphi^r,\pi_r) = \pi_r\dot{\varphi}^r - \mathcal{L}$	$\mathcal{H}(\varphi^r,\pi_r) = \pi^\mu_r\partial_\mu\varphi^r - \mathcal{L}$	(25)
Ecuații de mișcare Hamilton	$\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}\ ;\ \dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$	$\partial_\mu\pi^\mu_r = -\dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta\varphi^r}\ ;\ \partial_\mu\varphi^r = \dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta\pi^\mu_r}$	(26)

Trecerea de la Mecanica Clasică la Câmpuri Clasice

- In teoria câmpurilor clasice coordonatele spațiale și timpul nu se mai folosesc ca variabile de mișcare. Ele nu mai descriu mișcarea particulei, sub forma $x^i(t)$, ele sunt acum variabile complet independente ce caracterizează sau etichetează câmpul în diversele puncte din spațiu-timp. Variabila independentă t din mecanică este acum înlocuită prin 4-coordonata x^μ. Singurele mărimi care variază sunt valorile de câmp la trecerea de la un punct la altul sau de la un moment la altul. Acum avem dependența valorilor de câmp $\varphi^r(x^\mu)$ de coordonata 4-dim $x^\mu=(t,\vec{x})$. Pt. a obține ec. de mișcare (Euler-Lagrange sau Hamilton) de câmp clasice, înlocuim:

Mărime fizică	Mecanica clasică	Câmpuri clasice	
Coord. generalizate	q^i	$\varphi^r(\vec{x},t)$	(19)
Viteze generalizate	$\dot{q}^i\equiv\frac{dq^i}{dt}$	$\partial_\mu\varphi^r\equiv\frac{\partial\varphi^r}{\partial x^\mu}$	(20)
Lagrangian	$L(q^i,\dot{q}^i)$	$L(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r)=\int d^3x\,\mathcal{L}(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r)$	(21)
Impulsul conjugat	$p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}$	$\pi^\mu_r=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}$	(22)
Acțiunea S	$S=\int_{t_1}^{t_2}dt\;L(q^i,\dot{q}^i)$	$S=\int d^4x\,\mathcal{L}(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r)$	(23)
Variația $\delta S=0$ da ec. de mișcare Euler-Lagrange	$\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)=0$	$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}\right)=0$	(24)
Hamiltonian	$\mathcal{H}(\varphi^r,\pi_r)=\pi_r\dot{\varphi}^r-\mathcal{L}$	$\mathcal{H}(\varphi^r,\pi_r)=\pi^\mu_r\partial_\mu\varphi^r-\mathcal{L}$	(25)
Ecuații de mișcare Hamilton	$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i}\;;\;\dot{q}^i=\frac{\partial H}{\partial p_i}$	$\partial_\mu\pi^\mu_r=-\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\varphi^r}\;;\;\partial_\mu\varphi^r=\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\pi^\mu_r}$	(26)

Trecerea de la Mecanica Clasică la Câmpuri Clasice

- In teoria câmpurilor clasice coordonatele spațiale și timpul nu se mai folosesc ca variabile de mișcare. Ele nu mai descriu mișcarea particulei, sub forma $x^i(t)$, ele sunt acum variabile complet independente ce caracterizează sau etichetează câmpul în diversele puncte din spațiu-timp. Variabila independentă t din mecanică este acum înlocuită prin 4-coordonata x^μ. Singurele mărimi care variază sunt valorile de câmp la trecerea de la un punct la altul sau de la un moment la altul. Acum avem dependența valorilor de câmp $\varphi^r(x^\mu)$ de coordonata 4-dim $x^\mu = (t,\vec{x})$. Pt. a obține ec. de mișcare (Euler-Lagrange sau Hamilton) de câmp clasice, înlocuim:

Mărime fizică	Mecanica clasică	Câmpuri clasice	
Coord. generalizate	q^i	$\varphi^r(\vec{x},t)$	(19)
Viteze generalizate	$\dot{q}^i \equiv \dfrac{dq^i}{dt}$	$\partial_\mu \varphi^r \equiv \dfrac{\partial \varphi^r}{\partial x^\mu}$	(20)
Lagrangian	$L(q^i, \dot{q}^i)$	$L(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r) = \int d^3x \, \mathcal{L}(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r)$	(21)
Impulsul conjugat	$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$	$\pi^\mu_r = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^r)}$	(22)
Acțiunea S	$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \; L(q^i, \dot{q}^i)$	$S = \int d^4x \, \mathcal{L}(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r)$	(23)
Variația $\delta S = 0$ da ec. de mișcare Euler-Lagrange	$\dfrac{\partial L}{\partial q^i} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0$	$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^r} - \partial_\mu \left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^r)}\right) = 0$	(24)
Hamiltonian	$\mathcal{H}(\varphi^r, \pi_r) = \pi_r \dot{\varphi}^r - \mathcal{L}$	$\mathcal{H}(\varphi^r, \pi_r) = \pi^\mu_r \partial_\mu \varphi^r - \mathcal{L}$	(25)
Ecuații de mișcare Hamilton	$\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}$; $\dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$	$\partial_\mu \pi^\mu_r = -\dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi^r}$; $\partial_\mu \varphi^r = \dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi^\mu_r}$	(26)

Trecerea de la Mecanica Clasică la Câmpuri Clasice

- In teoria câmpurilor clasice coordonatele spațiale și timpul nu se mai folosesc ca variabile de mișcare. Ele nu mai descriu mișcarea particulei, sub forma $x^i(t)$, ele sunt acum variabile complet independente ce caracterizează sau etichetează câmpul în diversele puncte din spațiu-timp. Variabila independentă t din mecanică este acum înlocuită prin 4-coordonata x^μ. Singurele mărimi care variază sunt valorile de câmp la trecerea de la un punct la altul sau de la un moment la altul. Acum avem dependența valorilor de câmp $\varphi^r(x^\mu)$ de coordonata 4-dim $x^\mu = (t, \vec{x})$. Pt. a obține ec. de mișcare (Euler-Lagrange sau Hamilton) de câmp clasice, înlocuim:

Mărime fizică	Mecanica clasică	Câmpuri clasice	
Coord. generalizate	q^i	$\varphi^r(\vec{x}, t)$	(19)
Viteze generalizate	$\dot{q}^i \equiv \frac{dq^i}{dt}$	$\partial_\mu \varphi^r \equiv \frac{\partial \varphi^r}{\partial x^\mu}$	(20)
Lagrangian	$L(q^i, \dot{q}^i)$	$L(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r) = \int d^3x \, \mathcal{L}(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r)$	(21)
Impulsul conjugat	$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$	$\pi_r^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^r)}$	(22)
Acțiunea S	$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \; L(q^i, \dot{q}^i)$	$S = \int d^4x \, \mathcal{L}(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r)$	(23)
Variația $\delta S = 0$ da ec. de mișcare Euler-Lagrange	$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0$	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^r)}\right) = 0$	(24)
Hamiltonian	$\mathcal{H}(\varphi^r, \pi_r) = \pi_r \dot{\varphi}^r - \mathcal{L}$	$\mathcal{H}(\varphi^r, \pi_r) = \pi_r^\mu \partial_\mu \varphi^r - \mathcal{L}$	(25)
Ecuații de mișcare Hamilton	$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$; $\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$	$\partial_\mu \pi_r^\mu = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi^r}$; $\partial_\mu \varphi^r = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_r^\mu}$	(26)

Trecerea de la Mecanica Clasică la Câmpuri Clasice

- In teoria câmpurilor clasice coordonatele spațiale și timpul nu se mai folosesc ca variabile de mișcare. Ele nu mai descriu mișcarea particulei, sub forma $x^i(t)$, ele sunt acum variabile complet independente ce caracterizează sau etichetează câmpul în diversele puncte din spațiu-timp. Variabila independentă t din mecanică este acum înlocuită prin 4-coordonata x^μ. Singurele mărimi care variază sunt valorile de câmp la trecerea de la un punct la altul sau de la un moment la altul. Acum avem dependența valorilor de câmp $\varphi^r(x^\mu)$ de coordonata 4-dim $x^\mu=(t,\vec{x})$. Pt. a obține ec. de mișcare (Euler-Lagrange sau Hamilton) de câmp clasice, înlocuim:

Mărime fizică	Mecanica clasică	Câmpuri clasice	
Coord. generalizate	q^i	$\varphi^r(\vec{x},t)$	(19)
Viteze generalizate	$\dot{q}^i \equiv \frac{dq^i}{dt}$	$\partial_\mu\varphi^r \equiv \frac{\partial\varphi^r}{\partial x^\mu}$	(20)
Lagrangian	$L(q^i,\dot{q}^i)$	$L(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r)=\int d^3x\,\mathcal{L}(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r)$	(21)
Impulsul conjugat	$p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}$	$\pi^\mu_r=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}$	(22)
Acțiunea S	$S=\int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q^i,\dot{q}^i)$	$S=\int d^4x\,\mathcal{L}(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r)$	(23)
Variația $\delta S=0$ da ec. de mișcare Euler-Lagrange	$\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)=0$	$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}\right)=0$	(24)
Hamiltonian	$\mathcal{H}(\varphi^r,\pi_r)=\pi_r\dot{\varphi}^r-\mathcal{L}$	$\mathcal{H}(\varphi^r,\pi_r)=\pi^\mu_r\partial_\mu\varphi^r-\mathcal{L}$	(25)
Ecuații de mișcare Hamilton	$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i}$; $\dot{q}^i=\frac{\partial H}{\partial p_i}$	$\partial_\mu\pi^\mu_r=-\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\varphi^r}$; $\partial_\mu\varphi^r=\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\pi^\mu_r}$	(26)

Trecerea de la Mecanica Clasică la Câmpuri Clasice

- In teoria câmpurilor clasice coordonatele spațiale și timpul nu se mai folosesc ca variabile de mișcare. Ele nu mai descriu mișcarea particulei, sub forma $x^i(t)$, ele sunt acum variabile complet independente ce caracterizează sau etichetează câmpul în diversele puncte din spațiu-timp. Variabila independentă t din mecanică este acum înlocuită prin 4-coordonata x^μ. Singurele mărimi care variază sunt valorile de câmp la trecerea de la un punct la altul sau de la un moment la altul. Acum avem dependența valorilor de câmp $\varphi^r(x^\mu)$ de coordonata 4-dim $x^\mu=(t,\vec{x})$. Pt. a obține ec. de mișcare (Euler-Lagrange sau Hamilton) de câmp clasice, înlocuim:

Mărime fizică	Mecanica clasică	Câmpuri clasice	
Coord. generalizate	q^i	$\varphi^r(\vec{x},t)$	(19)
Viteze generalizate	$\dot{q}^i \equiv \dfrac{dq^i}{dt}$	$\partial_\mu\varphi^r \equiv \dfrac{\partial\varphi^r}{\partial x^\mu}$	(20)
Lagrangian	$L(q^i,\dot{q}^i)$	$L(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r) = \int d^3x\, \mathcal{L}(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r)$	(21)
Impulsul conjugat	$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$	$\pi^\mu_r = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}$	(22)
Acțiunea S	$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q^i,\dot{q}^i)$	$S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r)$	(23)
Variația $\delta S = 0$ da ec. de mișcare Euler-Lagrange	$\dfrac{\partial L}{\partial q^i} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0$	$\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r} - \partial_\mu\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}\right) = 0$	(24)
Hamiltonian	$\mathcal{H}(\varphi^r,\pi_r) = \pi_r\dot{\varphi}^r - \mathcal{L}$	$\mathcal{H}(\varphi^r,\pi_r) = \pi^\mu_r\partial_\mu\varphi^r - \mathcal{L}$	(25)
Ecuații de mișcare Hamilton	$\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}$; $\dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$	$\partial_\mu\pi^\mu_r = -\dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta\varphi^r}$; $\partial_\mu\varphi^r = \dfrac{\delta\mathcal{H}}{\delta\pi^\mu_r}$	(26)

Trecerea de la Mecanica Clasică la Câmpuri Clasice

- In teoria câmpurilor clasice coordonatele spațiale și timpul nu se mai folosesc ca variabile de mișcare. Ele nu mai descriu mișcarea particulei, sub forma $x^i(t)$, ele sunt acum variabile complet independente ce caracterizează sau etichetează câmpul în diversele puncte din spațiu-timp. Variabila independentă t din mecanică este acum înlocuită prin 4-coordonata x^μ. Singurele mărimi care variază sunt valorile de câmp la trecerea de la un punct la altul sau de la un moment la altul. Acum avem dependența valorilor de câmp $\varphi^r(x^\mu)$ de coordonata 4-dim $x^\mu = (t,\vec{x})$. Pt. a obține ec. de mișcare (Euler-Lagrange sau Hamilton) de câmp clasice, înlocuim:

Mărime fizică	Mecanica clasică	Câmpuri clasice	
Coord. generalizate	q^i	$\varphi^r(\vec{x},t)$	(19)
Viteze generalizate	$\dot{q}^i \equiv \dfrac{dq^i}{dt}$	$\partial_\mu \varphi^r \equiv \dfrac{\partial \varphi^r}{\partial x^\mu}$	(20)
Lagrangian	$L(q^i, \dot{q}^i)$	$L(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r) = \int d^3x \, \mathcal{L}(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r)$	(21)
Impulsul conjugat	$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$	$\pi_r^\mu = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^r)}$	(22)
Acțiunea S	$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \; L(q^i, \dot{q}^i)$	$S = \int d^4x \, \mathcal{L}(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r)$	(23)
Variația $\delta S = 0$ da ec. de mișcare Euler-Lagrange	$\dfrac{\partial L}{\partial q^i} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0$	$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^r} - \partial_\mu \left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^r)}\right) = 0$	(24)
Hamiltonian	$\mathcal{H}(\varphi^r, \pi_r) = \pi_r \dot{\varphi}^r - \mathcal{L}$	$\mathcal{H}(\varphi^r, \pi_r) = \pi_r^\mu \partial_\mu \varphi^r - \mathcal{L}$	(25)
Ecuații de mișcare Hamilton	$\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}$; $\dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$	$\partial_\mu \pi_r^\mu = -\dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi^r}$; $\partial_\mu \varphi^r = \dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_r^\mu}$	(26)

Trecerea de la Mecanica Clasică la Câmpuri Clasice

- In teoria câmpurilor clasice coordonatele spațiale și timpul nu se mai folosesc ca variabile de mișcare. Ele nu mai descriu mișcarea particulei, sub forma $x^i(t)$, ele sunt acum variabile complet independente ce caracterizează sau etichetează câmpul în diversele puncte din spațiu-timp. Variabila independentă t din mecanică este acum înlocuită prin 4-coordonata x^μ. Singurele mărimi care variază sunt valorile de câmp la trecerea de la un punct la altul sau de la un moment la altul. Acum avem dependența valorilor de câmp $\varphi^r(x^\mu)$ de coordonata 4-dim $x^\mu = (t,\vec{x})$. Pt. a obține ec. de mișcare (Euler-Lagrange sau Hamilton) de câmp clasice, înlocuim:

Mărime fizică	Mecanica clasică	Câmpuri clasice	
Coord. generalizate	q^i	$\varphi^r(\vec{x},t)$	(19)
Viteze generalizate	$\dot{q}^i \equiv \frac{dq^i}{dt}$	$\partial_\mu \varphi^r \equiv \frac{\partial \varphi^r}{\partial x^\mu}$	(20)
Lagrangian	$L(q^i,\dot{q}^i)$	$L(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r) = \int d^3x\, \mathcal{L}(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r)$	(21)
Impulsul conjugat	$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$	$\pi^\mu_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}$	(22)
Acțiunea S	$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q^i,\dot{q}^i)$	$S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r)$	(23)
Variația $\delta S = 0$ da ec. de mișcare Euler-Lagrange	$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0$	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^r} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}\right) = 0$	(24)
Hamiltonian	$\mathcal{H}(\varphi^r,\pi_r) = \pi_r\dot{\varphi}^r - \mathcal{L}$	$\mathcal{H}(\varphi^r,\pi_r) = \pi^\mu_r \partial_\mu\varphi^r - \mathcal{L}$	(25)
Ecuații de mișcare Hamilton	$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$; $\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$	$\partial_\mu \pi^\mu_r = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi^r}$; $\partial_\mu \varphi^r = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi^\mu_r}$	(26)

Ecuațiile Euler-Lagrange pentru câmpuri clasice

- Pentru a obține ecuațiile de câmp clasice, la fel ca în mecanica clasică folosim principiul minimei acțiuni (vezi pag.15), cu acțiunea (23)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r, t) = \int d^4x\, \mathcal{L}(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r, t) \tag{23}$$

- Evaluăm variația δS,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^r} \delta \varphi^r + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^r)}}_{u} \underbrace{\delta(\partial_\mu \varphi^r)}_{\partial_\mu(\delta\varphi^r) = dv} \right) \tag{27}$$

Obs: Sumarea după i din mecanică, s-a înlocuit cu integrala după d^3x. In plus, se cere anularea câmpurilor și a derivatelor la infinit.

- Cu integrarea prin părți $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$ în ultimul termen din (27), folosind condiția de minim $\delta S = 0$ și $\delta(\partial_\mu \varphi^r) = \partial_\mu(\delta \varphi^r)$,

avem, similar cu δF: $$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^r)} \right) \right] \delta \varphi^r \tag{28}$$

- La variații $\delta \varphi^r$ arbitrare $\Rightarrow$ *ecuațiile Euler-Lagrange pentru câmpuri*

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^r)} \right) = 0} \text{ sau } \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^r} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \varphi^r / \partial t)} \right) - \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla \varphi^r)} \right) = 0} \tag{29}$$

Ecuațiile Euler-Lagrange pentru câmpuri clasice

- Pentru a obține ecuațiile de câmp clasice, la fel ca în mecanica clasică folosim principiul minimei acțiuni (vezi pag.15), cu acțiunea (23)

$$S=\int_{t_1}^{t_2} dt\ L(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r,t)=\int d^4x\,\mathcal{L}(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r,t) \tag{23}$$

- Evaluăm variația δS,

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2} dt\int d^3x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}\delta\varphi^r+\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}}_{u}\ \underbrace{\delta(\partial_\mu\varphi^r)}_{\partial_\mu(\delta\varphi^r)=dv}\right) \tag{27}$$

  Obs: Sumarea după i din mecanică, s-a înlocuit cu integrala după d^3x. In plus, se cere anularea câmpurilor și a derivatelor la infinit.

- Cu integrarea prin părți $\int u\,dv=u\,v-\int v\,du$ în ultimul termen din (27), folosind condiția de minim $\delta S=0$ și $\delta(\partial_\mu\varphi^r)=\partial_\mu(\delta\varphi^r)$,

  avem, similar cu δF: $$0=\delta S=\int_{t_1}^{t_2} dt\int d^3x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}\right)\right]\delta\varphi^r \tag{28}$$

- La variații $\delta\varphi^r$ arbitrare $\Rightarrow$ *ecuațiile Euler-Lagrange pentru câmpuri*

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}\right)=0}\ \text{sau}\ \boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi^r/\partial t)}\right)-\nabla\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi^r)}\right)=0} \tag{29}$$

Ecuațiile Euler-Lagrange pentru câmpuri clasice

- Pentru a obține ecuațiile de câmp clasice, la fel ca în mecanica clasică folosim principiul minimei acțiuni (vezi pag.15), cu acțiunea (23)

$$S=\int_{t_1}^{t_2} dt\ L(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r,t)=\int d^4x\,\mathcal{L}(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r,t) \qquad (23)$$

- Evaluăm variația δS,

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2} dt\int d^3x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}\delta\varphi^r+\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}}_{u}\ \underbrace{\delta(\partial_\mu\varphi^r)}_{\partial_\mu(\delta\varphi^r)=dv}\right) \qquad (27)$$

Obs: Sumarea după i din mecanică, s-a înlocuit cu integrala după d^3x. In plus, se cere anularea câmpurilor și a derivatelor la infinit.

- Cu integrarea prin părți $\int u\,dv=u\,v-\int v\,du$ în ultimul termen din (27), folosind condiția de minim $\delta S=0$ și $\delta(\partial_\mu\varphi^r)=\partial_\mu(\delta\varphi^r)$,

avem, similar cu δF: $$0=\delta S=\int_{t_1}^{t_2} dt\int d^3x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}\right)\right]\delta\varphi^r \qquad (28)$$

- La variații $\delta\varphi^r$ arbitrare $\Rightarrow$ *ecuațiile Euler-Lagrange pentru câmpuri*

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}\right)=0}\ \text{sau}\ \boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi^r/\partial t)}\right)-\nabla\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi^r)}\right)=0} \qquad (29)$$

Ecuațiile Euler-Lagrange pentru câmpuri clasice

- Pentru a obține ecuațiile de câmp clasice, la fel ca în mecanica clasică folosim principiul minimei acțiuni (vezi pag.15), cu acțiunea (23)

$$S=\int_{t_1}^{t_2} dt\ L(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r,t)=\int d^4x\,\mathcal{L}(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r,t) \tag{23}$$

- Evaluăm variația δS,

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2} dt\int d^3x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}\delta\varphi^r+\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}}_{u}\underbrace{\delta(\partial_\mu\varphi^r)}_{\partial_\mu(\delta\varphi^r)=dv}\right) \tag{27}$$

Obs: Sumarea după i din mecanică, s-a înlocuit cu integrala după d^3x. In plus, se cere anularea câmpurilor și a derivatelor la infinit.

- Cu integrarea prin părți $\int u\,dv=u\,v-\int v\,du$ în ultimul termen din (27), folosind condiția de minim $\delta S=0$ și $\delta(\partial_\mu\varphi^r)=\partial_\mu(\delta\varphi^r)$,

avem, similar cu δF: $$0=\delta S=\int_{t_1}^{t_2} dt\int d^3x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}\right)\right]\delta\varphi^r \tag{28}$$

- La variații $\delta\varphi^r$ arbitrare $\Rightarrow$ *ecuațiile Euler-Lagrange pentru câmpuri*

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}\right)=0}\ \text{sau}\ \boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi^r/\partial t)}\right)-\nabla\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi^r)}\right)=0} \tag{29}$$

Ecuațiile Euler-Lagrange pentru câmpuri clasice

- Pentru a obține ecuațiile de câmp clasice, la fel ca în mecanica clasică folosim principiul minimei acțiuni (vezi pag.15), cu acțiunea (23)

$$S=\int_{t_1}^{t_2} dt\ L(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r,t)=\int d^4x\,\mathcal{L}(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r,t) \tag{23}$$

- Evaluăm variația δS,

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2} dt\int d^3x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}\delta\varphi^r+\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}}_{u}\underbrace{\delta(\partial_\mu\varphi^r)}_{\partial_\mu(\delta\varphi^r)=dv}\right) \tag{27}$$

  Obs: Sumarea după i din mecanică, s-a înlocuit cu integrala după d^3x. In plus, se cere anularea câmpurilor și a derivatelor la infinit.

- Cu integrarea prin părți $\int u\,dv=u\,v-\int v\,du$ în ultimul termen din (27), folosind condiția de minim $\delta S=0$ și $\delta(\partial_\mu\varphi^r)=\partial_\mu(\delta\varphi^r)$,

  avem, similar cu δF: $$0=\delta S=\int_{t_1}^{t_2} dt\int d^3x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}\right)\right]\delta\varphi^r \tag{28}$$

- La variații $\delta\varphi^r$ arbitrare $\Rightarrow$ *ecuațiile Euler-Lagrange pentru câmpuri*

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}\right)=0}\ \text{sau}\ \boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi^r/\partial t)}\right)-\nabla\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi^r)}\right)=0} \tag{29}$$

Ecuațiile Euler-Lagrange pentru câmpuri clasice

- Pentru a obține ecuațiile de câmp clasice, la fel ca în mecanica clasică folosim principiul minimei acțiuni (vezi pag.15), cu acțiunea (23)

$$S=\int_{t_1}^{t_2} dt\ L(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r,t)=\int d^4x\,\mathcal{L}(\varphi^r,\partial_\mu\varphi^r,t) \tag{23}$$

- Evaluăm variația δS,

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2} dt\int d^3x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}\delta\varphi^r+\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}}_{u}\underbrace{\delta(\partial_\mu\varphi^r)}_{\partial_\mu(\delta\varphi^r)=dv}\right) \tag{27}$$

Obs: Sumarea după i din mecanică, s-a înlocuit cu integrala după d^3x. In plus, se cere anularea câmpurilor și a derivatelor la infinit.

- Cu integrarea prin părți $\int u\,dv=u\,v-\int v\,du$ în ultimul termen din (27), folosind condiția de minim $\delta S=0$ și $\delta(\partial_\mu\varphi^r)=\partial_\mu(\delta\varphi^r)$,

$$\text{avem, similar cu } \delta F: \quad 0=\delta S=\int_{t_1}^{t_2} dt\int d^3x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}\right)\right]\delta\varphi^r \tag{28}$$

- La variații $\delta\varphi^r$ arbitrare $\Rightarrow$ *ecuațiile Euler-Lagrange pentru câmpuri*

$$\boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^r)}\right)=0}\ \text{sau}\ \boxed{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi^r/\partial t)}\right)-\nabla\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi^r)}\right)=0} \tag{29}$$

Lagrangian și ecuațiile de câmp Schrödinger

- Pentru a explicita ecuația E-L de mișcare (24) (*ecuația de câmp*)
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\nabla \varphi\right)}\right) = 0 \qquad (24)$$
- Avem Lagrangian-ul $\mathcal{L}$ de câmp Schrödinger de forma
$$\boxed{\mathcal{L} = i\hbar\psi^*\dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi - V\psi^*\psi} \qquad (30)$$

- Prin variația $\delta\psi^*$ avem: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = i\hbar\dot{\psi} - V\psi$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = 0$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\psi^*\right)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi$
- Ecuația (24) de câmp Schrödinger real ψ
$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\,\psi}$$
cu sol.reală: $\psi(x,t) = \alpha\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$ (31)

formal identică cu ecuația de stare Schrödinger din Mecanica Cuantică (NRQM).

- Prin variația $\delta\psi$ avem: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -V\psi^*$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\hbar\psi^*$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\psi\right)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*$
- Ecuația (24) de câmp Schrödinger complex
$$\boxed{-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + V\psi^*}$$
cu sol.complexă: $\psi^*(x,t) = \alpha^*\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$

- In Mecanica Cuantică e utilizată doar soluția Schrödinger reală $\psi(\vec{x},t)$.

Lagrangian și ecuațiile de câmp Schrödinger

- Pentru a explicita ecuația E-L de mișcare (24) (*ecuația de câmp*) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi)}\right) = 0 \qquad (24)$$
- Avem Lagrangian-ul $\mathcal{L}$ de câmp Schrödinger de forma $$\boxed{\mathcal{L} = i\hbar\psi^*\dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi - V\psi^*\psi} \qquad (30)$$

- Prin variația $\delta\psi^*$ avem: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = i\hbar\dot{\psi} - V\psi$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = 0$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla\psi^*)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi$
- Ecuația (24) de câmp Schrödinger real ψ $$\boxed{i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\,\psi} \qquad (31)$$ cu sol.reală: $\psi(x,t) = \alpha\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$

  formal identică cu ecuația de stare Schrödinger din Mecanica Cuantică (NRQM).

- Prin variația $\delta\psi$ avem: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -V\psi^*$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\hbar\psi^*$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla\psi)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*$
- Ecuația (24) de câmp Schrödinger complex $$\boxed{-i\hbar\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + V\psi^*}$$ cu sol.complexă: $\psi^*(x,t) = \alpha^*\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$

- In Mecanica Cuantică e utilizată doar soluția Schrödinger reală $\psi(\vec{x},t)$.

Lagrangian și ecuațiile de câmp Schrödinger

- Pentru a explicita ecuația E-L de mișcare (24) (*ecuația de câmp*)
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}-\nabla\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\varphi\right)}\right)=0 \qquad (24)$$
- Avem Lagrangian-ul $\mathcal{L}$ de câmp Schrödinger de forma
$$\boxed{\mathcal{L}=i\hbar\psi^*\dot{\psi}-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi-V\psi^*\psi} \qquad (30)$$

- Prin variația $\delta\psi^*$ avem: $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*}=i\hbar\dot{\psi}-V\psi$; $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^*}=0$; $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\psi^*\right)}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi$
- Ecuația (24) de câmp Schrödinger real ψ
$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V\,\psi} \qquad (31)$$
cu sol.reală: $\psi(x,t)=\alpha\, e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$

formal identică cu ecuația de stare Schrödinger din Mecanica Cuantică (NRQM).

- Prin variația $\delta\psi$ avem: $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}=-V\psi^*$; $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}=i\hbar\psi^*$; $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\psi\right)}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*$
- Ecuația (24) de câmp Schrödinger complex
$$\boxed{-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^*+V\psi^*}$$
cu sol.complexă: $\psi^*(x,t)=\alpha^*\, e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$

- In Mecanica Cuantică e utilizată doar soluția Schrödinger reală $\psi(\vec{x},t)$.

Lagrangian și ecuațiile de câmp Schrödinger

- Pentru a explicita ecuația E-L de mișcare (24) (*ecuația de câmp*)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi)}\right) = 0 \qquad (24)$$

- Avem Lagrangian-ul $\mathcal{L}$ de câmp Schrödinger de forma

$$\boxed{\mathcal{L} = i\hbar\psi^*\dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi - V\psi^*\psi} \qquad (30)$$

- Prin variația $\delta\psi^*$ avem: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = i\hbar\dot{\psi} - V\psi$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = 0$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi^*)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi$
- Ecuația (24) de câmp Schrödinger real ψ $\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\,\psi}$ cu sol.reală: $\psi(x,t) = \alpha\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$ (31)

  formal identică cu ecuația de stare Schrödinger din Mecanica Cuantică (NRQM).

- Prin variația $\delta\psi$ avem: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -V\psi^*$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\hbar\psi^*$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*$
- Ecuația (24) de câmp Schrödinger complex $\boxed{-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + V\psi^*}$ cu sol.complexă: $\psi^*(x,t) = \alpha^*\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$

- In Mecanica Cuantică e utilizată doar soluția Schrödinger reală $\psi(\vec{x},t)$.

Lagrangian și ecuațiile de câmp Schrödinger

- Pentru a explicita ecuația E-L de mișcare (24) (*ecuația de câmp*) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\nabla \varphi\right)}\right) = 0 \qquad (24)$$
- Avem Lagrangian-ul $\mathcal{L}$ de câmp Schrödinger de forma $$\boxed{\mathcal{L} = i\hbar\psi^*\dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi - V\psi^*\psi} \qquad (30)$$

- Prin variația $\delta\psi^*$ avem: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = i\hbar\dot{\psi} - V\psi$; $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = 0$; $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\psi^*\right)} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi$
- Ecuația (24) de câmp Schrödinger real ψ $$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\,\psi}$$ cu sol.reală: $\psi(x,t) = \alpha\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$ (31)

  formal identică cu ecuația de stare Schrödinger din Mecanica Cuantică (NRQM).

- Prin variația $\delta\psi$ avem: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -V\psi^*$; $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\hbar\psi^*$; $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\psi\right)} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*$
- Ecuația (24) de câmp Schrödinger complex $$\boxed{-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + V\psi^*}$$ cu sol.complexă: $\psi^*(x,t) = \alpha^*\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$

- In Mecanica Cuantică e utilizată doar soluția Schrödinger reală $\psi(\vec{x}, t)$.

Lagrangian și ecuațiile de câmp Schrödinger

- Pentru a explicita ecuația E-L de mișcare (24) (*ecuația de câmp*)
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi)}\right) = 0 \qquad (24)$$
- Avem Lagrangian-ul $\mathcal{L}$ de câmp Schrödinger de forma
$$\boxed{\mathcal{L} = i\hbar\psi^*\dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi - V\psi^*\psi} \qquad (30)$$

- Prin variația $\delta\psi^*$ avem: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = i\hbar\dot{\psi} - V\psi$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = 0$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi^*)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi$
- Ecuația (24) de câmp Schrödinger real ψ
$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\,\psi}$$
cu sol.reală: $\psi(x,t) = \alpha\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$ (31)

formal identică cu ecuația de stare Schrödinger din Mecanica Cuantică (NRQM).

- Prin variația $\delta\psi$ avem: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -V\psi^*$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\hbar\psi^*$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*$
- Ecuația (24) de câmp Schrödinger complex
$$\boxed{-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + V\psi^*}$$
cu sol.complexă: $\psi^*(x,t) = \alpha^*\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$

- In Mecanica Cuantică e utilizată doar soluția Schrödinger reală $\psi(\vec{x}, t)$.

Lagrangian și ecuațiile de câmp Schrödinger

- Pentru a explicita ecuația E-L de mișcare (24) (*ecuația de câmp*)
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}-\nabla\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\varphi\right)}\right)=0 \qquad (24)$$
- Avem Lagrangian-ul $\mathcal{L}$ de câmp Schrödinger de forma
$$\boxed{\mathcal{L}=i\hbar\psi^{*}\dot{\psi}-\frac{\hbar^{2}}{2m}\nabla\psi^{*}\cdot\nabla\psi-V\psi^{*}\psi} \qquad (30)$$

- Prin variația $\delta\psi^{*}$ avem: $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^{*}}=i\hbar\dot{\psi}-V\psi$; $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^{*}}=0$; $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\psi^{*}\right)}=-\dfrac{\hbar^{2}}{2m}\nabla\psi$
- Ecuația (24) de câmp Schrödinger real ψ
$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^{2}}{2m}\nabla^{2}\psi+V\,\psi}$$
cu sol.reală: $\psi(x,t)=\alpha\, e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$ (31)

formal identică cu ecuația de stare Schrödinger din Mecanica Cuantică (NRQM).

- Prin variația $\delta\psi$ avem: $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}=-V\psi^{*}$; $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}=i\hbar\psi^{*}$; $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\psi\right)}=-\dfrac{\hbar^{2}}{2m}\nabla\psi^{*}$
- Ecuația (24) de câmp Schrödinger complex
$$\boxed{-i\hbar\frac{\partial\psi^{*}}{\partial t}=-\frac{\hbar^{2}}{2m}\nabla^{2}\psi^{*}+V\psi^{*}}$$
cu sol.complexă: $\psi^{*}(x,t)=\alpha^{*}\, e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$

- In Mecanica Cuantică e utilizată doar soluția Schrödinger reală $\psi(\vec{x},t)$.

Lagrangian și ecuațiile de câmp Schrödinger

- Pentru a explicita ecuația E-L de mișcare (24) (*ecuația de câmp*) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi)}\right) = 0 \qquad (24)$$
- Avem Lagrangian-ul $\mathcal{L}$ de câmp Schrödinger de forma $$\boxed{\mathcal{L} = i\hbar\psi^* \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^* \cdot \nabla\psi - V\psi^*\psi} \qquad (30)$$

- Prin variația $\delta\psi^*$ avem: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = i\hbar\dot{\psi} - V\psi$; $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = 0$; $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi^*)} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi$
- Ecuația (24) de câmp Schrödinger real ψ $$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\,\psi}$$ cu sol.reală: $\psi(x,t) = \alpha\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$ (31)

formal identică cu ecuația de stare Schrödinger din Mecanica Cuantică (NRQM).

- Prin variația $\delta\psi$ avem: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -V\psi^*$; $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\hbar\psi^*$; $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*$
- Ecuația (24) de câmp Schrödinger complex $$\boxed{-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + V\psi^*}$$ cu sol.complexă: $\psi^*(x,t) = \alpha^*\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$

- In Mecanica Cuantică e utilizată doar soluția Schrödinger reală $\psi(\vec{x}, t)$.

Lagrangian și ecuațiile de câmp Schrödinger

- Pentru a explicita ecuația E-L de mișcare (24) (*ecuația de câmp*) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\varphi\right)}\right) = 0 \qquad (24)$$
- Avem Lagrangian-ul $\mathcal{L}$ de câmp Schrödinger de forma $$\boxed{\mathcal{L} = i\hbar\psi^*\dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi - V\psi^*\psi} \qquad (30)$$

- Prin variația $\delta\psi^*$ avem: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = i\hbar\dot{\psi} - V\psi$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = 0$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\psi^*\right)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi$
- Ecuația (24) de câmp Schrödinger real ψ $$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\,\psi}$$ cu sol.reală: $\psi(x,t) = \alpha\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$ (31)

  formal identică cu ecuația de stare Schrödinger din Mecanica Cuantică (NRQM).

- Prin variația $\delta\psi$ avem: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -V\psi^*$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\hbar\psi^*$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\psi\right)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*$
- Ecuația (24) de câmp Schrödinger complex $$\boxed{-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + V\psi^*}$$ cu sol.complexă: $\psi^*(x,t) = \alpha^*\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$

- In Mecanica Cuantică e utilizată doar soluția Schrödinger reală $\psi(\vec{x},t)$.

Lagrangian și ecuațiile de câmp Klein-Gordon real

- Pentru a explicita ecuația E-L de mișcare (29) (*ecuația de câmp*)
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}-\nabla\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\varphi\right)}\right)=0 \qquad (29)$$
- Lagrangian-ul de câmp K-G
$$\boxed{\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}^2-(\nabla\varphi)^2-m^2\varphi^2\right]} \text{ sau } \boxed{\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi-m^2\varphi^2\right)} \qquad (32)$$

- Prin variația $\delta\varphi$ avem: $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}=-m^2\varphi \quad ; \quad \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=\dot{\varphi} \quad ; \quad \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi)}=-\nabla\varphi$
- Adică, ecuația (29) de câmp K-G este
$$\boxed{\left(\partial_t^2-\nabla^2+m^2\right)\varphi=0} \quad \text{sau} \quad \boxed{\left(\partial_\mu\partial^\mu+m^2\right)\varphi=0} \qquad (33)$$
formal identică cu *ecuația de stare* K-G din Mecanica Cuantică (RQM).

Lagrangian și ecuațiile de câmp Klein-Gordon real

- Pentru a explicita ecuația E-L de mișcare (29) (*ecuația de câmp*) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\nabla \varphi\right)}\right) = 0 \qquad (29)$$
- Lagrangian-ul de câmp K-G $$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}^2 - (\nabla\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right]} \text{ sau } \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\, \partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right)} \qquad (32)$$

- Prin variația $\delta\varphi$ avem: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2\varphi \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi)} = -\nabla\varphi$
- Adică, ecuația (29) de câmp K-G este $$\boxed{\left(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2\right)\varphi = 0} \quad \text{sau} \quad \boxed{\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\varphi = 0} \qquad (33)$$
formal identică cu *ecuația de stare* K-G din Mecanica Cuantică (RQM).

Lagrangian și ecuațiile de câmp Klein-Gordon real

- Pentru a explicita ecuația E-L de mișcare (29) (*ecuația de câmp*) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi)}\right) = 0 \qquad (29)$$
- Lagrangian-ul de câmp K-G $$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}^2 - (\nabla\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right]} \text{ sau } \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\, \partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right)} \qquad (32)$$

- Prin variația $\delta\varphi$ avem: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2\varphi$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla\varphi)} = -\nabla\varphi$
- Adică, ecuația (29) de câmp K-G este $$\boxed{\left(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2\right)\varphi = 0} \text{ sau } \boxed{\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\varphi = 0} \qquad (33)$$ formal identică cu *ecuația de stare* K-G din Mecanica Cuantică (RQM).

Lagrangian și ecuațiile de câmp Klein-Gordon real

- Pentru a explicita ecuația E-L de mișcare (29) (*ecuația de câmp*) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\varphi\right)}\right) = 0 \qquad (29)$$
- Lagrangian-ul de câmp K-G $$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}^2 - (\nabla\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right]} \text{ sau } \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right)} \qquad (32)$$

- Prin variația $\delta\varphi$ avem: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2\varphi$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi)} = -\nabla\varphi$
- Adică, ecuația (29) de câmp K-G este $$\boxed{\left(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2\right)\varphi = 0} \text{ sau } \boxed{\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\varphi = 0} \qquad (33)$$
formal identică cu *ecuația de stare* K-G din Mecanica Cuantică (RQM).

Lagrangian și ecuațiile de câmp Klein-Gordon real

- Pentru a explicita ecuația E-L de mișcare (29) (*ecuația de câmp*) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\varphi\right)}\right) = 0 \qquad (29)$$
- Lagrangian-ul de câmp K-G $$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}^2 - (\nabla\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right]} \text{ sau } \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right)} \qquad (32)$$

- Prin variația $\delta\varphi$ avem: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2\varphi$; $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}$; $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi)} = -\nabla\varphi$
- Adică, ecuația (29) de câmp K-G este $$\boxed{\left(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2\right)\varphi = 0} \quad \text{sau} \quad \boxed{\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\varphi = 0} \qquad (33)$$
  formal identică cu *ecuația de stare* K-G din Mecanica Cuantică (RQM).

Lagrangian și ecuațiile de câmp Klein-Gordon real

- Pentru a explicita ecuația E-L de mișcare (29) (*ecuația de câmp*) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\nabla \varphi\right)}\right) = 0 \qquad (29)$$
- Lagrangian-ul de câmp K-G $$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}^2 - (\nabla \varphi)^2 - m^2 \varphi^2\right]} \text{ sau } \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi\, \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2\right)} \qquad (32)$$

- Prin variația $\delta\varphi$ avem: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi)} = -\nabla \varphi$
- Adică, ecuația (29) de câmp K-G este $$\boxed{\left(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2\right)\varphi = 0} \quad \text{sau} \quad \boxed{\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\varphi = 0} \qquad (33)$$ formal identică cu *ecuația de stare* K-G din Mecanica Cuantică (RQM).

Lagrangian și ecuații de câmp Klein-Gordon complex

- Lagrangian-ul K-G complex transcris după cel real (32): $\boxed{\mathcal{L}=\dot{\varphi}^*\dot{\varphi}-\nabla\varphi^*\cdot\nabla\varphi-m^2\varphi^*\varphi\equiv\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi-m^2\varphi^*\varphi}$ (34)
- Inlocuind în Ec. E-L pt. cele 2 câmpuri: $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}^r}-\nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\varphi^r\right)}=0 \quad (35)$$
- Avem, $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}=-m^2\varphi^*$; $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=\dot{\varphi}^*$; $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi)}=-\nabla\varphi^* \implies \boxed{(\partial_t^2-\nabla^2+m^2)\varphi^*=0}$ Ec. K-G pt. câmp complex

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*}=-m^2\varphi \;;\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}^*}=\dot{\varphi} \;;\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi^*)}=-\nabla\varphi \implies \boxed{\left(\partial_t^2-\nabla^2+m^2\right)\varphi=0}$$
Ec. K-G pt. câmp real

- Soluțiile de *câmp (scalar) Klein-Gordon* real $\varphi(\vec{x},t)$ și imaginar $\varphi^*(\vec{x},t)$:

$\varphi(\vec{x},t)=\alpha(\vec{k})e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$ $\quad\varphi^*(\vec{x},t)=\alpha^*(\vec{k})e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$ (absentă în NRQM) (36)

- \- soluția pentru $E=\hbar\omega>0$ (particule) este: $\varphi(\vec{x},t)=\alpha(\vec{k})e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$

  \- soluția pentru $E<0$ (antiparticule) este: $\varphi^*(\vec{x},t)=\alpha^*(\vec{k})e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$

Pauli și Weisskopf (Helv.Phys.Acta 7,709 (1934)) au arătat că ec. K-G descrie partic. de spin 0. Ec. Dirac și Proca descriu partic. de spin 1/2 resp. spin 1.

Lagrangian și ecuații de câmp Klein-Gordon complex

- Lagrangian-ul K-G complex transcris după cel real (32): $$\boxed{\mathcal{L} = \dot{\varphi}^* \dot{\varphi} - \nabla\varphi^* \cdot \nabla\varphi - m^2 \varphi^* \varphi \equiv \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi} \quad (34)$$
- Inlocuind în Ec. E-L pt. cele 2 câmpuri: $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^r} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^r} - \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi^r)} = 0 \quad (35)$$
- Avem, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi^*$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^*$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi)} = -\nabla \varphi^* \implies \boxed{(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\varphi^* = 0}$ Ec. K-G pt. câmp complex

  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} = -m^2 \varphi$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = \dot{\varphi}$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi^*)} = -\nabla \varphi \implies \boxed{(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\varphi = 0}$ Ec. K-G pt. câmp real
- Soluțiile de *câmp (scalar) Klein-Gordon* real $\varphi(\vec{x}, t)$ și imaginar $\varphi^*(\vec{x}, t)$:

  $\varphi(\vec{x}, t) = \alpha(\vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$ $\quad \varphi^*(\vec{x}, t) = \alpha^*(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$ (absentă în NRQM) (36)
- \- soluția pentru $E = \hbar\omega > 0$ (particule) este: $\varphi(\vec{x}, t) = \alpha(\vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$

  \- soluția pentru $E < 0$ (antiparticule) este: $\varphi^*(\vec{x}, t) = \alpha^*(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$

  Pauli și Weisskopf (Helv.Phys.Acta 7,709 (1934)) au arătat că ec. K-G descrie partic. de spin 0. Ec. Dirac și Proca descriu partic. de spin 1/2 resp. spin 1.

Lagrangian și ecuații de câmp Klein-Gordon complex

- Lagrangian-ul K-G complex transcris după cel real (32): $$\boxed{\mathcal{L} = \dot{\varphi}^* \dot{\varphi} - \nabla\varphi^* \cdot \nabla\varphi - m^2 \varphi^* \varphi \equiv \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi} \quad (34)$$
- Inlocuind în Ec. E-L pt. cele 2 câmpuri: $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^r} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^r} - \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi^r)} = 0 \quad (35)$$
- Avem, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi^*$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^*$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi)} = -\nabla \varphi^* \implies \boxed{(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\varphi^* = 0}$ Ec. K-G pt. câmp complex

  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} = -m^2 \varphi$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = \dot{\varphi}$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi^*)} = -\nabla \varphi \implies \boxed{(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\varphi = 0}$ Ec. K-G pt. câmp real
- Soluțiile de *câmp (scalar) Klein-Gordon* real $\varphi(\vec{x}, t)$ și imaginar $\varphi^*(\vec{x}, t)$:

  $\varphi(\vec{x}, t) = \alpha(\vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$ $\quad \varphi^*(\vec{x}, t) = \alpha^*(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$ (absentă în NRQM) (36)
- - soluția pentru $E = \hbar\omega > 0$ (particule) este: $\varphi(\vec{x}, t) = \alpha(\vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$

  - soluția pentru $E < 0$ (antiparticule) este: $\varphi^*(\vec{x}, t) = \alpha^*(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$

  Pauli și Weisskopf (Helv.Phys.Acta 7,709 (1934)) au arătat că ec. K-G descrie partic. de spin 0. Ec. Dirac și Proca descriu partic. de spin 1/2 resp. spin 1.

Lagrangian și ecuații de câmp Klein-Gordon complex

- Lagrangian-ul K-G complex transcris după cel real (32): $$\boxed{\mathcal{L} = \dot\varphi^*\dot\varphi - \nabla\varphi^*\cdot\nabla\varphi - m^2\varphi^*\varphi \equiv \partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi} \quad (34)$$
- Inlocuind în Ec. E-L pt. cele 2 câmpuri: $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi^r} - \nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi^r)} = 0 \quad (35)$$
- Avem, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = -m^2\varphi^*$; $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = \dot\varphi^*$; $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi)} = -\nabla\varphi^*$ $\Longrightarrow$ $\boxed{(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\varphi^* = 0}$ Ec. K-G pt. câmp complex

  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*} = -m^2\varphi$; $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi^*} = \dot\varphi$; $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi^*)} = -\nabla\varphi$ $\Longrightarrow$ $\boxed{(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\varphi = 0}$ Ec. K-G pt. câmp real
- Soluțiile de *câmp (scalar) Klein-Gordon* real $\varphi(\vec{x}, t)$ și imaginar $\varphi^*(\vec{x}, t)$:

  $\varphi(\vec{x}, t) = \alpha(\vec{k})e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$ $\quad \varphi^*(\vec{x}, t) = \alpha^*(\vec{k})e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$ (absentă în NRQM) (36)
- \- soluția pentru $E = \hbar\omega > 0$ (particule) este: $\varphi(\vec{x}, t) = \alpha(\vec{k})e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$

  \- soluția pentru $E < 0$ (antiparticule) este: $\varphi^*(\vec{x}, t) = \alpha^*(\vec{k})e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$

  Pauli și Weisskopf (Helv.Phys.Acta 7,709 (1934)) au arătat că ec. K-G descrie partic. de spin 0. Ec. Dirac și Proca descriu partic. de spin 1/2 resp. spin 1.

Lagrangian și ecuații de câmp Klein-Gordon complex

- Lagrangian-ul K-G complex transcris după cel real (32): $\boxed{\mathcal{L} = \dot{\varphi}^* \dot{\varphi} - \nabla\varphi^* \cdot \nabla\varphi - m^2 \varphi^* \varphi \equiv \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi}$ (34)
- Inlocuind în Ec. E-L pt. cele 2 câmpuri: $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^r} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^r} - \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi^r)} = 0 \quad (35)$$
- Avem, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi^*$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^*$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla\varphi)} = -\nabla\varphi^* \implies \boxed{(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\varphi^* = 0}$ Ec. K-G pt. câmp complex

  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} = -m^2 \varphi$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = \dot{\varphi}$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla\varphi^*)} = -\nabla\varphi \implies \boxed{(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\varphi = 0}$ Ec. K-G pt. câmp real
- Soluțiile de *câmp (scalar) Klein-Gordon* real $\varphi(\vec{x}, t)$ și imaginar $\varphi^*(\vec{x}, t)$:

  $\varphi(\vec{x}, t) = \alpha(\vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$ $\quad \varphi^*(\vec{x}, t) = \alpha^*(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$ (absentă în NRQM) (36)
- \- soluția pentru $E = \hbar\omega > 0$ (particule) este: $\varphi(\vec{x}, t) = \alpha(\vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$

  \- soluția pentru $E < 0$ (antiparticule) este: $\varphi^*(\vec{x}, t) = \alpha^*(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$

  Pauli și Weisskopf (Helv.Phys.Acta 7,709 (1934)) au arătat că ec. K-G descrie partic. de spin 0. Ec. Dirac și Proca descriu partic. de spin 1/2 resp. spin 1.

Lagrangian și ecuații de câmp Klein-Gordon complex

- Lagrangian-ul K-G complex transcris după cel real (32): $$\boxed{\mathcal{L}=\dot{\varphi}^*\dot{\varphi}-\nabla\varphi^*\cdot\nabla\varphi-m^2\varphi^*\varphi\equiv\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi-m^2\varphi^*\varphi} \quad (34)$$
- Inlocuind în Ec. E-L pt. cele 2 câmpuri: $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}^r}-\nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\varphi^r\right)}=0 \quad (35)$$
- Avem, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}=-m^2\varphi^*$; $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=\dot{\varphi}^*$; $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi)}=-\nabla\varphi^* \Longrightarrow$ $\boxed{(\partial_t^2-\nabla^2+m^2)\varphi^*=0}$ Ec. K-G pt. câmp complex

  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*}=-m^2\varphi$; $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}^*}=\dot{\varphi}$; $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi^*)}=-\nabla\varphi \Longrightarrow$ $\boxed{(\partial_t^2-\nabla^2+m^2)\varphi=0}$ Ec. K-G pt. câmp real
- Soluțiile de *câmp (scalar) Klein-Gordon* real $\varphi(\vec{x},t)$ și imaginar $\varphi^*(\vec{x},t)$:

  $\varphi(\vec{x},t)=\alpha(\vec{k})e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$ $\quad\varphi^*(\vec{x},t)=\alpha^*(\vec{k})e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$ (absentă în NRQM) (36)
- \- soluția pentru $E=\hbar\omega>0$ (particule) este: $\varphi(\vec{x},t)=\alpha(\vec{k})e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$

  \- soluția pentru $E<0$ (antiparticule) este: $\varphi^*(\vec{x},t)=\alpha^*(\vec{k})e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$

  Pauli și Weisskopf (Helv.Phys.Acta 7,709 (1934)) au arătat că ec. K-G descrie partic. de spin 0. Ec. Dirac și Proca descriu partic. de spin 1/2 resp. spin 1.

Lagrangian și ecuații de câmp Klein-Gordon complex

- Lagrangian-ul K-G complex transcris după cel real (32): $$\boxed{\mathcal{L}=\dot{\varphi}^*\dot{\varphi}-\nabla\varphi^*\cdot\nabla\varphi-m^2\varphi^*\varphi\equiv\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi-m^2\varphi^*\varphi} \quad (34)$$
- Inlocuind în Ec. E-L pt. cele 2 câmpuri: $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^r}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}^r}-\nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\varphi^r\right)}=0 \quad (35)$$
- Avem, $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}=-m^2\varphi^*$; $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=\dot{\varphi}^*$; $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi)}=-\nabla\varphi^* \Longrightarrow$ $\boxed{(\partial_t^2-\nabla^2+m^2)\varphi^*=0}$
  Ec. K-G pt. câmp complex

  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*}=-m^2\varphi$; $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}^*}=\dot{\varphi}$; $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi^*)}=-\nabla\varphi \Longrightarrow$ $\boxed{(\partial_t^2-\nabla^2+m^2)\varphi=0}$
  Ec. K-G pt. câmp real
- Soluțiile de *câmp (scalar) Klein-Gordon* real $\varphi(\vec{x},t)$ și imaginar $\varphi^*(\vec{x},t)$:

  $\varphi(\vec{x},t)=\alpha(\vec{k})e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$ $\quad\varphi^*(\vec{x},t)=\alpha^*(\vec{k})e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$ (absentă în NRQM) (36)
- \- soluția pentru $E=\hbar\omega>0$ (particule) este: $\quad\varphi(\vec{x},t)=\alpha(\vec{k})e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$

  \- soluția pentru $E<0$ (antiparticule) este: $\quad\varphi^*(\vec{x},t)=\alpha^*(\vec{k})e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$

  Pauli și Weisskopf (Helv.Phys.Acta 7,709 (1934)) au arătat că ec. K-G descrie partic. de spin 0. Ec. Dirac și Proca descriu partic. de spin 1/2 resp. spin 1.

Soluția generală de câmp Klein-Gordon

- Soluția generală este o superpoziție de φ și φ^*.
  Dacă notăm $k\cdot x = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}$, avem

$$\varphi(\vec{x},t) = \int d^4k \left(\alpha_{\vec{k}} e^{-ik\cdot x} + \alpha^*_{\vec{k}} e^{ik\cdot x}\right) \tag{37}$$

Soluții discrete de undă plană	Soluții continui de undă plană
$\varphi(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{V 2\omega_{\vec{k}}}} \left(\alpha_{\vec{k}} e^{-ik\cdot x} + \beta^*_{\vec{k}} e^{ik\cdot x}\right)$	$\varphi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}} \left(\alpha_{\vec{k}} e^{-ik\cdot x} + \beta^*_{\vec{k}} e^{ik\cdot x}\right)$ (38)

Soluția generală de câmp Klein-Gordon

- Soluția generală este o superpoziție de φ și φ^*.

  Dacă notăm $k\cdot x = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}$, avem

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int d^4k \left(\alpha_{\vec{k}} e^{-ik\cdot x} + \alpha^*_{\vec{k}} e^{ik\cdot x}\right) \tag{37}$$

Soluții discrete de undă plană	Soluții continui de undă plană
$\varphi(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{V 2\omega_{\vec{k}}}}\left(\alpha_{\vec{k}} e^{-ik\cdot x} + \beta^*_{\vec{k}} e^{ik\cdot x}\right)$	$\varphi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}}\left(\alpha_{\vec{k}} e^{-ik\cdot x} + \beta^*_{\vec{k}} e^{ik\cdot x}\right)$ (38)

Soluția generală de câmp Klein-Gordon

- Soluția generală este o superpoziție de φ și φ^*.
  Dacă notăm $k\cdot x=\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x}$, avem

$$\varphi(\vec{x},t)=\int d^4k\left(\alpha_{\vec{k}}e^{-ik\cdot x}+\alpha^*_{\vec{k}}e^{ik\cdot x}\right) \tag{37}$$

Soluții discrete de undă plană	Soluții continui de undă plană
$\varphi(x)=\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{V2\omega_{\vec{k}}}}\left(\alpha_{\vec{k}}e^{-ik\cdot x}+\beta^*_{\vec{k}}e^{ik\cdot x}\right)$	$\varphi(x)=\int\frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}}\left(\alpha_{\vec{k}}e^{-ik\cdot x}+\beta^*_{\vec{k}}e^{ik\cdot x}\right)$ (38)

Lagrangian și ecuațiile de câmp Dirac (spin 1/2)

- Lagrangian-ul pentru *câmpuri Dirac* ψ și $\bar{\psi}$ ca variabile dinamice independente,
$$\boxed{\mathcal{L} = i\,\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi} \qquad (39)$$
- Ecuația de mișcare Euler-Lagrange (29) este
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}\right) = 0 \qquad (29)$$
iar ecuația Euler-Lagrange pentru $\bar{\psi}$ este:
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\psi})}\right) = 0 \qquad (40)$$
avem
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\psi})} = 0 \qquad (41)$$
- Din ec. Euler-Lagrange (29) pt. $\delta\bar{\phi}$ obținem ecuația Dirac pentru ψ:
$$\boxed{i\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi = 0} \qquad (42)$$
- Din ec. Euler-Lagrange (29) pt. $\delta\psi$ obținem ec. Dirac adjunctă pt. $\bar{\psi}$:
$$\boxed{i\,\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu} + m\bar{\psi} = 0} \qquad (43)$$
- Soluția pentru $E > 0$ (particule) este: $\psi(\vec{x}, t) = u(\vec{p})\, e^{-i\,p\cdot x}$
Soluția pentru $E < 0$ (antiparticule) e: $\bar{\psi}(\vec{x}, t) = v(\vec{p})\, e^{+i\,p\cdot x}$
- Spinorii:
$$u^{(1,2)} = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} \quad ; \quad v^{(1,2)} = N\begin{pmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lagrangian și ecuațiile de câmp Dirac (spin 1/2)

- Lagrangian-ul pentru *câmpuri Dirac* ψ și $\bar{\psi}$ ca variabile dinamice independente,
$$\boxed{\mathcal{L} = i\,\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi} \qquad (39)$$

- Ecuația de mișcare Euler-Lagrange (29) este
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right) = 0 \qquad (29)$$
iar ecuația Euler-Lagrange pentru $\bar{\psi}$ este:
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right) = 0 \qquad (40)$$
avem
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi \quad ; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = 0 \qquad (41)$$

- Din ec. Euler-Lagrange (29) pt. $\delta\bar{\phi}$ obținem ecuația Dirac pentru ψ:
$$\boxed{i\,\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0} \qquad (42)$$

- Din ec. Euler-Lagrange (29) pt. $\delta\psi$ obținem ec. Dirac adjunctă pt. $\bar{\psi}$:
$$\boxed{i\,\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0} \qquad (43)$$

- Soluția pentru $E>0$ (particule) este: $\psi(\vec{x},t) = u(\vec{p})\,e^{-i\,p\cdot x}$
Soluția pentru $E<0$ (antiparticule) e: $\bar{\psi}(\vec{x},t) = v(\vec{p})\,e^{+i\,p\cdot x}$

- Spinorii: $u^{(1,2)} = N\begin{pmatrix}1\\0\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\end{pmatrix} \quad ; \quad v^{(1,2)} = N\begin{pmatrix}\frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\\0\\1\end{pmatrix}$

Lagrangian și ecuațiile de câmp Dirac (spin 1/2)

- Lagrangian-ul pentru *câmpuri Dirac* ψ și $\bar\psi$ ca variabile dinamice independente,
$$\boxed{\mathcal{L} = i\,\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar\psi\psi} \qquad (39)$$
- Ecuația de mișcare Euler-Lagrange (29) este
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right) = 0 \qquad (29)$$
iar ecuația Euler-Lagrange pentru $\bar\psi$ este:
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar\psi)}\right) = 0 \qquad (40)$$
avem
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar\psi} = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi \quad ; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar\psi)} = 0 \qquad (41)$$
- Din ec. Euler-Lagrange (29) pt. $\delta\bar\phi$ obținem ecuația Dirac pentru ψ:
$$\boxed{i\,\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0} \qquad (42)$$
- Din ec. Euler-Lagrange (29) pt. $\delta\psi$ obținem ec. Dirac adjunctă pt. $\bar\psi$:
$$\boxed{i\,\partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu + m\bar\psi = 0} \qquad (43)$$
- Soluția pentru $E > 0$ (particule) este: $\psi(\vec{x}, t) = u(\vec{p})\, e^{-i\,p\cdot x}$
Soluția pentru $E < 0$ (antiparticule) e: $\bar\psi(\vec{x}, t) = v(\vec{p})\, e^{+i\,p\cdot x}$
- Spinorii: $u^{(1,2)} = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} \quad ; \quad v^{(1,2)} = N\begin{pmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lagrangian și ecuațiile de câmp Dirac (spin 1/2)

- Lagrangian-ul pentru *câmpuri Dirac* ψ și $\bar\psi$ ca variabile dinamice independente,
$$\boxed{\mathcal{L} = i\,\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar\psi\psi} \qquad (39)$$

- Ecuația de mișcare Euler-Lagrange (29) este
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right) = 0 \qquad (29)$$
iar ecuația Euler-Lagrange pentru $\bar\psi$ este:
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar\psi)}\right) = 0 \qquad (40)$$
avem
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar\psi} = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi \quad ; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar\psi)} = 0 \qquad (41)$$

- Din ec. Euler-Lagrange (29) pt. $\delta\bar\phi$ obținem ecuația Dirac pentru ψ:
$$\boxed{i\,\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0} \qquad (42)$$

- Din ec. Euler-Lagrange (29) pt. $\delta\psi$ obținem ec. Dirac adjunctă pt. $\bar\psi$:
$$\boxed{i\,\partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu + m\bar\psi = 0} \qquad (43)$$

- Soluția pentru $E > 0$ (particule) este: $\psi(\vec{x}, t) = u(\vec{p})\, e^{-i\,p\cdot x}$
Soluția pentru $E < 0$ (antiparticule) e: $\bar\psi(\vec{x}, t) = v(\vec{p})\, e^{+i\,p\cdot x}$

- Spinorii: $u^{(1,2)} = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} \quad ; \quad v^{(1,2)} = N\begin{pmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lagrangian și ecuațiile de câmp Dirac (spin 1/2)

- Lagrangian-ul pentru *câmpuri Dirac* ψ și $\bar{\psi}$ ca variabile dinamice independente, $$\boxed{\mathcal{L} = i\,\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi} \qquad (39)$$
- Ecuația de mișcare Euler-Lagrange (29) este $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}\right) = 0 \qquad (29)$$

  iar ecuația Euler-Lagrange pentru $\bar{\psi}$ este: $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\psi})}\right) = 0 \qquad (40)$$

  avem $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi \quad ; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\psi})} = 0 \qquad (41)$$
- Din ec. Euler-Lagrange (29) pt. $\delta\bar{\phi}$ obținem ecuația Dirac pentru ψ: $$\boxed{i\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi = 0} \qquad (42)$$
- Din ec. Euler-Lagrange (29) pt. $\delta\psi$ obținem ec. Dirac adjunctă pt. $\bar{\psi}$: $$\boxed{i\,\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu} + m\bar{\psi} = 0} \qquad (43)$$
- Soluția pentru $E > 0$ (particule) este: $\psi(\vec{x}, t) = u(\vec{p})\, e^{-i\,p\cdot x}$

  Soluția pentru $E < 0$ (antiparticule) e: $\bar{\psi}(\vec{x}, t) = v(\vec{p})\, e^{+i\,p\cdot x}$
- Spinorii: $$u^{(1,2)} = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} \quad ; \quad v^{(1,2)} = N\begin{pmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lagrangian și ecuațiile de câmp Dirac (spin 1/2)

- Lagrangian-ul pentru *câmpuri Dirac* ψ și $\bar{\psi}$ ca variabile dinamice independente,
$$\boxed{\mathcal{L} = i\,\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi} \qquad (39)$$
- Ecuația de mișcare Euler-Lagrange (29) este
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}\right) = 0 \qquad (29)$$
  iar ecuația Euler-Lagrange pentru $\bar{\psi}$ este:
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\psi})}\right) = 0 \qquad (40)$$
  avem
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi \quad ; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\psi})} = 0 \qquad (41)$$
- Din ec. Euler-Lagrange (29) pt. $\delta\bar{\phi}$ obținem ecuația Dirac pentru ψ:
$$\boxed{i\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi = 0} \qquad (42)$$
- Din ec. Euler-Lagrange (29) pt. $\delta\psi$ obținem ec. Dirac adjunctă pt. $\bar{\psi}$:
$$\boxed{i\,\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu} + m\bar{\psi} = 0} \qquad (43)$$
- Soluția pentru $E > 0$ (particule) este: $\psi(\vec{x}, t) = u(\vec{p})\, e^{-i\, p\cdot x}$
  Soluția pentru $E < 0$ (antiparticule) e: $\bar{\psi}(\vec{x}, t) = v(\vec{p})\, e^{+i\, p\cdot x}$
- Spinorii: $u^{(1,2)} = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma\cdot\mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix}$; $v^{(1,2)} = N\begin{pmatrix} \frac{-\sigma\cdot\mathbf{p}}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\sigma\cdot\mathbf{p}}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lagrangian și ecuațiile de câmp Dirac (spin 1/2)

- Lagrangian-ul pentru *câmpuri Dirac* ψ și $\bar{\psi}$ ca variabile dinamice independente, $$\boxed{\mathcal{L} = i\,\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi} \qquad (39)$$
- Ecuația de mișcare Euler-Lagrange (29) este $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}\right) = 0 \qquad (29)$$

  iar ecuația Euler-Lagrange pentru $\bar{\psi}$ este: $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\psi})}\right) = 0 \qquad (40)$$

  avem $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi \quad ; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\psi})} = 0 \qquad (41)$$
- Din ec. Euler-Lagrange (29) pt. $\delta\bar{\phi}$ obținem ecuația Dirac pentru ψ: $$\boxed{i\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi = 0} \qquad (42)$$
- Din ec. Euler-Lagrange (29) pt. $\delta\psi$ obținem ec. Dirac adjunctă pt. $\bar{\psi}$: $$\boxed{i\,\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu} + m\bar{\psi} = 0} \qquad (43)$$
- Soluția pentru $E > 0$ (particule) este: $\psi(\vec{x}, t) = u(\vec{p})\, e^{-i\,p\cdot x}$

  Soluția pentru $E < 0$ (antiparticule) e: $\bar{\psi}(\vec{x}, t) = v(\vec{p})\, e^{+i\,p\cdot x}$
- Spinorii: $u^{(1,2)} = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix}$; $v^{(1,2)} = N\begin{pmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lagrangian și ecuațiile de câmp Dirac (spin 1/2)

- Lagrangian-ul pentru *câmpuri Dirac* ψ și $\bar{\psi}$ ca variabile dinamice independente, $$\boxed{\mathcal{L} = i\,\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi} \tag{39}$$
- Ecuația de mișcare Euler-Lagrange (29) este $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}\right) = 0 \tag{29}$$

  iar ecuația Euler-Lagrange pentru $\bar{\psi}$ este: $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\psi})}\right) = 0 \tag{40}$$

  avem $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi \quad ; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\psi})} = 0 \tag{41}$$
- Din ec. Euler-Lagrange (29) pt. $\delta\bar{\phi}$ obținem ecuația Dirac pentru ψ: $$\boxed{i\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi = 0} \tag{42}$$
- Din ec. Euler-Lagrange (29) pt. $\delta\psi$ obținem ec. Dirac adjunctă pt. $\bar{\psi}$: $$\boxed{i\,\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu} + m\bar{\psi} = 0} \tag{43}$$
- Soluția pentru $E > 0$ (particule) este: $\psi(\vec{x}, t) = u(\vec{p})\, e^{-i\,p\cdot x}$

  Soluția pentru $E < 0$ (antiparticule) e: $\bar{\psi}(\vec{x}, t) = v(\vec{p})\, e^{+i\,p\cdot x}$
- Spinorii: $$u^{(1,2)} = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} \quad ; \quad v^{(1,2)} = N\begin{pmatrix} \dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lagrangian de câmp Maxwell

- Ecuațiile Maxwell: $$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (a) \quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (c) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad (b) \quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (d) \end{cases} \tag{44}$$
- Câmpurile $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt date de potențialele scalar φ si vector $\vec{A}$: $$\begin{cases} \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases} \tag{45}$$
- De data asta căutăm ecuațiile de câmp EM (Maxwell) (44) cu ajutorul ecuațiilor Euler-Lagrange (29). Pentru aceasta avem nevoie de
- Lagrangian-ul pt. câmpul EM este: $$\boxed{\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2-\frac{1}{\mu_0}B^2\right)-\rho\varphi+\vec{J}\cdot\vec{A}} \tag{46}$$
- $\mathcal{L}$ conține termenii: (1) - *densit. de energie* din câmpul EM, (2) - densit. de energia dată de interacția *densit. de sarcină* ρ cu *potențial scalar* φ și (3) - densit. de energie dată de interacția *densit. de curent* $\vec{J}$ cu *potențial vector* $\vec{A}$ (vezi (16) "particulă în câmp EM" din Mecanica-Clasică).

Lagrangian de câmp Maxwell

- Ecuațiile Maxwell: $$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (a) & \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (c) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad (b) & \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (d) \end{cases} \tag{44}$$
- Câmpurile $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt date de potențialele scalar φ si vector $\vec{A}$: $$\begin{cases} \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases} \tag{45}$$
- De data asta căutăm ecuațiile de câmp EM (Maxwell) (44) cu ajutorul ecuațiilor Euler-Lagrange (29). Pentru aceasta avem nevoie de
- Lagrangian-ul pt. câmpul EM este: $$\boxed{\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2-\frac{1}{\mu_0}B^2\right)-\rho\varphi+\vec{J}\cdot\vec{A}} \tag{46}$$
- $\mathcal{L}$ conține termenii: (1) - *densit. de energie* din câmpul EM, (2) - densit. de energia dată de interacția *densit. de sarcină* ρ cu *potențial scalar* φ și (3) - densit. de energie dată de interacția *densit. de curent* $\vec{J}$ cu *potențial vector* $\vec{A}$ (vezi (16) "particulă în câmp EM" din Mecanica-Clasică).

Lagrangian de câmp Maxwell

- Ecuațiile Maxwell: $$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\epsilon_0} \quad (a) & \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (c) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad (b) & \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (d) \end{cases} \quad (44)$$
- Câmpurile $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt date de potențialele scalar φ si vector $\vec{A}$: $$\begin{cases} \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases} \quad (45)$$
- De data asta căutăm ecuațiile de câmp EM (Maxwell) (44) cu ajutorul ecuațiilor Euler-Lagrange (29). Pentru aceasta avem nevoie de
- Lagrangian-ul pt. câmpul EM este: $$\boxed{\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\epsilon_0E^2-\frac{1}{\mu_0}B^2\right)-\rho\varphi+\vec{J}\cdot\vec{A}} \quad (46)$$
- $\mathcal{L}$ conține termenii: (1) - *densit. de energie* din câmpul EM, (2) - densit. de energia dată de interacția *densit. de sarcină* ρ cu *potențial scalar* φ și (3) - densit. de energie dată de interacția *densit. de curent* $\vec{J}$ cu *potențial vector* $\vec{A}$ (vezi (16) "particulă în câmp EM" din Mecanica-Clasică).

Lagrangian de câmp Maxwell

- Ecuațiile Maxwell: $$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\epsilon_0} \quad (a) & \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (c) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad (b) & \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (d) \end{cases} \tag{44}$$
- Câmpurile $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt date de potențialele scalar φ si vector $\vec{A}$: $$\begin{cases} \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases} \tag{45}$$
- De data asta căutăm ecuațiile de câmp EM (Maxwell) (44) cu ajutorul ecuațiilor Euler-Lagrange (29). Pentru aceasta avem nevoie de
- Lagrangian-ul pt. câmpul EM este: $$\boxed{\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2-\frac{1}{\mu_0}B^2\right)-\rho\varphi+\vec{J}\cdot\vec{A}} \tag{46}$$
- $\mathcal{L}$ conține termenii: (1) - *densit. de energie* din câmpul EM, (2) - densit. de energia dată de interacția *densit. de sarcină ρ* cu *potențial scalar φ* și (3) - densit. de energie dată de interacția *densit. de curent $\vec{J}$* cu *potențial vector $\vec{A}$* (vezi (16) "particulă în câmp EM" din Mecanica-Clasică).

Lagrangian de câmp Maxwell

- Ecuațiile Maxwell: $$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\epsilon_0} & (a) \quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (c) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 & (b) \quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (d) \end{cases} \tag{44}$$
- Câmpurile $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt date de potențialele scalar φ si vector $\vec{A}$: $$\begin{cases} \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases} \tag{45}$$
- De data asta căutăm ecuațiile de câmp EM (Maxwell) (44) cu ajutorul ecuațiilor Euler-Lagrange (29). Pentru aceasta avem nevoie de
- Lagrangian-ul pt. câmpul EM este: $$\boxed{\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2-\frac{1}{\mu_0}B^2\right)-\rho\varphi+\vec{J}\cdot\vec{A}} \tag{46}$$
- $\mathcal{L}$ conține termenii: (1) - *densit. de energie* din câmpul EM, (2) - densit. de energia dată de interacția *densit. de sarcină* ρ cu *potențial scalar* φ și (3) - densit. de energie dată de interacția *densit. de curent* $\vec{J}$ cu *potențial vector* $\vec{A}$ (vezi (16) "particulă în câmp EM" din Mecanica-Clasică).

Lagrangian de câmp Maxwell

- Ecuațiile Maxwell:
$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\epsilon_0} \quad (a) & \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (c) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad (b) & \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (d) \end{cases} \tag{44}$$
- Câmpurile $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt date de potențialele scalar φ si vector $\vec{A}$:
$$\begin{cases} \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases} \tag{45}$$
- De data asta căutăm ecuațiile de câmp EM (Maxwell) (44) cu ajutorul ecuațiilor Euler-Lagrange (29). Pentru aceasta avem nevoie de
- Lagrangian-ul pt. câmpul EM este:
$$\boxed{\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2-\frac{1}{\mu_0}B^2\right)-\rho\varphi+\vec{J}\cdot\vec{A}} \tag{46}$$
- $\mathcal{L}$ conține termenii: (1) - *densit. de energie* din câmpul EM, (2) - densit. de energia dată de interacția *densit. de sarcină* ρ cu *potențial scalar* φ și (3) - densit. de energie dată de interacția *densit. de curent* $\vec{J}$ cu *potențial vector* $\vec{A}$ (vezi (16) "particulă în câmp EM" din Mecanica-Clasică).

Lagrangian de câmp Maxwell

- Ecuațiile Maxwell:
$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\epsilon_0} \quad (a) & \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (c) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad (b) & \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (d) \end{cases} \tag{44}$$
- Câmpurile $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt date de potențialele scalar φ si vector $\vec{A}$:
$$\begin{cases} \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases} \tag{45}$$
- De data asta căutăm ecuațiile de câmp EM (Maxwell) (44) cu ajutorul ecuațiilor Euler-Lagrange (29). Pentru aceasta avem nevoie de
- Lagrangian-ul pt. câmpul EM este:
$$\boxed{\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\epsilon_0E^2-\frac{1}{\mu_0}B^2\right)-\rho\varphi+\vec{J}\cdot\vec{A}} \tag{46}$$
- $\mathcal{L}$ conține termenii: (1) - *densit. de energie* din câmpul EM, (2) - densit. de energia dată de interacția *densit. de sarcină* ρ cu *potențial scalar* φ și (3) - densit. de energie dată de interacția *densit. de curent* $\vec{J}$ cu *potențial vector* $\vec{A}$ (vezi (16) "particulă în câmp EM" din Mecanica-Clasică).

Ecuațiile Maxwell (a)

- Ecuațiile de câmp (ecuațiile de mișcare Euler-Lagrange) (29)
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}-\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}q_i)}\right)=0 \qquad (29)$$
unde variabilele independente (coordonatele) q_i de câmp de data asta sunt potențialul scalar φ și componentele de potențial vector A_x, A_y, A_z.
- Evaluăm întâi termenii pt. $q_i=\varphi$ din ec. E-L (29) cu expresia $\mathcal{L}$ (46): adică: $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}=-\rho$; $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=0$; pt. $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}$ avem $\vec{\nabla}\varphi=-\vec{E}$,
iar $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)_x}=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial E_x}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\epsilon_0E^2\right)}{\partial E_x}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\epsilon_0(E_x^2+E_y^2+E_z^2)\right)}{\partial E_x}=-\epsilon_0E_x$$
și la fel pentru componentele după y și z, atunci:
$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}\right)=-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial E_x}\right)-\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial E_y}\right)-\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial E_z}\right)=-\epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$
- Inlocuind în (29), avem: $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}-\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}\right)=-\rho+\epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$$
sau $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}}$ adică am obținut I-a ecuație Maxwell (44)-(a).

Ecuațiile Maxwell (a)

- Ecuațiile de câmp (ecuațiile de mișcare Euler-Lagrange) (29)
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla} q_i)}\right) = 0 \qquad (29)$$
unde variabilele independente (coordonatele) q_i de câmp de data asta sunt potențialul scalar φ și componentele de potențial vector A_x, A_y, A_z.

- Evaluăm întâi termenii pt. $q_i = \varphi$ din ec. E-L (29) cu expresia $\mathcal{L}$ (46):
adică: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\rho$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 0$; pt. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}$ avem $\vec{\nabla}\varphi = -\vec{E}$,
$$\text{iar } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)_x} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_x} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\right)}{\partial E_x} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\epsilon_0(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)\right)}{\partial E_x} = -\epsilon_0 E_x$$
și la fel pentru componentele după y și z, atunci:
$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}\right) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_x}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_y}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_z}\right) = -\epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

- Inlocuind în (29), avem: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}\right) = -\rho + \epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$
sau $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$ adică am obținut I-a ecuație Maxwell (44)-(a).

Ecuațiile Maxwell (a)

- Ecuațiile de câmp (ecuațiile de mișcare Euler-Lagrange) (29) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla} q_i)}\right) = 0 \qquad (29)$$
  unde variabilele independente (coordonatele) q_i de câmp de data asta sunt potențialul scalar φ și componentele de potențial vector A_x, A_y, A_z.
- Evaluăm întâi termenii pt. $q_i = \varphi$ din ec. E-L (29) cu expresia $\mathcal{L}$ (46):
  adică: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\rho$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 0$; pt. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}$ avem $\vec{\nabla}\varphi = -\vec{E}$,
  iar $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)_x} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_x} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\right)}{\partial E_x} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)\right)}{\partial E_x} = -\epsilon_0 E_x$$
  și la fel pentru componentele după y și z, atunci:
  $$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}\right) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_x}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_y}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_z}\right) = -\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$
- Inlocuind în (29), avem: $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}\right) = -\rho + \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$
  sau $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$ adică am obținut I-a ecuație Maxwell (44)-(a).

Ecuațiile Maxwell (a)

- Ecuațiile de câmp (ecuațiile de mișcare Euler-Lagrange) (29)
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} q_i)}\right) = 0 \qquad (29)$$
unde variabilele independente (coordonatele) q_i de câmp de data asta sunt potențialul scalar φ și componentele de potențial vector A_x, A_y, A_z.
- Evaluăm întâi termenii pt. $q_i = \varphi$ din ec. E-L (29) cu expresia $\mathcal{L}$ (46):
adică: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\rho$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 0$; pt. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla}\varphi)}$ avem $\vec{\nabla}\varphi = -\vec{E}$,
iar $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla}\varphi)_x} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_x} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\right)}{\partial E_x} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\epsilon_0(E_x^2+E_y^2+E_z^2)\right)}{\partial E_x} = -\epsilon_0 E_x$
și la fel pentru componentele după y și z, atunci:
$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla}\varphi)}\right) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_x}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_y}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_z}\right) = -\epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$
- Inlocuind în (29), avem: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla}\varphi)}\right) = -\rho + \epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$

sau $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$ adică am obținut I-a ecuație Maxwell (44)-(a).

Ecuațiile Maxwell (a)

- Ecuațiile de câmp (ecuațiile de mișcare Euler-Lagrange) (29) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla} q_i)}\right) = 0 \qquad (29)$$
  unde variabilele independente (coordonatele) q_i de câmp de data asta sunt potențialul scalar φ și componentele de potențial vector A_x, A_y, A_z.
- Evaluăm întâi termenii pt. $q_i = \varphi$ din ec. E-L (29) cu expresia $\mathcal{L}$ (46):
  adică: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\rho$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 0$; pt. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}$ avem $\vec{\nabla}\varphi = -\vec{E}$,
  iar $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)_x} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_x} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\right)}{\partial E_x} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)\right)}{\partial E_x} = -\epsilon_0 E_x$$
  și la fel pentru componentele după y și z, atunci:
  $$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}\right) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_x}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_y}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_z}\right) = -\epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$
- Inlocuind în (29), avem: $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}\right) = -\rho + \epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$
  sau $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$ adică am obținut I-a ecuație Maxwell (44)-(a).

Ecuațiile Maxwell (d)

- Ecuațiile Euler-Lagrange (29) pentru $q_i = A_i$ $(i = x, y, z)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla} A_i)}\right) = 0 \qquad (29)$$

- Densitatea de Lagrangian (46) pt. câmpul EM este:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 - \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \rho\varphi + \vec{J}\cdot\vec{A} \qquad (46)$$

- Explicit, câmpurile $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt legate de potențialele φ și $\vec{A}$ prin (45):

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \dot{A}_x\right)\vec{i} + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \dot{A}_y\right)\vec{j} + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \dot{A}_z\right)\vec{k}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = \left(\partial_y A_z - \partial_z A_y\right)\vec{i} + \left(\partial_z A_x - \partial_x A_z\right)\vec{j} + \left(\partial_x A_y - \partial_y A_x\right)\vec{k}$$

- Pt. $A_i = A_x$, termenul din $\mathcal{L}$ (46) ce depinde de A_x este $\vec{J}\cdot\vec{A}$, cel ce depinde de $\dot{A}_x$ este $\epsilon_0 E^2/2$, iar cel ce depinde de $\partial_j A_x$ este $-B^2/2\mu_0$. Atunci (29) devine:

$$\frac{\partial(\vec{J}\cdot\vec{A})}{\partial A_x} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial(\epsilon_0 E^2/2)}{\partial \dot{A}_x} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial(-B^2/2\mu_0)}{\partial(\partial_j A_x)}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial A_x}(J_x A_x + J_y A_y + J_z A_z) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial \dot{A}_x} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial(\partial_j A_x)} = 0$$

$$J_x + \epsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\underbrace{\left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\right)}_{-(\vec{\nabla}\times\vec{B})_x} = 0 \quad \text{la fel pt. } y \text{ și } z \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Ecuațiile Maxwell (d)

- Ecuațiile Euler-Lagrange (29) pentru $q_i = A_i$ $(i = x, y, z)$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla} A_i)}\right) = 0 \qquad (29)$$
- Densitatea de Lagrangian (46) pt. câmpul EM este:
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 - \frac{1}{\mu_0} B^2\right) - \rho\varphi + \vec{J}\cdot\vec{A} \qquad (46)$$
- Explicit, câmpurile $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt legate de potențialele φ și $\vec{A}$ prin (45):
$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \dot{A}_x\right)\vec{i} + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \dot{A}_y\right)\vec{j} + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \dot{A}_z\right)\vec{k}$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = \left(\partial_y A_z - \partial_z A_y\right)\vec{i} + \left(\partial_z A_x - \partial_x A_z\right)\vec{j} + \left(\partial_x A_y - \partial_y A_x\right)\vec{k}$$
- Pt. $A_i = A_x$, termenul din $\mathcal{L}$ (46) ce depinde de A_x este $\vec{J}\cdot\vec{A}$, cel ce depinde de $\dot{A}_x$ este $\epsilon_0 E^2/2$, iar cel ce depinde de $\partial_j A_x$ este $-B^2/2\mu_0$. Atunci (29) devine:
$$\frac{\partial(\vec{J}\cdot\vec{A})}{\partial A_x} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial(\epsilon_0 E^2/2)}{\partial \dot{A}_x} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial(-B^2/2\mu_0)}{\partial(\partial_j A_x)}\right) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial A_x}(J_x A_x + J_y A_y + J_z A_z) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial \dot{A}_x} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial(\partial_j A_x)} = 0$$
$$J_x + \epsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\underbrace{\left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\right)}_{-(\vec{\nabla}\times\vec{B})_x} = 0 \quad \text{la fel pt. } y \text{ și } z \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

Ecuațiile Maxwell (d)

- Ecuațiile Euler-Lagrange (29) pentru $q_i = A_i \quad (i = x, y, z)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla} A_i)}\right) = 0 \qquad (29)$$

- Densitatea de Lagrangian (46) pt. câmpul EM este:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 - \frac{1}{\mu_0} B^2\right) - \rho\varphi + \vec{J}\cdot\vec{A} \qquad (46)$$

- Explicit, câmpurile $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt legate de potențialele φ și $\vec{A}$ prin (45):

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \dot{A}_x\right)\vec{i} + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \dot{A}_y\right)\vec{j} + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \dot{A}_z\right)\vec{k}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = \left(\partial_y A_z - \partial_z A_y\right)\vec{i} + \left(\partial_z A_x - \partial_x A_z\right)\vec{j} + \left(\partial_x A_y - \partial_y A_x\right)\vec{k}$$

- Pt. $A_i = A_x$, termenul din $\mathcal{L}$ (46) ce depinde de A_x este $\vec{J}\cdot\vec{A}$, cel ce depinde de $\dot{A}_x$ este $\epsilon_0 E^2/2$, iar cel ce depinde de $\partial_j A_x$ este $-B^2/2\mu_0$. Atunci (29) devine:

$$\frac{\partial(\vec{J}\cdot\vec{A})}{\partial A_x} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial(\epsilon_0 E^2/2)}{\partial \dot{A}_x} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial(-B^2/2\mu_0)}{\partial(\partial_j A_x)}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial A_x}(J_x A_x + J_y A_y + J_z A_z) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial \dot{A}_x} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial(\partial_j A_x)} = 0$$

$$J_x + \epsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\underbrace{\left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\right)}_{-(\vec{\nabla}\times\vec{B})_x} = 0 \quad \text{la fel pt. } y \text{ și } z \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

Ecuațiile Maxwell (d)

- Ecuațiile Euler-Lagrange (29) pentru $q_i = A_i \quad (i = x, y, z)$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla} A_i)}\right) = 0 \qquad (29)$$
- Densitatea de Lagrangian (46) pt. câmpul EM este:
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 - \frac{1}{\mu_0} B^2\right) - \rho\varphi + \vec{J}\cdot\vec{A} \qquad (46)$$
- Explicit, câmpurile $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt legate de potențialele φ și $\vec{A}$ prin (45):

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \dot{A}_x\right)\vec{i} + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \dot{A}_y\right)\vec{j} + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \dot{A}_z\right)\vec{k}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = \left(\partial_y A_z - \partial_z A_y\right)\vec{i} + \left(\partial_z A_x - \partial_x A_z\right)\vec{j} + \left(\partial_x A_y - \partial_y A_x\right)\vec{k}$$

- Pt. $A_i = A_x$, termenul din $\mathcal{L}$ (46) ce depinde de A_x este $\vec{J}\cdot\vec{A}$, cel ce depinde de $\dot{A}_x$ este $\epsilon_0 E^2/2$, iar cel ce depinde de $\partial_j A_x$ este $-B^2/2\mu_0$. Atunci (29) devine:

$$\frac{\partial(\vec{J}\cdot\vec{A})}{\partial A_x} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial(\epsilon_0 E^2/2)}{\partial \dot{A}_x} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial(-B^2/2\mu_0)}{\partial(\partial_j A_x)}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial A_x}(J_x A_x + J_y A_y + J_z A_z) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial \dot{A}_x} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial(\partial_j A_x)} = 0$$

$$J_x + \epsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\underbrace{\left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\right)}_{-(\vec{\nabla}\times\vec{B})_x} = 0 \quad \text{la fel pt. } y \text{ și } z \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

Ecuațiile Maxwell (d)

- Ecuațiile Euler-Lagrange (29) pentru $q_i = A_i \quad (i = x, y, z)$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla} A_i)}\right) = 0 \qquad (29)$$
- Densitatea de Lagrangian (46) pt. câmpul EM este:
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 - \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \rho\varphi + \vec{J}\cdot\vec{A} \qquad (46)$$
- Explicit, câmpurile $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt legate de potențialele φ și $\vec{A}$ prin (45):
$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \dot{A}_x\right)\vec{i} + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \dot{A}_y\right)\vec{j} + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \dot{A}_z\right)\vec{k}$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = \left(\partial_y A_z - \partial_z A_y\right)\vec{i} + \left(\partial_z A_x - \partial_x A_z\right)\vec{j} + \left(\partial_x A_y - \partial_y A_x\right)\vec{k}$$
- Pt. $A_i = A_x$, termenul din $\mathcal{L}$ (46) ce depinde de A_x este $\vec{J}\cdot\vec{A}$, cel ce depinde de $\dot{A}_x$ este $\epsilon_0 E^2/2$, iar cel ce depinde de $\partial_j A_x$ este $-B^2/2\mu_0$. Atunci (29) devine:
$$\frac{\partial(\vec{J}\cdot\vec{A})}{\partial A_x} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial(\epsilon_0 E^2/2)}{\partial \dot{A}_x} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial(-B^2/2\mu_0)}{\partial(\partial_j A_x)}\right) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial A_x}(J_x A_x + J_y A_y + J_z A_z) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial \dot{A}_x} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial(\partial_j A_x)} = 0$$
$$J_x + \epsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\underbrace{\left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\right)}_{-(\vec{\nabla}\times\vec{B})_x} = 0$$
la fel pt. y și $z \Rightarrow$ $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$

Ecuațiile Maxwell (d)

- Ecuațiile Euler-Lagrange (29) pentru $q_i = A_i \quad (i = x, y, z)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla} A_i)}\right) = 0 \qquad (29)$$

- Densitatea de Lagrangian (46) pt. câmpul EM este:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 - \frac{1}{\mu_0} B^2\right) - \rho\varphi + \vec{J}\cdot\vec{A} \qquad (46)$$

- Explicit, câmpurile $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt legate de potențialele φ și $\vec{A}$ prin (45):

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \dot{A}_x\right)\vec{i} + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \dot{A}_y\right)\vec{j} + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \dot{A}_z\right)\vec{k}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = \left(\partial_y A_z - \partial_z A_y\right)\vec{i} + \left(\partial_z A_x - \partial_x A_z\right)\vec{j} + \left(\partial_x A_y - \partial_y A_x\right)\vec{k}$$

- Pt. $A_i = A_x$, termenul din $\mathcal{L}$ (46) ce depinde de A_x este $\vec{J}\cdot\vec{A}$, cel ce depinde de $\dot{A}_x$ este $\epsilon_0 E^2/2$, iar cel ce depinde de $\partial_j A_x$ este $-B^2/2\mu_0$. Atunci (29) devine:

$$\frac{\partial(\vec{J}\cdot\vec{A})}{\partial A_x} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial(\epsilon_0 E^2/2)}{\partial \dot{A}_x} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial(-B^2/2\mu_0)}{\partial(\partial_j A_x)}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial A_x}(J_x A_x + J_y A_y + J_z A_z) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial \dot{A}_x} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial(\partial_j A_x)} = 0$$

$$J_x + \epsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\underbrace{\left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\right)}_{-(\vec{\nabla}\times\vec{B})_x} = 0$$

la fel pt. y și $z \Rightarrow$ $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

Ecuațiile Maxwell (b)-(c)

- Celelalte două ecuații Maxwell (44) (b)-(c) se obțin imediat din expresiile (45) ale câmpurilor prin potențiale.
  Pentru $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$, deoarece divergență de rotor este zero, avem imediat:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=div(\vec{B})=div(\vec{\nabla}\times\vec{A})=div\ rot(\vec{A})=0 \qquad \text{(b)}$$

- Pentru $\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\partial\vec{A}/\partial t$, deoarece rotor din gradient este zero, avem,

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=rot(\vec{E})=-rot\ grad(\varphi)-\frac{\partial}{\partial t}rot(\vec{A})=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(c)}$$

Ecuațiile Maxwell (b)-(c)

- Celelalte două ecuații Maxwell (44) (b)-(c) se obțin imediat din expresiile (45) ale câmpurilor prin potențiale.
  Pentru $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, deoarece divergență de rotor este zero, avem imediat:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = div(\vec{B}) = div(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = div\ rot(\vec{A}) = 0 \qquad \text{(b)}$$

- Pentru $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \partial\vec{A}/\partial t$, deoarece rotor din gradient este zero, avem,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = rot(\vec{E}) = -rot\ grad(\varphi) - \frac{\partial}{\partial t} rot(\vec{A}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(c)}$$

Ecuațiile Maxwell (b)-(c)

- Celelalte două ecuații Maxwell (44) (b)-(c) se obțin imediat din expresiile (45) ale câmpurilor prin potențiale.
  Pentru $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, deoarece divergență de rotor este zero, avem imediat:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = div(\vec{B}) = div(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = div\ rot(\vec{A}) = 0 \qquad \text{(b)}$$

- Pentru $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \partial\vec{A}/\partial t$, deoarece rotor din gradient este zero, avem,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = rot(\vec{E}) = -rot\ grad(\varphi) - \frac{\partial}{\partial t} rot(\vec{A}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(c)}$$

Ecuațiile Maxwell (b)-(c)

- Celelalte două ecuații Maxwell (44) (b)-(c) se obțin imediat din expresiile (45) ale câmpurilor prin potențiale.
  Pentru $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$, deoarece divergență de rotor este zero, avem imediat:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=div(\vec{B})=div(\vec{\nabla}\times\vec{A})=div\ rot(\vec{A})=0 \qquad \text{(b)}$$

- Pentru $\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\partial\vec{A}/\partial t$, deoarece rotor din gradient este zero, avem,

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=rot(\vec{E})=-rot\ grad(\varphi)-\frac{\partial}{\partial t}rot(\vec{A})=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(c)}$$

Ecuațiile Maxwell (b)-(c)

- Celelalte două ecuații Maxwell (44) (b)-(c) se obțin imediat din expresiile (45) ale câmpurilor prin potențiale.
  Pentru $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, deoarece divergență de rotor este zero, avem imediat:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = div(\vec{B}) = div(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = div\ rot(\vec{A}) = 0 \qquad \text{(b)}$$

- Pentru $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \partial\vec{A}/\partial t$, deoarece rotor din gradient este zero, avem,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = rot(\vec{E}) = -rot\ grad(\varphi) - \frac{\partial}{\partial t} rot(\vec{A}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(c)}$$

Câmp scalar real

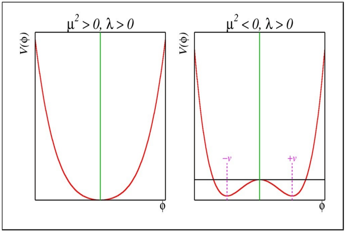
- Lagrangian-ul unui camp scalar real φ, similar cu Lagrangian-ul unui oscilator armonic ($L = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2$), este de forma:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi) \quad (47)$$

unde

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^4\right) \quad (48)$$

unde μ^2 și λ sunt doi parametri reali, parametrii liberi ai teoriei.



- In cazul $\mu^2 > 0$ și $\lambda > 0$ potentialul (48) are forma de potențial de oscilator armonic (fig. stânga), cu particulă de masă reală pozitivă ($\mu^2 > 0$).
- In cazul $\mu^2 < 0$ și $\lambda > 0$, potențialul are forma din dreapta. O particulă din centrul de simetrie, cu masa imaginară (termenul de masă $\mu^2 < 0$) nu se mai opune scoaterii din poziția de simetrie $\varphi(x) = 0$, dimpotrivă, spontan se poate deplasa din această poziție, până ajunge într-una din pozițiile de minim de potențial (aflat prin anularea derivatei $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \mu^2 + \lambda\varphi^2 = 0$), adică:

$$\varphi = \pm v \equiv \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \quad (49)$$

Câmp scalar real

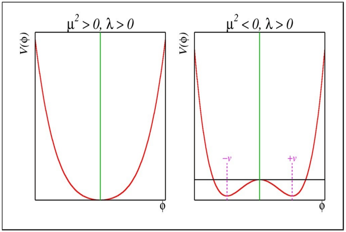
- Lagrangian-ul unui camp scalar real φ, similar cu Lagrangian-ul unui oscilator armonic ($L = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2$), este de forma:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi) \quad (47)$$

unde

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^4\right) \quad (48)$$

unde μ^2 și λ sunt doi parametri reali, parametrii liberi ai teoriei.



- In cazul $\mu^2 > 0$ și $\lambda > 0$ potentialul (48) are forma de potențial de oscilator armonic (fig. stânga), cu particulă de masă reală pozitivă ($\mu^2 > 0$).
- In cazul $\mu^2 < 0$ și $\lambda > 0$, potențialul are forma din dreapta. O particulă din centrul de simetrie, cu masa imaginară (termenul de masă $\mu^2 < 0$) nu se mai opune scoaterii din poziția de simetrie $\varphi(x) = 0$, dimpotrivă, spontan se poate deplasa din această poziție, până ajunge într-una din pozițiile de minim de potențial (aflat prin anularea derivatei $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \mu^2 + \lambda\varphi^2 = 0$), adică:

$$\varphi = \pm v \equiv \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \quad (49)$$

Câmp scalar real

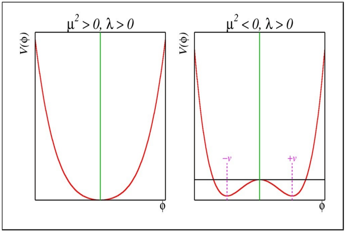
- Lagrangian-ul unui camp scalar real φ, similar cu Lagrangian-ul unui oscilator armonic ($L = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2$), este de forma:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi\right)^2 - V(\varphi) \quad (47)$$

unde

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^4\right) \quad (48)$$

unde μ^2 și λ sunt doi parametri reali, parametrii liberi ai teoriei.



- In cazul $\mu^2 > 0$ și $\lambda > 0$ potentialul (48) are forma de potențial de oscilator armonic (fig. stânga), cu particulă de masă reală pozitivă ($\mu^2 > 0$).
- In cazul $\mu^2 < 0$ și $\lambda > 0$, potențialul are forma din dreapta. O particulă din centrul de simetrie, cu masa imaginară (termenul de masă $\mu^2 < 0$) nu se mai opune scoaterii din poziția de simetrie $\varphi(x) = 0$, dimpotrivă, spontan se poate deplasa din această poziție, până ajunge într-una din pozițiile de minim de potențial (aflat prin anularea derivatei $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \mu^2 + \lambda\varphi^2 = 0$), adică:

$$\varphi = \pm v \equiv \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \quad (49)$$

Câmp scalar real

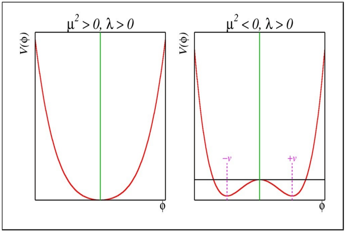
- Lagrangian-ul unui camp scalar real φ, similar cu Lagrangian-ul unui oscilator armonic ($L = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2$), este de forma:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi\right)^2 - V(\varphi) \quad (47)$$

unde

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^4\right) \quad (48)$$

unde μ^2 și λ sunt doi parametri reali, parametrii liberi ai teoriei.



- In cazul $\mu^2 > 0$ și $\lambda > 0$ potentialul (48) are forma de potențial de oscilator armonic (fig. stânga), cu particulă de masă reală pozitivă ($\mu^2 > 0$).
- In cazul $\mu^2 < 0$ și $\lambda > 0$, potențialul are forma din dreapta. O particulă din centrul de simetrie, cu masa imaginară (termenul de masă $\mu^2 < 0$) nu se mai opune scoaterii din poziția de simetrie $\varphi(x) = 0$, dimpotrivă, spontan se poate deplasa din această poziție, până ajunge într-una din pozițiile de minim de potențial (aflat prin anularea derivatei $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \mu^2 + \lambda\varphi^2 = 0$), adică:

$$\varphi = \pm v \equiv \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \quad (49)$$

Câmp scalar real

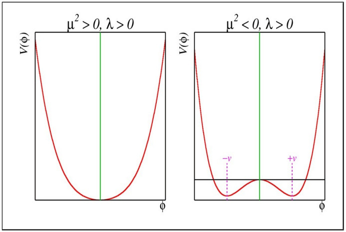
- Lagrangian-ul unui camp scalar real φ, similar cu Lagrangian-ul unui oscilator armonic ($L = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2$), este de forma:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi) \quad (47)$$

unde

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^4\right) \quad (48)$$

unde μ^2 și λ sunt doi parametri reali, parametrii liberi ai teoriei.



- In cazul $\mu^2 > 0$ și $\lambda > 0$ potentialul (48) are forma de potențial de oscilator armonic (fig. stânga), cu particulă de masă reală pozitivă ($\mu^2 > 0$).
- In cazul $\mu^2 < 0$ și $\lambda > 0$, potențialul are forma din dreapta. O particulă din centrul de simetrie, cu masa imaginară (termenul de masă $\mu^2 < 0$) nu se mai opune scoaterii din poziția de simetrie $\varphi(x) = 0$, dimpotrivă, spontan se poate deplasa din această poziție, până ajunge într-una din pozițiile de minim de potențial (aflat prin anularea derivatei $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \mu^2 + \lambda\varphi^2 = 0$), adică:

$$\varphi = \pm v \equiv \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \quad (49)$$

Câmp scalar complex

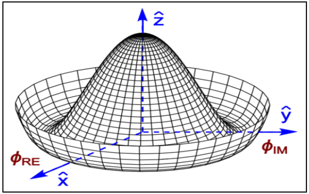
- Fie un câmp scalar complex $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + i\varphi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} r\, e^{i\omega}$
- Lagrangian-ul acestui câmp scalar complex φ, este de forma

$$L = T - V \equiv (\partial_\mu \varphi)^* (\partial^\mu \varphi) - V(\varphi) \qquad (50)$$

unde

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\mu^2 \varphi^* \varphi + \frac{1}{2}\lambda(\varphi^* \varphi)^2\right) \qquad (51)$$

μ^2 - parametru de masă
λ - constantă de cuplaj de self-interacție



- Câmpul descris de acest Lagrangian depinde de parametrii μ^2 si λ.
  - In cazul $\mu^2 > 0$, câmpul φ este un câmp scalar de self-interacție, având cuantele de particule și antiparticule de masă reală μ.
  - In cazul $\mu^2 < 0$, câmpul φ este de masă imaginară $(\mu^2 < 0)$.
- Potențialul (51) are în origine un maxim $V(0) = max$ de echilibru instabil (vezi Figura), iar pentru valoarea de vacuum, un set întreg de valori continui de minim, dispuse pe un cerc la baza potențialului, de rază v dată de $v^2 = |\varphi^2| = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$. De unde $\mu^2 = -\lambda v^2$, astfel că potențialul (51) $V(\varphi)$ se poate scrie $V(\varphi) = -\frac{1}{2}\lambda v^2 \varphi^* \varphi + \frac{1}{4}\lambda(\varphi^* \varphi)^2$ Acum, starea de minim (fundamentală sau de vacuum) are valoarea de câmp diferită de zero $|\varphi| = v$, cu o fază α arbitrară. Adică avem o mulțime (degenerare) de stări de vacuum $|0_\alpha\rangle$.

Câmp scalar complex

- Fie un câmp scalar complex $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + i\varphi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} r\, e^{i\omega}$
- Lagrangian-ul acestui câmp scalar complex φ, este de forma

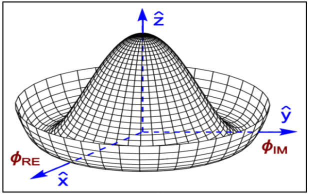
$$L = T - V \equiv (\partial_\mu \varphi)^* (\partial^\mu \varphi) - V(\varphi) \qquad (50)$$

unde

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\mu^2 \varphi^* \varphi + \frac{1}{2}\lambda(\varphi^* \varphi)^2\right) \qquad (51)$$

μ^2 - parametru de masă

λ - constantă de cuplaj de self-interacție



- Câmpul descris de acest Lagrangian depinde de parametrii μ^2 si λ.
  - In cazul $\mu^2 > 0$, câmpul φ este un câmp scalar de self-interacție, având cuantele de particule și antiparticule de masă reală μ.
  - In cazul $\mu^2 < 0$, câmpul φ este de masă imaginară ($\mu^2 < 0$).
- Potențialul (51) are în origine un maxim $V(0) = max$ de echilibru instabil (vezi Figura), iar pentru valoarea de vacuum, un set întreg de valori continui de minim, dispuse pe un cerc la baza potențialului, de rază v dată de $v^2 = |\varphi^2| = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$. De unde $\mu^2 = -\lambda v^2$, astfel că potențialul (51) $V(\varphi)$ se poate scrie $V(\varphi) = -\frac{1}{2}\lambda v^2 \varphi^* \varphi + \frac{1}{4}\lambda(\varphi^* \varphi)^2$ Acum, starea de minim (fundamentală sau de vacuum) are valoarea de câmp diferită de zero $|\varphi| = v$, cu o fază α arbitrară. Adică avem o mulțime (degenerare) de stări de vacuum $|0_\alpha\rangle$.

Câmp scalar complex

- Fie un câmp scalar complex $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + i\varphi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} r\, e^{i\omega}$
- Lagrangian-ul acestui câmp scalar complex φ, este de forma

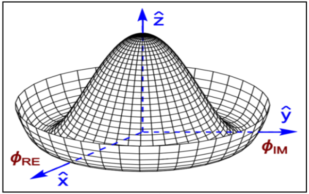
$$L = T - V \equiv (\partial_\mu \varphi)^* (\partial^\mu \varphi) - V(\varphi) \qquad (50)$$

unde

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\mu^2 \varphi^* \varphi + \frac{1}{2}\lambda(\varphi^*\varphi)^2\right) \qquad (51)$$

μ^2 - parametru de masă

λ - constantă de cuplaj de self-interacție



- Câmpul descris de acest Lagrangian depinde de parametrii μ^2 si λ.
  - In cazul $\mu^2 > 0$, câmpul φ este un câmp scalar de self-interacție, având cuantele de particule și antiparticule de masă reală μ.
  - In cazul $\mu^2 < 0$, câmpul φ este de masă imaginară ($\mu^2 < 0$).
- Potențialul (51) are în origine un maxim $V(0) = max$ de echilibru instabil (vezi Figura), iar pentru valoarea de vacuum, un set întreg de valori continui de minim, dispuse pe un cerc la baza potențialului, de rază v dată de $v^2 = |\varphi^2| = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$. De unde $\mu^2 = -\lambda v^2$, astfel că potențialul (51) $V(\varphi)$ se poate scrie $V(\varphi) = -\frac{1}{2}\lambda v^2 \varphi^* \varphi + \frac{1}{4}\lambda(\varphi^*\varphi)^2$ Acum, starea de minim (fundamentală sau de vacuum) are valoarea de câmp diferită de zero $|\varphi| = v$, cu o fază α arbitrară. Adică avem o mulțime (degenerare) de stări de vacuum $|0_\alpha\rangle$.

Câmp scalar complex

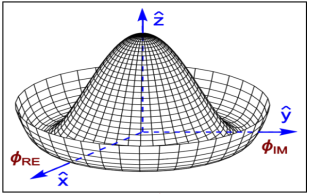
- Fie un câmp scalar complex $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + i\varphi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} r\, e^{i\omega}$
- Lagrangian-ul acestui câmp scalar complex φ, este de forma

$$L = T - V \equiv (\partial_\mu \varphi)^* (\partial^\mu \varphi) - V(\varphi) \qquad (50)$$

unde

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\mu^2 \varphi^* \varphi + \frac{1}{2}\lambda(\varphi^*\varphi)^2\right) \qquad (51)$$

μ^2 - parametru de masă
λ - constantă de cuplaj de self-interacție



- Câmpul descris de acest Lagrangian depinde de parametrii μ^2 si λ.
  - In cazul $\mu^2 > 0$, câmpul φ este un câmp scalar de self-interacție, având cuantele de particule și antiparticule de masă reală μ.
  - In cazul $\mu^2 < 0$, câmpul φ este de masă imaginară ($\mu^2 < 0$).
- Potențialul (51) are în origine un maxim $V(0) = max$ de echilibru instabil (vezi Figura), iar pentru valoarea de vacuum, un set întreg de valori continui de minim, dispuse pe un cerc la baza potențialului, de rază v dată de $v^2 = |\varphi^2| = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$. De unde $\mu^2 = -\lambda v^2$, astfel că potențialul (51) $V(\varphi)$ se poate scrie $V(\varphi) = -\frac{1}{2}\lambda v^2 \varphi^*\varphi + \frac{1}{4}\lambda(\varphi^*\varphi)^2$ Acum, starea de minim (fundamentală sau de vacuum) are valoarea de câmp diferită de zero $|\varphi| = v$, cu o fază α arbitrară. Adică avem o mulțime (degenerare) de stări de vacuum $|0_\alpha\rangle$.

Câmp scalar complex

- Fie un câmp scalar complex $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + i\varphi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} r\, e^{i\omega}$
- Lagrangian-ul acestui câmp scalar complex φ, este de forma

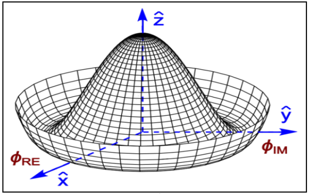
$$L = T - V \equiv (\partial_\mu \varphi)^* (\partial^\mu \varphi) - V(\varphi) \qquad (50)$$

unde

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\mu^2 \varphi^* \varphi + \frac{1}{2}\lambda(\varphi^*\varphi)^2\right) \qquad (51)$$

μ^2 - parametru de masă

λ - constantă de cuplaj de self-interacție



- Câmpul descris de acest Lagrangian depinde de parametrii μ^2 si λ.
  - In cazul $\mu^2 > 0$, câmpul φ este un câmp scalar de self-interacție, având cuantele de particule și antiparticule de masă reală μ.
  - In cazul $\mu^2 < 0$, câmpul φ este de masă imaginară ($\mu^2 < 0$).
- Potențialul (51) are în origine un maxim $V(0) = max$ de echilibru instabil (vezi Figura), iar pentru valoarea de vacuum, un set întreg de valori continui de minim, dispuse pe un cerc la baza potențialului, de rază v dată de $v^2 = |\varphi^2| = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$. De unde $\mu^2 = -\lambda v^2$, astfel că potențialul (51) $V(\varphi)$ se poate scrie $V(\varphi) = -\frac{1}{2}\lambda v^2 \varphi^* \varphi + \frac{1}{4}\lambda(\varphi^*\varphi)^2$ Acum, starea de minim (fundamentală sau de vacuum) are valoarea de câmp diferită de zero $|\varphi| = v$, cu o fază α arbitrară. Adică avem o mulțime (degenerare) de stări de vacuum $|0_\alpha\rangle$.

Câmp scalar complex

- Fie un câmp scalar complex $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + i\varphi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} r\, e^{i\omega}$
- Lagrangian-ul acestui câmp scalar complex φ, este de forma

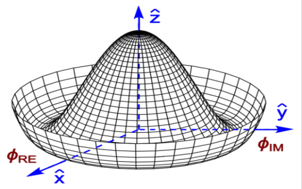
$$L = T - V \equiv (\partial_\mu \varphi)^* (\partial^\mu \varphi) - V(\varphi) \qquad (50)$$

unde

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\mu^2 \varphi^* \varphi + \frac{1}{2}\lambda(\varphi^*\varphi)^2\right) \qquad (51)$$

μ^2 - parametru de masă

λ - constantă de cuplaj de self-interacție



- Câmpul descris de acest Lagrangian depinde de parametrii μ^2 si λ.
  - In cazul $\mu^2 > 0$, câmpul φ este un câmp scalar de self-interacție, având cuantele de particule și antiparticule de masă reală μ.
  - In cazul $\mu^2 < 0$, câmpul φ este de masă imaginară ($\mu^2 < 0$).
- Potențialul (51) are în origine un maxim $V(0) = max$ de echilibru instabil (vezi Figura), iar pentru valoarea de vacuum, un set întreg de valori continui de minim, dispuse pe un cerc la baza potențialului, de rază v dată de $v^2 = |\varphi^2| = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$. De unde $\mu^2 = -\lambda v^2$, astfel că potențialul (51) $V(\varphi)$ se poate scrie $V(\varphi) = -\frac{1}{2}\lambda v^2 \varphi^*\varphi + \frac{1}{4}\lambda(\varphi^*\varphi)^2$ Acum, starea de minim (fundamentală sau de vacuum) are valoarea de câmp diferită de zero $|\varphi| = v$, cu o fază α arbitrară. Adică avem o mulțime (degenerare) de stări de vacuum $|0_\alpha\rangle$.

Mecanismul Higgs

- In cazul in care campul scalar φ se cuplează cu un câmp de bosoni vectoriali de masa nulă A, Lagrangian-ul devine

$$L = (\partial_\mu + iqA_\mu)\,\varphi^*\,(\partial^\mu - iqA^\mu)\,\varphi - V(\varphi^*\varphi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{52}$$

Câmpul scalar φ așa cum am văzut mai înainte, are două moduri normale de oscilație în jurul minimului de vacuum, unul azimutal ca un câmp de masă nulă de-a lungul minimului de potențial și celălalt radial ca un câmp masiv. Prin adăugarea câmpului de bosoni de gauge de masă nulă situația devine mai complexă.

Transformarea de fază, ce păstrează Lagrangian-ul invariant,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) \quad &\longrightarrow \quad \varphi'(x) = \varphi(x)\, e^i\theta(x)\\
A_\mu(x) \quad &\longrightarrow \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{q}\partial_\mu\theta(x)
\end{aligned}$$

leagă modurile normale de oscilație atât pentru câmpul scalar cât și pentru cel vectorial, astfel că noile câmpuri le putem scrie sub forma

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\,(r_0 + r(x)) \quad \text{unde} \quad r_0 = \left|\sqrt{-\mu^2/\lambda}\right|\\
A'_\mu(x) \quad &= \quad A_\mu(x) + \frac{1}{r_0 q}\partial_\mu\theta(x)
\end{aligned}$$

Mecanismul Higgs

- In cazul in care campul scalar φ se cuplează cu un câmp de bosoni vectoriali de masa nulă A, Lagrangian-ul devine

$$L = (\partial_\mu + iqA_\mu)\,\varphi^*\,(\partial^\mu - iqA^\mu)\,\varphi - V(\varphi^*\varphi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (52)$$

Câmpul scalar φ așa cum am văzut mai înainte, are două moduri normale de oscilație în jurul minimului de vacuum, unul azimutal ca un câmp de masă nulă de-a lungul minimului de potențial și celălalt radial ca un câmp masiv. Prin adăugarea câmpului de bosoni de gauge de masă nulă situația devine mai complexă.

Transformarea de fază, ce păstrează Lagrangian-ul invariant,

$$\begin{aligned} \varphi(x) \quad &\longrightarrow \quad \varphi'(x) = \varphi(x)\, e^{i}\theta(x) \\ A_\mu(x) \quad &\longrightarrow \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{q}\partial_\mu\theta(x) \end{aligned}$$

leagă modurile normale de oscilație atât pentru câmpul scalar cât și pentru cel vectorial, astfel că noile câmpuri le putem scrie sub forma

$$\begin{aligned} \varphi'(x) \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(r_0 + r(x)) \quad \text{unde} \quad r_0 = \left|\sqrt{-\mu^2/\lambda}\right| \\ A'_\mu(x) \quad &= \quad A_\mu(x) + \frac{1}{r_0 q}\partial_\mu\theta(x) \end{aligned}$$

Mecanismul Higgs

- In cazul in care campul scalar φ se cuplează cu un câmp de bosoni vectoriali de masa nulă A, Lagrangian-ul devine

$$L = (\partial_\mu + iqA_\mu)\,\varphi^* \,(\partial^\mu - iqA^\mu)\,\varphi - V(\varphi^*\varphi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (52)$$

Câmpul scalar φ așa cum am văzut mai înainte, are două moduri normale de oscilație în jurul minimului de vacuum, unul azimutal ca un câmp de masă nulă de-a lungul minimului de potențial și celălalt radial ca un câmp masiv. Prin adăugarea câmpului de bosoni de gauge de masă nulă situația devine mai complexă.

Transformarea de fază, ce păstrează Lagrangian-ul invariant,

$$\begin{aligned} \varphi(x) \quad &\longrightarrow \quad \varphi'(x) = \varphi(x)\, e^i\theta(x) \\ A_\mu(x) \quad &\longrightarrow \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{q}\partial_\mu\theta(x) \end{aligned}$$

leagă modurile normale de oscilație atât pentru câmpul scalar cât și pentru cel vectorial, astfel că noile câmpuri le putem scrie sub forma

$$\begin{aligned} \varphi'(x) \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(r_0 + r(x)\right) \quad \text{unde} \quad r_0 = \left|\sqrt{-\mu^2/\lambda}\right| \\ A'_\mu(x) \quad &= \quad A_\mu(x) + \frac{1}{r_0 q}\partial_\mu\theta(x) \end{aligned}$$

Mecanismul Higgs (cont)

- Lucrul cel mai important este ca prin redefinirea campurilor de mai sus, oscilatiile azimutale $\theta(x)$ ale campului scalar se cupleaza cu cele ale campului de bosoni de gauge $A'(x)$. Acesta este datorat mecanismului de rupere spontana de simetrie. Componenta $\theta(x)$ a campului scalar de masă nula de oscilatie azimutal intra in componenta noului camp de bosoni de gauge $A'(x)$ ca urmare a transformarii de faza.

  Oscilatiile azimutale ale campului scalar devin oscilatii longitudinale ale noului camp de gauge. O particula de masa nula se misca cu viteza luminii, deci nu poate oscila pe directia de miscare. Adaugarea unui nou mod de oscilatie longitudinal, conduce la crearea unui camp de gauge masiv.

  Noul camp de gauge a devenit masiv, desi invarianta la transformarea de faza nu a fost afectata. Valoarea campului scalar in pozitia de minim determina masa noului boson de gauge, si ca o consecinta determina si domeniul de actiune al fortei pe care o mediaza.

  Sistemul de cuplare al acestor campuri formeaza mecanismul Higgs, iar campul scalar de bosoni masivi rezultati formeaza campul Higgs.

Mecanismul Higgs (cont)

- Lucrul cel mai important este ca prin redefinirea campurilor de mai sus, oscilatiile azimutale $\theta(x)$ ale campului scalar se cupleaza cu cele ale campului de bosoni de gauge $A'(x)$. Acesta este datorat mecanismului de rupere spontana de simetrie. Componenta $\theta(x)$ a campului scalar de masă nula de oscilatie azimutal intra in componenta noului camp de bosoni de gauge $A'(x)$ ca urmare a transformarii de faza.

  Oscilatiile azimutale ale campului scalar devin oscilatii longitudinale ale noului camp de gauge. O particula de masa nula se misca cu viteza luminii, deci nu poate oscila pe directia de miscare. Adaugarea unui nou mod de oscilatie longitudinal, conduce la crearea unui camp de gauge masiv.

  Noul camp de gauge a devenit masiv, desi invarianta la transformarea de faza nu a fost afectata. Valoarea campului scalar in pozitia de minim determina masa noului boson de gauge, si ca o consecinta determina si domeniul de actiune al fortei pe care o mediaza.

  Sistemul de cuplare al acestor campuri formeaza mecanismul Higgs, iar campul scalar de bosoni masivi rezultati formeaza campul Higgs.

Mecanismul Higgs (cont)

- Lucrul cel mai important este ca prin redefinirea campurilor de mai sus, oscilatiile azimutale $\theta(x)$ ale campului scalar se cupleaza cu cele ale campului de bosoni de gauge $A'(x)$. Acesta este datorat mecanismului de rupere spontana de simetrie. Componenta $\theta(x)$ a campului scalar de masă nula de oscilatie azimutal intra in componenta noului camp de bosoni de gauge $A'(x)$ ca urmare a transformarii de faza.

  Oscilatiile azimutale ale campului scalar devin oscilatii longitudinale ale noului camp de gauge. O particula de masa nula se misca cu viteza luminii, deci nu poate oscila pe directia de miscare. Adaugarea unui nou mod de oscilatie longitudinal, conduce la crearea unui camp de gauge masiv.

  Noul camp de gauge a devenit masiv, desi invarianta la transformarea de faza nu a fost afectata. Valoarea campului scalar in pozitia de minim determina masa noului boson de gauge, si ca o consecinta determina si domeniul de actiune al fortei pe care o mediaza.

  Sistemul de cuplare al acestor campuri formeaza mecanismul Higgs, iar campul scalar de bosoni masivi rezultati formeaza campul Higgs.

Partea II

ANEXA

Elementul invariant 4-dim de sp. fazelor (unități $\hbar = c = 1$)

- Fie elementul 4-dim $d^4p = dE \cdot d^3\vec{p}$. 4-impulsul $p = (E, \vec{p})$ se transf. ca si 4-vectorul $x = (t, \vec{x})$. In transf. Lorentz, variația dE este o "dilatare" cu factorul γ la fel ca dt, iar variația d^3p este o "contracție" pe direcția de mișcare cu factorul $1/\gamma$ la fel ca d^3x. Deci $d^4p = dE \cdot d^3p$ este invariant.
- La integrarea după 4-impuls d^4p a unei funcții invariante Lorentz $f(p)$ ținem cont de legătura între cele 4 componente p_μ, prin conservarea energiei $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$, legătură ce se exprimă prin funcția delta $\delta(p^2 - m^2)$, cu $p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2$. Atunci integrala căutată este
$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi)\, f(p)\, \delta(p^2 - m^2)\Big|_{E>0} \qquad (53)$$
Constanta 2π a fost introdusă pt. uz ulterior. Condiția $E > 0$ de integrare reamintește faptul că energia relativistă este întotdeauna pozitivă. Folosind relația pt. funcția $\delta[f(x)] = \frac{1}{|df/dx|_{x_0}} \delta(x - x_0)$ cu x_0 soluția pt. $f(x) = 0$, avem
$$\delta\Big[E^2 - |\vec{p}|^2 - m^2\Big] = \frac{1}{|2E|_{E_0}} \delta(E - E_0) = \frac{1}{2E_0} \delta(E - E_0) \qquad (54)$$
cu soluția > 0: $E_0(\vec{p}) = +\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$. Integrând (53) după dE, folosind (54)
$$\int \frac{d^3p\, dE}{(2\pi)^3} f(E, \vec{p})\, \delta\Big(E^2 - |\vec{p}|^2 - m^2\Big)\Big|_{E>0} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_0(\vec{p})} f(E_0(\vec{p}), \vec{p}) \quad (55)$$

Elementul invariant 4-dim de sp. fazelor (unități $\hbar = c = 1$)

- Fie elementul 4-dim $d^4p = dE \cdot d^3\vec{p}$. 4-impulsul $p = (E, \vec{p})$ se transf. ca si 4-vectorul $x = (t, \vec{x})$. In transf. Lorentz, variația dE este o "dilatare" cu factorul γ la fel ca dt, iar variația d^3p este o "contracție" pe direcția de mișcare cu factorul $1/\gamma$ la fel ca d^3x. Deci $d^4p = dE \cdot d^3p$ este invariant.
- La integrarea după 4-impuls d^4p a unei funcții invariante Lorentz $f(p)$ ținem cont de legătura între cele 4 componente p_μ, prin conservarea energiei $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$, legătură ce se exprimă prin funcția delta $\delta(p^2 - m^2)$, cu $p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2$. Atunci integrala căutată este
$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi)\, f(p)\, \delta(p^2 - m^2)\Big|_{E>0} \tag{53}$$
Constanta 2π a fost introdusă pt. uz ulterior. Condiția $E > 0$ de integrare reamintește faptul că energia relativistă este întotdeauna pozitivă. Folosind relația pt. funcția $\delta[f(x)] = \frac{1}{|df/dx|_{x_0}} \delta(x - x_0)$ cu x_0 soluția pt. $f(x) = 0$, avem
$$\delta\Big[E^2 - |\vec{p}|^2 - m^2\Big] = \frac{1}{|2E|_{E_0}} \delta(E - E_0) = \frac{1}{2E_0} \delta(E - E_0) \tag{54}$$
cu soluția > 0: $E_0(\vec{p}) = +\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$. Integrând (53) după dE, folosind (54)
$$\int \frac{d^3p\, dE}{(2\pi)^3} f(E, \vec{p})\, \delta\Big(E^2 - |\vec{p}|^2 - m^2\Big)\Big|_{E>0} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_0(\vec{p})} f(E_0(\vec{p}), \vec{p}) \tag{55}$$

Elementul invariant 4-dim de sp. fazelor (unități $\hbar = c = 1$)

- Fie elementul 4-dim $d^4p = dE \cdot d^3\vec{p}$. 4-impulsul $p = (E, \vec{p})$ se transf. ca si 4-vectorul $x = (t, \vec{x})$. In transf. Lorentz, variația dE este o "dilatare" cu factorul γ la fel ca dt, iar variația d^3p este o "contracție" pe direcția de mișcare cu factorul $1/\gamma$ la fel ca d^3x. Deci $d^4p = dE \cdot d^3p$ este invariant.
- La integrarea după 4-impuls d^4p a unei funcții invariante Lorentz $f(p)$ ținem cont de legătura între cele 4 componente p_μ, prin conservarea energiei $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$, legătură ce se exprimă prin funcția delta $\delta(p^2 - m^2)$, cu $p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2$. Atunci integrala căutată este

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\, f(p)\, \delta(p^2 - m^2)\Big|_{E>0} \tag{53}$$

Constanta 2π a fost introdusă pt. uz ulterior. Condiția $E > 0$ de integrare reamintește faptul că energia relativistă este întotdeauna pozitivă. Folosind relația pt. funcția $\delta[f(x)] = \frac{1}{|df/dx|_{x_0}}\delta(x - x_0)$ cu x_0 soluția pt. $f(x) = 0$, avem

$$\delta\Big[E^2 - |\vec{p}|^2 - m^2\Big] = \frac{1}{|2E|_{E_0}}\delta(E - E_0) = \frac{1}{2E_0}\delta(E - E_0) \tag{54}$$

cu soluția > 0: $E_0(\vec{p}) = +\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$. Integrând (53) după dE, folosind (54)

$$\int \frac{d^3p\, dE}{(2\pi)^3}\, f(E, \vec{p})\, \delta\Big(E^2 - |\vec{p}|^2 - m^2\Big)\Big|_{E>0} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_0(\vec{p})} f(E_0(\vec{p}), \vec{p}) \tag{55}$$

Elementul invariant 4-dim de sp. fazelor (unități $\hbar = c = 1$)

- Fie elementul 4-dim $d^4p = dE \cdot d^3\vec{p}$. 4-impulsul $p = (E, \vec{p})$ se transf. ca si 4-vectorul $x = (t, \vec{x})$. In transf. Lorentz, variația dE este o "dilatare" cu factorul γ la fel ca dt, iar variația d^3p este o "contracție" pe direcția de mișcare cu factorul $1/\gamma$ la fel ca d^3x. Deci $d^4p = dE \cdot d^3p$ este invariant.
- La integrarea după 4-impuls d^4p a unei funcții invariante Lorentz $f(p)$ ținem cont de legătura între cele 4 componente p_μ, prin conservarea energiei $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$, legătură ce se exprimă prin funcția delta $\delta(p^2 - m^2)$, cu $p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2$. Atunci integrala căutată este

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\, f(p)\, \delta(p^2 - m^2)\bigg|_{E>0} \tag{53}$$

Constanta 2π a fost introdusă pt. uz ulterior. Condiția $E > 0$ de integrare reamintește faptul că energia relativistă este întotdeauna pozitivă. Folosind relația pt. funcția $\delta[f(x)] = \frac{1}{|df/dx|_{x_0}}\delta(x - x_0)$ cu x_0 soluția pt. $f(x) = 0$, avem

$$\delta\Big[E^2 - |\vec{p}|^2 - m^2\Big] = \frac{1}{|2E|_{E_0}}\delta(E - E_0) = \frac{1}{2E_0}\delta(E - E_0) \tag{54}$$

cu soluția > 0: $E_0(\vec{p}) = +\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$. Integrând (53) după dE, folosind (54)

$$\int \frac{d^3p\, dE}{(2\pi)^3}\, f(E, \vec{p})\, \delta\Big(E^2 - |\vec{p}|^2 - m^2\Big)\bigg|_{E>0} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_0(\vec{p})} f(E_0(\vec{p}), \vec{p}) \tag{55}$$

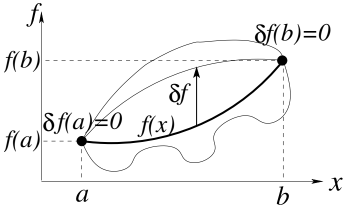
Funcțională și Derivata funcțională

- Dacă o funcție $f(x)$ dă o valoare numerică f pentru o valoare de intrare x, o funcțională $F[f]$ este de forma integralei: $F[f] = \int_a^b L[x, f(x), f'(x)]\, dx$ (56)

  ex. timp, lungime, acțiune, etc. adică o val. numerică pt. o *traiectorie* $f(x)$.

- Pentru a defini derivata funcțională $\frac{\delta F}{\delta f}$, introducem variația $\delta f(x)$ locală a *traiectoriei de integrare* (ce duce la o variație numerică δF). Noul integrand $L[x, f+\delta f, f'+\delta f']$, duce la variația

$$\delta F = \int_a^b \delta L\, dx = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f}\delta f + \frac{\partial L}{\partial f'}\delta f' \right) dx$$



- Cu $\delta \leftrightarrow \frac{d}{dx}$ și integrarea prin părți $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$ a termenului doi

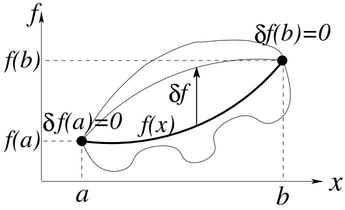
$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial f'}\, \delta f'\, dx = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'}\, \frac{d\delta f}{dx}\, dx = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial f'}\, \delta f \Big|_a^b}_{\delta f(a) = \delta f(b) = 0} - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right) \delta f\; dx$$

- Deci, $\delta F = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\right] \delta f\; dx,$ atunci folosind (56), avem

- Derivata funcțională: $\frac{\delta F}{\delta f} = \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)$ sau $\frac{\delta F}{\delta f} = \frac{\partial F}{\partial f} - \nabla\left(\frac{\partial F}{\partial \nabla f}\right)$

Funcțională și Derivata funcțională

- Dacă o funcție $f(x)$ dă o valoare numerică f pentru o valoare de intrare x, o funcțională $F[f]$ este de forma integralei: $$F[f] = \int_a^b L[x, f(x), f'(x)]\, dx \tag{56}$$ ex. timp, lungime, acțiune, etc. adică o val. numerică pt. o *traiectorie* $f(x)$.



- Pentru a defini derivata funcțională $\frac{\delta F}{\delta f}$, introducem variația $\delta f(x)$ locală a *traiectoriei de integrare* (ce duce la o variație numerică δF). Noul integrand $L[x, f+\delta f, f'+\delta f']$, duce la variația
$$\delta F = \int_a^b \delta L\, dx = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f}\delta f + \frac{\partial L}{\partial f'}\delta f' \right) dx$$

- Cu $\delta \leftrightarrow \frac{d}{dx}$ și integrarea prin părți $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$ a termenului doi
$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial f'}\, \delta f'\, dx = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'}\, \frac{d\delta f}{dx}\, dx = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial f'}\, \delta f \Big|_a^b}_{\delta f(a) = \delta f(b) = 0} - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right) \delta f\ dx$$

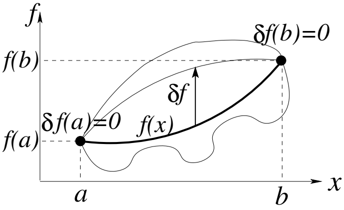
- Deci, $\delta F = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right) \right] \delta f\, dx$, atunci folosind (56), avem

- Derivata funcțională: $$\frac{\delta F}{\delta f} = \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right) \quad \text{sau} \quad \frac{\delta F}{\delta f} = \frac{\partial F}{\partial f} - \nabla\left(\frac{\partial F}{\partial \nabla f}\right)$$

Funcțională și Derivata funcțională

- Dacă o funcție $f(x)$ dă o valoare numerică f pentru o valoare de intrare x, o <u>funcțională</u> $F[f]$ este de forma integralei: $$F[f] = \int_a^b L[x, f(x), f'(x)]\, dx \qquad (56)$$ ex. timp, lungime, acțiune, etc. adică o val. numerică pt. o *traiectorie* $f(x)$.

- Pentru a defini <u>derivata funcțională</u> $\dfrac{\delta F}{\delta f}$, introducem variația $\delta f(x)$ locală a *traiectoriei de integrare* (ce duce la o variație numerică δF). Noul integrand $L[x, f{+}\delta f, f'{+}\delta f']$, duce la variația $$\delta F = \int_a^b \delta L\, dx = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f}\delta f + \frac{\partial L}{\partial f'}\delta f' \right) dx$$



- Cu $\delta \leftrightarrow \frac{d}{dx}$ și integrarea prin părți $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$ a termenului doi $$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial f'}\, \delta f'\, dx = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'}\, \frac{d\delta f}{dx}\, dx = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial f'}\, \delta f \bigg|_a^b}_{\delta f(a)=\delta f(b)=0} - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right) \delta f\, dx$$

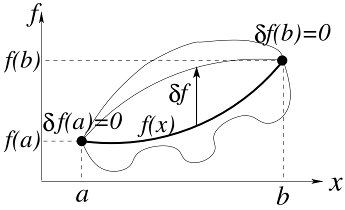
- Deci, $\delta F = \displaystyle\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\right] \delta f\, dx$, atunci folosind (56), avem

- <u>Derivata funcțională:</u> $\dfrac{\delta F}{\delta f} = \dfrac{\partial F}{\partial f} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial f'}\right)$ sau $\dfrac{\delta F}{\delta f} = \dfrac{\partial F}{\partial f} - \nabla\left(\dfrac{\partial F}{\partial \nabla f}\right)$

Funcțională și Derivata funcțională

- Dacă o funcție $f(x)$ dă o valoare numerică f pentru o valoare de intrare x, o funcțională $F[f]$ este de forma integralei: $$F[f] = \int_a^b L[x, f(x), f'(x)]\, dx \quad (56)$$ ex. timp, lungime, acțiune, etc. adică o val. numerică pt. o *traiectorie* $f(x)$.

- Pentru a defini derivata funcțională $\frac{\delta F}{\delta f}$, introducem variația $\delta f(x)$ locală a *traiectoriei de integrare* (ce duce la o variație numerică δF). Noul integrand $L[x, f+\delta f, f'+\delta f']$, duce la variația
$$\delta F = \int_a^b \delta L\, dx = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f}\delta f + \frac{\partial L}{\partial f'}\delta f'\right) dx$$



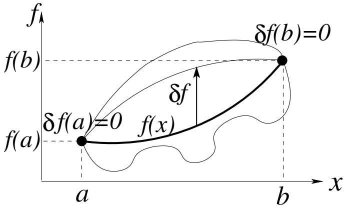
- Cu $\delta \leftrightarrow \frac{d}{dx}$ și integrarea prin părți $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$ a termenului doi
$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial f'}\, \delta f'\, dx = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'}\, \frac{d\delta f}{dx}\, dx = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial f'}\, \delta f \Big|_a^b}_{\delta f(a)=\delta f(b)=0} - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right) \delta f\; dx$$

- Deci, $\delta F = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\right] \delta f\, dx$, atunci folosind (56), avem

- Derivata funcțională: $\frac{\delta F}{\delta f} = \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)$ sau $\frac{\delta F}{\delta f} = \frac{\partial F}{\partial f} - \nabla\left(\frac{\partial F}{\partial \nabla f}\right)$

Funcțională și Derivata funcțională

- Dacă o funcție $f(x)$ dă o valoare numerică f pentru o valoare de intrare x, o <u>funcțională</u> $F[f]$ este de forma integralei: $$F[f]=\int_a^b L[x,f(x),f'(x)]\,dx \tag{56}$$ ex. timp, lungime, acțiune, etc. adică o val. numerică pt. o *traiectorie* $f(x)$.
- Pentru a defini <u>derivata funcțională</u> $\dfrac{\delta F}{\delta f}$, introducem variația $\delta f(x)$ locală a *traiectoriei de integrare* (ce duce la o variație numerică δF). Noul integrand $L[x, f{+}\delta f, f'{+}\delta f']$, duce la variația $$\delta F=\int_a^b \delta L\,dx=\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f}\delta f+\frac{\partial L}{\partial f'}\delta f'\right)dx$$

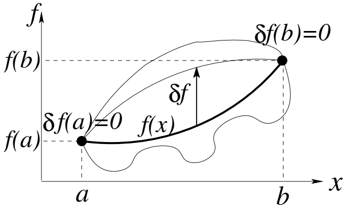


- Cu $\delta\leftrightarrow\frac{d}{dx}$ și integrarea prin părți $\int u\,dv=u\,v-\int v\,du$ a termenului doi $$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial f'}\,\delta f'\,dx=\int_a^b\frac{\partial L}{\partial f'}\,\frac{d\delta f}{dx}\,dx=\underbrace{\frac{\partial L}{\partial f'}\,\delta f\Big|_a^b}_{\delta f(a)=\delta f(b)=0}-\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\delta f\;dx$$
- Deci, $\delta F=\displaystyle\int_a^b\left[\frac{\partial L}{\partial f}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\right]\delta f\,dx,$ atunci folosind (56), avem
- <u>Derivata funcțională</u>: $\dfrac{\delta F}{\delta f}=\dfrac{\partial F}{\partial f}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial f'}\right)$ sau $\dfrac{\delta F}{\delta f}=\dfrac{\partial F}{\partial f}-\nabla\left(\dfrac{\partial F}{\partial\nabla f}\right)$

Funcțională și Derivata funcțională

- Dacă o funcție $f(x)$ dă o valoare numerică f pentru o valoare de intrare x, o funcțională $F[f]$ este de forma integralei: $$F[f]=\int_a^b L[x,f(x),f'(x)]\,dx \qquad (56)$$ ex. timp, lungime, acțiune, etc. adică o val. numerică pt. o *traiectorie* $f(x)$.

- Pentru a defini derivata funcțională $\dfrac{\delta F}{\delta f}$, introducem variația $\delta f(x)$ locală a *traiectoriei de integrare* (ce duce la o variație numerică δF). Noul integrand $L[x, f+\delta f, f'+\delta f']$, duce la variația
$$\delta F=\int_a^b \delta L\,dx=\int_a^b\left(\frac{\partial L}{\partial f}\delta f+\frac{\partial L}{\partial f'}\delta f'\right)dx$$



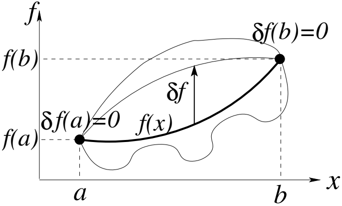
- Cu $\delta\leftrightarrow\frac{d}{dx}$ și integrarea prin părți $\int u\,dv=u\,v-\int v\,du$ a termenului doi
$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial f'}\,\delta f'\,dx=\int_a^b\frac{\partial L}{\partial f'}\,\frac{d\delta f}{dx}\,dx=\underbrace{\frac{\partial L}{\partial f'}\,\delta f\bigg|_a^b}_{\delta f(a)=\delta f(b)=0}-\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\delta f\;dx$$

- Deci, $\delta F=\displaystyle\int_a^b\left[\frac{\partial L}{\partial f}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\right]\delta f\,dx,$ atunci folosind (56), avem

- Derivata funcțională: $$\frac{\delta F}{\delta f}=\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right) \quad \text{sau} \quad \frac{\delta F}{\delta f}=\frac{\partial F}{\partial f}-\nabla\left(\frac{\partial F}{\partial\nabla f}\right)$$

Funcțională și Derivata funcțională

- Dacă o funcție $f(x)$ dă o valoare numerică f pentru o valoare de intrare x, o funcțională $F[f]$ este de forma integralei: $$F[f] = \int_a^b L[x, f(x), f'(x)]\, dx \quad (56)$$ ex. timp, lungime, acțiune, etc. adică o val. numerică pt. o *traiectorie* $f(x)$.
- Pentru a defini derivata funcțională $\dfrac{\delta F}{\delta f}$, introducem variația $\delta f(x)$ locală a *traiectoriei de integrare* (ce duce la o variație numerică δF). Noul integrand $L[x, f+\delta f, f'+\delta f']$, duce la variația $$\delta F = \int_a^b \delta L\, dx = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f}\delta f + \frac{\partial L}{\partial f'}\delta f' \right) dx$$



- Cu $\delta \leftrightarrow \frac{d}{dx}$ și integrarea prin părți $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$ a termenului doi $$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial f'}\delta f'\, dx = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'}\frac{d\delta f}{dx}\, dx = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial f'}\delta f\Big|_a^b}_{\delta f(a)=\delta f(b)=0} - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\delta f\, dx$$
- Deci, $\delta F = \displaystyle\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\right]\delta f\, dx$, atunci folosind (56), avem
- Derivata funcțională: $$\frac{\delta F}{\delta f} = \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right) \quad \text{sau} \quad \frac{\delta F}{\delta f} = \frac{\partial F}{\partial f} - \nabla\left(\frac{\partial F}{\partial \nabla f}\right)$$

Lagrangian de câmpuri clasice

- Lagrangianul $L(\varphi, \dot{\varphi})$ de câmpuri clasice este o funcțională de φ și $\dot{\varphi}$: $$L(t) = L\Big[\varphi(\vec{x}, t), \dot{\varphi}(\vec{x}, t)\Big] \qquad (58)$$

  Scris prin densit. de Lagrangian: $$L(t) = \int d^3\vec{x}\, \mathcal{L}\Big[\varphi(\vec{x}, t), \nabla\varphi(\vec{x}, t), \dot{\varphi}(\vec{x}, t)\Big] \qquad (59)$$

- L nu depinde explicit de $\vec{x}$ (e integrală după $d^3\vec{x}$), însă prin $\mathcal{L}$ e funcție locală de $\vec{x}$.

  Pentru derivata funcțională putem scrie variația $$\delta L(t) = \int d^3\vec{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)}}_{u} \underbrace{\delta(\partial_i\varphi)}_{\partial_i(\delta\varphi) = dv} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi}\right]$$

- Cu $\delta \leftrightarrow \partial_i$ și integrarea prin părți: $\int u\, dv = uv|_{margine} - \int v\, du$ a termenului spațial, ținând cont că la margine câmpul și derivatele se anulează, avem:
$$\int d^3\vec{x}\, \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)}}_{u} \underbrace{\delta(\partial_i\varphi)}_{\partial_i(\delta\varphi) = dv} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)}\delta\varphi\Big|_{margine}}_{=0} - \int d^3\vec{x}\, \delta\varphi\, \partial_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)}\right)$$

- Deci, $\delta L(t) = \int d^3\vec{x} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)}\right)\right)\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi}\right]$, iar cu integrarea (59) avem,

- derivata funcțională a L, la fel ca (57), este: $$\boxed{\frac{\delta L}{\delta \varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \partial_i\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_i \varphi)}\right)} \quad ; \quad \boxed{\frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}} \qquad (60)$$

Lagrangian de câmpuri clasice

- Lagrangianul $L(\varphi, \dot{\varphi})$ de câmpuri clasice este o funcțională de φ și $\dot{\varphi}$: $\quad L(t) = L\Big[\varphi(\vec{x}, t), \dot{\varphi}(\vec{x}, t)\Big] \qquad (58)$

  Scris prin densit. de Lagrangian: $\quad L(t) = \int d^3\vec{x}\, \mathcal{L}\Big[\varphi(\vec{x}, t), \nabla\varphi(\vec{x}, t), \dot{\varphi}(\vec{x}, t)\Big] \quad (59)$

- L nu depinde explicit de $\vec{x}$ (e integrală după $d^3\vec{x}$), însă prin $\mathcal{L}$ e funcție locală de $\vec{x}$.

  Pentru derivata funcțională putem scrie variația $\quad \delta L(t) = \int d^3\vec{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)}}_{u} \underbrace{\delta(\partial_i \varphi)}_{\partial_i(\delta\varphi) = dv} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi}\right]$

- Cu $\delta \leftrightarrow \partial_i$ și integrarea prin părți: $\int u\, dv = uv\big|_{margine} - \int v\, du$ a termenului spațial, ținând cont că la margine câmpul și derivatele se anulează, avem:

$$\int d^3\vec{x}\, \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)}}_{u} \underbrace{\delta(\partial_i \varphi)}_{\partial_i(\delta\varphi) = dv} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)}\delta\varphi\bigg|_{margine}}_{=0} - \int d^3\vec{x}\, \delta\varphi\, \partial_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)}\right)$$

- Deci, $\delta L(t) = \int d^3\vec{x} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)}\right)\right)\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi}\right]$, iar cu integrarea (59) avem,

- derivata funcțională a L, la fel ca (57), este: $\quad \boxed{\frac{\delta L}{\delta \varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \partial_i\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_i \varphi)}\right)} \; ; \; \boxed{\frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}} \qquad (60)$

Lagrangian de câmpuri clasice

- Lagrangianul $L(\varphi, \dot{\varphi})$ de câmpuri clasice este o funcțională de φ și $\dot{\varphi}$: $$L(t) = L\Big[\varphi(\vec{x}, t), \dot{\varphi}(\vec{x}, t)\Big] \quad (58)$$

  Scris prin densit. de Lagrangian: $$L(t) = \int d^3\vec{x}\, \mathcal{L}\Big[\varphi(\vec{x}, t), \nabla\varphi(\vec{x}, t), \dot{\varphi}(\vec{x}, t)\Big] \quad (59)$$

- L nu depinde explicit de $\vec{x}$ (e integrală după $d^3\vec{x}$), însă prin $\mathcal{L}$ e funcție locală de $\vec{x}$.

  Pentru derivata funcțională putem scrie variația $$\delta L(t) = \int d^3\vec{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)}}_{u} \underbrace{\delta(\partial_i \varphi)}_{\partial_i(\delta\varphi)=dv} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi}\right]$$

- Cu $\delta \leftrightarrow \partial_i$ și integrarea prin părți: $\int u\, dv = uv|_{margine} - \int v\, du$ a termenului spațial, ținând cont că la margine câmpul și derivatele se anulează, avem:

$$\int d^3\vec{x}\, \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)}}_{u} \underbrace{\delta(\partial_i \varphi)}_{\partial_i(\delta\varphi)=dv} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)}\delta\varphi\Big|_{margine}}_{=0} - \int d^3\vec{x}\, \delta\varphi\, \partial_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)}\right)$$

- Deci, $\delta L(t) = \int d^3\vec{x} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)}\right)\right)\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi}\right]$, iar cu integrarea (59) avem,

- derivata funcțională a L, la fel ca (57), este: $$\boxed{\frac{\delta L}{\delta \varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \partial_i\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_i \varphi)}\right)} \; ; \; \boxed{\frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}} \quad (60)$$

Lagrangian de câmpuri clasice

- Lagrangianul $L(\varphi,\dot\varphi)$ de câmpuri clasice este o funcțională de φ și $\dot\varphi$: $\Big\}$ $$L(t)=L\Big[\varphi(\vec x,t),\dot\varphi(\vec x,t)\Big] \tag{58}$$

  Scris prin densit. de Lagrangian: $$L(t)=\int d^3\vec x\,\mathcal{L}\Big[\varphi(\vec x,t),\nabla\varphi(\vec x,t),\dot\varphi(\vec x,t)\Big] \tag{59}$$

- L nu depinde explicit de $\vec x$ (e integrală după $d^3\vec x$), însă prin $\mathcal{L}$ e funcție locală de $\vec x$.

  Pentru derivata funcțională putem scrie variația $\Big\}$ $$\delta L(t)=\int d^3\vec x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi+\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}}_{u}\underbrace{\delta(\partial_i\varphi)}_{\partial_i(\delta\varphi)=dv}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi}\delta\dot\varphi\right]$$

- Cu $\delta\leftrightarrow\partial_i$ și integrarea prin părți: $\int u\,dv=uv\big|_{margine}-\int v\,du$ a termenului spațial, ținând cont că la margine câmpul și derivatele se anulează, avem:

$$\int d^3\vec x\,\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}}_{u}\underbrace{\delta(\partial_i\varphi)}_{\partial_i(\delta\varphi)=dv}=\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}\delta\varphi\Big|_{margine}}_{=0}-\int d^3\vec x\,\delta\varphi\,\partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}\right)$$

- Deci, $\delta L(t)=\int d^3\vec x\left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}\right)\right)\delta\varphi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi}\delta\dot\varphi\right]$, iar cu integrarea (59) avem,

- derivata funcțională a L, la fel ca (57), este: $\Big\}$ $$\boxed{\frac{\delta L}{\delta\varphi}=\frac{\partial L}{\partial\varphi}-\partial_i\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_i\varphi)}\right)}\;;\;\boxed{\frac{\delta L}{\delta\dot\varphi}=\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}} \tag{60}$$

Lagrangian de câmpuri clasice

- Lagrangianul $L(\varphi,\dot\varphi)$ de câmpuri clasice este o funcțională de φ și $\dot\varphi$: $\quad L(t) = L\Big[\varphi(\vec{x},t),\dot\varphi(\vec{x},t)\Big] \qquad (58)$

  Scris prin densit. de Lagrangian: $\quad L(t) = \int d^3\vec{x}\,\mathcal{L}\Big[\varphi(\vec{x},t),\nabla\varphi(\vec{x},t),\dot\varphi(\vec{x},t)\Big] \qquad (59)$

- L nu depinde explicit de $\vec{x}$ (e integrală după $d^3\vec{x}$), însă prin $\mathcal{L}$ e funcție locală de $\vec{x}$.

  Pentru derivata funcțională putem scrie variația $\quad \delta L(t) = \int d^3\vec{x}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}}_{u}\underbrace{\delta(\partial_i\varphi)}_{\partial_i(\delta\varphi)=dv} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi}\delta\dot\varphi\right]$

- Cu $\delta\leftrightarrow\partial_i$ și integrarea prin părți: $\int u\,dv = uv|_{margine} - \int v\,du$ a termenului spațial, ținând cont că la margine câmpul și derivatele se anulează, avem:

$$\int d^3\vec{x}\,\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}}_{u}\underbrace{\delta(\partial_i\varphi)}_{\partial_i(\delta\varphi)=dv} = \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}\delta\varphi\Big|_{margine}}_{=0} - \int d^3\vec{x}\,\delta\varphi\,\partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}\right)$$

- Deci, $\delta L(t) = \int d^3\vec{x}\left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}\right)\right)\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi}\delta\dot\varphi\right]$, iar cu integrarea (59) avem,

- derivata funcțională a L, la fel ca (57), este: $\quad \boxed{\frac{\delta L}{\delta\varphi} = \frac{\partial L}{\partial\varphi} - \partial_i\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_i\varphi)}\right)}\;;\;\boxed{\frac{\delta L}{\delta\dot\varphi} = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}} \qquad (60)$

Lagrangian de câmpuri clasice

- Lagrangianul $L(\varphi, \dot{\varphi})$ de câmpuri clasice este o funcțională de φ și $\dot{\varphi}$: $\Big\}$ $$L(t) = L\Big[\varphi(\vec{x}, t), \dot{\varphi}(\vec{x}, t)\Big] \qquad (58)$$

  Scris prin densit. de Lagrangian: $$L(t) = \int d^3\vec{x}\, \mathcal{L}\Big[\varphi(\vec{x}, t), \nabla\varphi(\vec{x}, t), \dot{\varphi}(\vec{x}, t)\Big] \qquad (59)$$

- L nu depinde explicit de $\vec{x}$ (e integrală după $d^3\vec{x}$), însă prin $\mathcal{L}$ e funcție locală de $\vec{x}$.

  Pentru derivata funcțională putem scrie variația $\Big\}$ $$\delta L(t) = \int d^3\vec{x}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\delta\varphi + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}}_{u}\underbrace{\delta(\partial_i\varphi)}_{\partial_i(\delta\varphi)=dv} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi}\right]$$

- Cu $\delta \leftrightarrow \partial_i$ și integrarea prin părți: $\int u\, dv = uv\big|_{margine} - \int v\, du$ a termenului spațial, ținând cont că la margine câmpul și derivatele se anulează, avem:

$$\int d^3\vec{x}\, \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}}_{u}\underbrace{\delta(\partial_i\varphi)}_{\partial_i(\delta\varphi)=dv} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}\delta\varphi\bigg|_{margine}}_{=0} - \int d^3\vec{x}\, \delta\varphi\, \partial_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}\right)$$

- Deci, $\delta L(t) = \int d^3\vec{x}\left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}\right)\right)\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi}\right]$, iar cu integrarea (59) avem,

- derivata funcțională a L, la fel ca (57), este: $\Big\}$ $$\boxed{\frac{\delta L}{\delta \varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \partial_i\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_i\varphi)}\right)}\ ; \ \boxed{\frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}} \qquad (60)$$

Lagrangian de câmpuri clasice

- Lagrangianul $L(\varphi, \dot{\varphi})$ de câmpuri clasice este o funcțională de φ și $\dot{\varphi}$: $$L(t) = L\left[\varphi(\vec{x}, t), \dot{\varphi}(\vec{x}, t)\right] \qquad (58)$$
  Scris prin densit. de Lagrangian: $$L(t) = \int d^3\vec{x}\, \mathcal{L}\left[\varphi(\vec{x}, t), \nabla\varphi(\vec{x}, t), \dot{\varphi}(\vec{x}, t)\right] \qquad (59)$$
- L nu depinde explicit de $\vec{x}$ (e integrală după $d^3\vec{x}$), însă prin $\mathcal{L}$ e funcție locală de $\vec{x}$.
  Pentru derivata funcțională putem scrie variația $$\delta L(t) = \int d^3\vec{x}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\delta\varphi + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}}_{u}\underbrace{\delta(\partial_i\varphi)}_{\partial_i(\delta\varphi)=dv} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi}\right]$$
- Cu $\delta \leftrightarrow \partial_i$ și integrarea prin părți: $\int u\, dv = uv|_{margine} - \int v\, du$ a termenului spațial, ținând cont că la margine câmpul și derivatele se anulează, avem:
$$\int d^3\vec{x}\, \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}}_{u}\underbrace{\delta(\partial_i\varphi)}_{\partial_i(\delta\varphi)=dv} = \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}\delta\varphi\Big|_{margine}}_{=0} - \int d^3\vec{x}\, \delta\varphi\, \partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}\right)$$
- Deci, $\delta L(t) = \int d^3\vec{x}\left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\varphi)}\right)\right)\delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi}\right]$, iar cu integrarea (59) avem,
- derivata funcțională a L, la fel ca (57), este: $$\boxed{\frac{\delta L}{\delta\varphi} = \frac{\partial L}{\partial\varphi} - \partial_i\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_i\varphi)}\right)} \; ; \; \boxed{\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}} \qquad (60)$$