Cuantificarea Câmpului Electromagnetic

M. Penţia

IFIN-HH, Departament Fizică Nucleară,
P.O.Box MG-6, 077125, Bucureşti-Măgurele, ROMANIA.
e-mail: pentia@nipne.ro

October 28, 2019


nuclear physics
IFIN-HH
MHTC
UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
TVR
Radio România Cultural
Edupedu
Câmpul Electromagnetic și Cuantificarea Câmpului
Dr. Mircea Penția
26 Octombrie 2019
https://indico.eli-np.ro/event/74/

Partea I

Câmpul electromagnetic

Cuprins

Exprimarea câmpurilor EM prin potențiale

- Ecuațiile Maxwell sunt:
$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} & (a) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \qquad (1)$$

- Deoarece divergență de rotor este zero, câmpul $\vec{B}$ (1.c) se poate scrie ca rotorul unui câmp vectorial $\vec{A}$:
$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}} \qquad (2)$$

- Inlocuind $\vec{B}$ în (1.b), avem,
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)}{\partial t} \quad \text{sau} \quad \vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

- Deoarece rotor de gradient este zero, paranteza se poate scrie ca gradientul unui câmp scalar ϕ,
$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi \quad \text{sau} \quad \boxed{\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi} \qquad (3)$$

- Deci, câmpul electric are două surse posibile, una de câmp electric staționar, dată de $-\vec{\nabla}\phi$ și una indusă magnetic, dată de $\partial\vec{A}/\partial t$.

Exprimarea câmpurilor EM prin potențiale

- Ecuațiile Maxwell sunt:
$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} & (a) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \quad (1)$$

- Deoarece divergență de rotor este zero, câmpul $\vec{B}$ (1.c) se poate scrie ca rotorul unui câmp vectorial $\vec{A}$:
$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}} \quad (2)$$

- Inlocuind $\vec{B}$ în (1.b), avem,
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)}{\partial t} \quad \text{sau} \quad \vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

- Deoarece rotor de gradient este zero, paranteza se poate scrie ca gradientul unui câmp scalar ϕ,
$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi \quad \text{sau} \quad \boxed{\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi} \quad (3)$$

- Deci, câmpul electric are două surse posibile, una de câmp electric staționar, dată de $-\vec{\nabla}\phi$ și una indusă magnetic, dată de $\partial\vec{A}/\partial t$.

Exprimarea câmpurilor EM prin potențiale

- Ecuațiile Maxwell sunt:
$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} & (a) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \qquad (1)$$
- Deoarece divergență de rotor este zero, câmpul $\vec{B}$ (1.c) se poate scrie ca rotorul unui câmp vectorial $\vec{A}$:
$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}} \qquad (2)$$
- Inlocuind $\vec{B}$ în (1.b), avem,
$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)}{\partial t} \quad \text{sau} \quad \vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$$
- Deoarece rotor de gradient este zero, paranteza se poate scrie ca gradientul unui câmp scalar ϕ,
$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi \quad \text{sau} \quad \boxed{\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi} \qquad (3)$$
- Deci, câmpul electric are două surse posibile, una de câmp electric staționar, dată de $-\vec{\nabla}\phi$ și una indusă magnetic, dată de $\partial\vec{A}/\partial t$.

Exprimarea câmpurilor EM prin potențiale

- Ecuațiile Maxwell sunt: $$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} & (a) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \quad (1)$$
- Deoarece divergență de rotor este zero, câmpul $\vec{B}$ (1.c) se poate scrie ca rotorul unui câmp vectorial $\vec{A}$: $$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}} \quad (2)$$
- Inlocuind $\vec{B}$ în (1.b), avem, $$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)}{\partial t} \quad \text{sau} \quad \vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$
- Deoarece rotor de gradient este zero, paranteza se poate scrie ca gradientul unui câmp scalar ϕ, $$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi \quad \text{sau} \quad \boxed{\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi} \quad (3)$$
- Deci, câmpul electric are două surse posibile, una de câmp electric staționar, dată de $-\vec{\nabla}\phi$ și una indusă magnetic, dată de $\partial\vec{A}/\partial t$.

Exprimarea câmpurilor EM prin potențiale

- Ecuațiile Maxwell sunt:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} & (a) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \qquad (1)$$

- Deoarece divergență de rotor este zero, câmpul $\vec{B}$ (1.c) se poate scrie ca rotorul unui câmp vectorial $\vec{A}$:

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}} \qquad (2)$$

- Inlocuind $\vec{B}$ în (1.b), avem,

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)}{\partial t} \quad \text{sau} \quad \vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

- Deoarece rotor de gradient este zero, paranteza se poate scrie ca gradientul unui câmp scalar ϕ,

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi \quad \text{sau} \quad \boxed{\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi} \qquad (3)$$

- Deci, câmpul electric are două surse posibile, una de câmp electric staționar, dată de $-\vec{\nabla}\phi$ și una indusă magnetic, dată de $\partial\vec{A}/\partial t$.

Exprimarea câmpurilor EM prin potențiale

- Ecuațiile Maxwell sunt:
$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} & (a)\\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (b)\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & (c)\\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (d)\end{cases} \qquad (1)$$

- Deoarece divergență de rotor este zero, câmpul $\vec{B}$ (1.c) se poate scrie ca rotorul unui câmp vectorial $\vec{A}$:
$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}} \qquad (2)$$

- Inlocuind $\vec{B}$ în (1.b), avem,
$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)}{\partial t} \quad \text{sau} \quad \vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

- Deoarece rotor de gradient este zero, paranteza se poate scrie ca gradientul unui câmp scalar ϕ,
$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi \quad \text{sau} \quad \boxed{\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi} \qquad (3)$$

- Deci, câmpul electric are două surse posibile, una de câmp electric staționar, dată de $-\vec{\nabla}\phi$ și una indusă magnetic, dată de $\partial\vec{A}/\partial t$.

Exprimarea câmpurilor EM prin potențiale

- Ecuațiile Maxwell sunt:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} & (a) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \qquad (1)$$

- Deoarece divergență de rotor este zero, câmpul $\vec{B}$ (1.c) se poate scrie ca rotorul unui câmp vectorial $\vec{A}$:

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}} \qquad (2)$$

- Inlocuind $\vec{B}$ în (1.b), avem,

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)}{\partial t} \quad \text{sau} \quad \vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

- Deoarece rotor de gradient este zero, paranteza se poate scrie ca gradientul unui câmp scalar ϕ,

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi \quad \text{sau} \quad \boxed{\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi} \qquad (3)$$

- Deci, câmpul electric are două surse posibile, una de câmp electric staționar, dată de $-\vec{\nabla}\phi$ și una indusă magnetic, dată de $\partial\vec{A}/\partial t$.

Ecuația de propagare unde EM

- Să considerăm ecuațiile Maxwell în vid, fără sarcini și curenți,

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 & (a) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \qquad (4)$$

- Să luăm rotorul ($\vec{\nabla}\times$) ecuației (4.d) și folosind identitatea pentru dublul produs vectorial, precum și (4.c) obținem
$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) - \nabla^2\vec{B} = -\nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)}{\partial t}$$
- Folosind legătura cu viteza undelor electromagnetice $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ și înlocuind $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ din ecuația (4.b), obținem ecuația de propagare a undelor pt. componenta magnetică $\vec{B}$:
$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{B} = 0} \qquad (5)$$
- Similar, luând rotorul ecuației (4.b), în final obținem ecuația de propagare a componentei electrice $\vec{E}$:
$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{E} = 0} \qquad (6)$$

Ecuația de propagare unde EM

- Să considerăm ecuațiile Maxwell în vid, fără sarcini și curenți,

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 & (a) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \tag{4}$$

- Să luăm rotorul ($\vec{\nabla}\times$) ecuației (4.d) și folosind identitatea pentru dublul produs vectorial, precum și (4.c) obținem
$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) - \nabla^2\vec{B} = -\nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)}{\partial t}$$
- Folosind legătura cu viteza undelor electromagnetice $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ și înlocuind $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ din ecuația (4.b), obținem ecuația de propagare a undelor pt. componenta magnetică $\vec{B}$:
$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{B} = 0} \tag{5}$$
- Similar, luând rotorul ecuației (4.b), în final obținem ecuația de propagare a componentei electrice $\vec{E}$:
$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{E} = 0} \tag{6}$$

Ecuația de propagare unde EM

- Să considerăm ecuațiile Maxwell în vid, fără sarcini și curenți,

$$\left\{\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= 0 & (a)\\ \vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (b)\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 & (c)\\ \vec{\nabla}\times\vec{B} &= \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (d)\end{aligned}\right. \qquad (4)$$

- Să luăm rotorul ($\vec{\nabla}\times$) ecuației (4.d) și folosind identitatea pentru dublul produs vectorial, precum și (4.c) obținem

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) - \nabla^2\vec{B} = -\nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)}{\partial t}$$

- Folosind legătura cu viteza undelor electromagnetice $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ și înlocuind $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ din ecuația (4.b), obținem ecuația de propagare a undelor pt. componenta magnetică $\vec{B}$:

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{B} = 0} \qquad (5)$$

- Similar, luând rotorul ecuației (4.b), în final obținem ecuația de propagare a componentei electrice $\vec{E}$:

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{E} = 0} \qquad (6)$$

Ecuația de propagare unde EM

- Să considerăm ecuațiile Maxwell în vid, fără sarcini și curenți,

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 & (a) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \qquad (4)$$

- Să luăm rotorul $(\vec{\nabla}\times)$ ecuației (4.d) și folosind identitatea pentru dublul produs vectorial, precum și (4.c) obținem
$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) - \nabla^2\vec{B} = -\nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)}{\partial t}$$
- Folosind legătura cu viteza undelor electromagnetice $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ și înlocuind $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ din ecuația (4.b), obținem ecuația de propagare a undelor pt. componenta magnetică $\vec{B}$:
$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{B} = 0} \qquad (5)$$
- Similar, luând rotorul ecuației (4.b), în final obținem ecuația de propagare a componentei electrice $\vec{E}$:
$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{E} = 0} \qquad (6)$$

Ecuația de propagare unde EM

- Să considerăm ecuațiile Maxwell în vid, fără sarcini și curenți,

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 & (a) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \tag{4}$$

- Să luăm rotorul ($\vec{\nabla}\times$) ecuației (4.d) și folosind identitatea pentru dublul produs vectorial, precum și (4.c) obținem

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) - \nabla^2\vec{B} = -\nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)}{\partial t}$$

- Folosind legătura cu viteza undelor electromagnetice $c=1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ și înlocuind $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ din ecuația (4.b), obținem ecuația de propagare a undelor pt. componenta magnetică $\vec{B}$:

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{B} = 0} \tag{5}$$

- Similar, luând rotorul ecuației (4.b), în final obținem ecuația de propagare a componentei electrice $\vec{E}$:

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{E} = 0} \tag{6}$$

Ecuația de propagare unde EM

- Să considerăm ecuațiile Maxwell în vid, fără sarcini și curenți,

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 & (a) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \qquad (4)$$

- Să luăm rotorul ($\vec{\nabla}\times$) ecuației (4.d) și folosind identitatea pentru dublul produs vectorial, precum și (4.c) obținem

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) - \nabla^2\vec{B} = -\nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)}{\partial t}$$

- Folosind legătura cu viteza undelor electromagnetice $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ și înlocuind $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ din ecuația (4.b), obținem ecuația de propagare a undelor pt. componenta magnetică $\vec{B}$:

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{B} = 0} \qquad (5)$$

- Similar, luând rotorul ecuației (4.b), în final obținem ecuația de propagare a componentei electrice $\vec{E}$:

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{E} = 0} \qquad (6)$$

Ecuații Maxwell pt. potențiale EM

- Să considerăm câmpul electromagnetic în vid, fără surse: $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$, și cu potențial electrostatic extern constant $\varphi = const$ $(\vec{\nabla}\varphi = 0)$.

In ecuațiile Maxwell (4), trecem la potențiale prin înlocuirea câmpurilor magnetic (2) $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ și electric (3) $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} = 0 & (a) \\ \vec{\nabla}\times\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{A} & (b) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = -\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} & (d) \end{cases} \qquad (7)$$

- Lucrăm în calibrarea Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$, implică perpendicularitatea oscilației $\vec{A}$ pe direcția de mișcare $\vec{k}$. (a), (b) și (c) sunt identic nule (la (a) și (b) cu permutarea derivatelor spațiale și temporale, la (c) cu div rot $= 0$)
- Ecuația (d) $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A} = -\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ devine ec. de propagare a undelor. Intr-adevăr, folosind legătura cu viteza undelor electromagnetice $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = 0} \qquad (8)$$

- Cu soluția: $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 \exp\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)$ unde $\omega = c|\vec{k}|$

Ecuații Maxwell pt. potențiale EM

- Să considerăm câmpul electromagnetic în vid, fără surse: $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$, și cu potențial electrostatic extern constant $\varphi = const$ $(\vec{\nabla}\varphi = 0)$.

  In ecuațiile Maxwell (4), trecem la potențiale prin înlocuirea câmpurilor magnetic (2) $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ și electric (3) $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} = 0 & (a) \\ \vec{\nabla}\times\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{A} & (b) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = -\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} & (d) \end{cases} \qquad (7)$$

- Lucrăm în calibrarea Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$, implică perpendicularitatea oscilației $\vec{A}$ pe direcția de mișcare $\vec{k}$. (a), (b) și (c) sunt identic nule (la (a) și (b) cu permutarea derivatelor spațiale și temporale, la (c) cu div rot $= 0$)
- Ecuația (d) $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A} = -\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ devine ec. de propagare a undelor. Intr-adevăr, folosind legătura cu viteza undelor electromagnetice $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = 0} \qquad (8)$$

- Cu soluția: $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \exp\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)$ unde $\omega = c|\vec{k}|$

Ecuații Maxwell pt. potențiale EM

- Să considerăm câmpul electromagnetic în vid, fără surse: $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$, și cu potențial electrostatic extern constant $\varphi = const$ $(\vec{\nabla}\varphi = 0)$.

In ecuațiile Maxwell (4), trecem la potențiale prin înlocuirea câmpurilor magnetic (2) $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ și electric (3) $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} = 0 & (a) \\ \vec{\nabla}\times\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{A} & (b) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = -\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} & (d) \end{cases} \qquad (7)$$

- Lucrăm în calibrarea Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$, implică perpendicularitatea oscilației $\vec{A}$ pe direcția de mișcare $\vec{k}$. (a), (b) și (c) sunt identic nule (la (a) și (b) cu permutarea derivatelor spațiale și temporale, la (c) cu div rot = 0)

- Ecuația (d) $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A} = -\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ devine ec. de propagare a undelor. Intr-adevăr, folosind legătura cu viteza undelor electromagnetice $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = 0} \qquad (8)$$

- Cu soluția: $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 \exp\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)$ unde $\omega = c|\vec{k}|$

Ecuații Maxwell pt. potențiale EM

- Să considerăm câmpul electromagnetic în vid, fără surse: $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$, și cu potențial electrostatic extern constant $\varphi = const$ $(\vec{\nabla}\varphi = 0)$.

In ecuațiile Maxwell (4), trecem la potențiale prin înlocuirea câmpurilor magnetic (2) $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ și electric (3) $\vec{E} = -\partial \vec{A}/\partial t$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 & (a) \\ \vec{\nabla} \times \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A} & (b) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} & (d) \end{cases} \qquad (7)$$

- Lucrăm în calibrarea Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, implică perpendicularitatea oscilației $\vec{A}$ pe direcția de mișcare $\vec{k}$. (a), (b) și (c) sunt identic nule (la (a) și (b) cu permutarea derivatelor spațiale și temporale, la (c) cu div rot $= 0$)
- Ecuația (d) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ devine ec. de propagare a undelor. Intr-adevăr, folosind legătura cu viteza undelor electromagnetice $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = 0} \qquad (8)$$

- Cu soluția: $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \exp\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)$ unde $\omega = c|\vec{k}|$

Ecuații Maxwell pt. potențiale EM

- Să considerăm câmpul electromagnetic în vid, fără surse: $\rho = 0, \vec{j} = 0$, și cu potențial electrostatic extern constant $\varphi = const$ $(\vec{\nabla}\varphi = 0)$.

In ecuațiile Maxwell (4), trecem la potențiale prin înlocuirea câmpurilor magnetic (2) $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ și electric (3) $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 & (a) \\ \vec{\nabla} \times \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{A} & (b) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\mu_0\epsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} & (d) \end{cases} \qquad (7)$$

- Lucrăm în calibrarea Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, implică perpendicularitatea oscilației $\vec{A}$ pe direcția de mișcare $\vec{k}$. (a), (b) și (c) sunt identic nule (la (a) și (b) cu permutarea derivatelor spațiale și temporale, la (c) cu div rot $= 0$)
- Ecuația (d) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2\vec{A} = -\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ devine ec. de propagare a undelor. Intr-adevăr, folosind legătura cu viteza undelor electromagnetice $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = 0} \qquad (8)$$

- Cu soluția: $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \exp\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)$ unde $\omega = c|\vec{k}|$

Ecuații Maxwell pt. potențiale EM

- Să considerăm câmpul electromagnetic în vid, fără surse: $\rho = 0, \vec{j} = 0$, și cu potențial electrostatic extern constant $\varphi = const$ $(\vec{\nabla}\varphi = 0)$.

In ecuațiile Maxwell (4), trecem la potențiale prin înlocuirea câmpurilor magnetic (2) $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ și electric (3) $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 & (a) \\ \vec{\nabla} \times \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A} & (b) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} & (d) \end{cases} \qquad (7)$$

- Lucrăm în calibrarea Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, implică perpendicularitatea oscilației $\vec{A}$ pe direcția de mișcare $\vec{k}$. (a), (b) și (c) sunt identic nule (la (a) și (b) cu permutarea derivatelor spațiale și temporale, la (c) cu div rot = 0)
- Ecuația (d) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ devine ec. de propagare a undelor. Intr-adevăr, folosind legătura cu viteza undelor electromagnetice $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = 0} \qquad (8)$$

- Cu soluția: $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \exp\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)$ unde $\omega = c|\vec{k}|$

Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial $\vec{u}$,
$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
- Calculăm divergența de $\vec{u}$,
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$
$$= (u_{0x}\, ik_x + u_{0y}\, ik_y + u_{0z}\, ik_z) e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
$$= i\vec{k}\cdot\vec{u}$$
- Calculăm rotor de $\vec{u}$, pe componente,
$$(\vec{\nabla}\times\vec{u})_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y)$$
$$= i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_x \qquad \text{și similar}$$
$$(\vec{\nabla}\times\vec{u})_y = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_y$$
$$(\vec{\nabla}\times\vec{u})_z = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_z$$
- Adică, rotorul vectorului $\vec{u}$ este,
$$\vec{\nabla}\times\vec{u} = i\vec{k}\times\vec{u}$$
- Deci, acțiunea operatorului $\vec{\nabla}$, atat ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului $\vec{\nabla}\rightarrow i\vec{k}$.
- In cazul undelor electromagnetice, ca vector $\vec{u}$, luăm fie $\vec{E}$ fie $\vec{B}$ fie $\vec{A}$ fie φ
- Ec. Maxwell (4.a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \Longrightarrow \vec{E} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$
- Ec. Maxwell (4.c) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \Longrightarrow \vec{B} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$
- Cond. calib. Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{A} = 0 \Longrightarrow \vec{A} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$

Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial $\vec{u}$,
$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
- Calculăm divergența de $\vec{u}$,
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$
$$= (u_{0x}\, ik_x + u_{0y}\, ik_y + u_{0z}\, ik_z) e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
$$= i\vec{k}\cdot\vec{u}$$
- Calculăm rotor de $\vec{u}$, pe componente,
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y)$$
$$= i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_x \qquad \text{și similar}$$
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_y = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_y$$
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_z = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_z$$
- Adică, rotorul vectorului $\vec{u}$ este,
$$\vec{\nabla}\times\vec{u} = i\vec{k}\times\vec{u}$$
- Deci, acțiunea operatorului $\vec{\nabla}$, atat ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului $\vec{\nabla}\rightarrow i\vec{k}$.
- In cazul undelor electromagnetice, ca vector $\vec{u}$, luăm fie $\vec{E}$ fie $\vec{B}$ fie $\vec{A}$ fie φ
- Ec. Maxwell (4.a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \Longrightarrow \vec{E} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$
- Ec. Maxwell (4.c) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \Longrightarrow \vec{B} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$
- Cond. calib. Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{A} = 0 \Longrightarrow \vec{A} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$

Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial $\vec{u}$,
$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
- Calculăm divergența de $\vec{u}$,
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$
$$= (u_{0x}\, ik_x + u_{0y}\, ik_y + u_{0z}\, ik_z) e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
$$= i\vec{k}\cdot\vec{u}$$
- Calculăm rotor de $\vec{u}$, pe componente,
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y)$$
$$= i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_x \qquad \text{și similar}$$
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_y = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_y$$
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_z = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_z$$
- Adică, rotorul vectorului $\vec{u}$ este,
$$\vec{\nabla}\times\vec{u} = i\vec{k}\times\vec{u}$$
- Deci, acțiunea operatorului $\vec{\nabla}$, atat ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$.
- In cazul undelor electromagnetice, ca vector $\vec{u}$, luăm fie $\vec{E}$ fie $\vec{B}$ fie $\vec{A}$ fie φ
- Ec. Maxwell (4.a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \Longrightarrow \vec{E} \text{ oscilează} \perp \vec{k}$$
- Ec. Maxwell (4.c) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \Longrightarrow \vec{B} \text{ oscilează} \perp \vec{k}$$
- Cond. calib. Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{A} = 0 \Longrightarrow \vec{A} \text{ oscilează} \perp \vec{k}$$

Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial $\vec{u}$,
$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
- Calculăm divergența de $\vec{u}$,
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$
$$= (u_{0x}\, ik_x + u_{0y}\, ik_y + u_{0z}\, ik_z) e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
$$= i\vec{k}\cdot\vec{u}$$
- Calculăm rotor de $\vec{u}$, pe componente,
$$(\vec{\nabla}\times\vec{u})_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y)$$
$$= i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_x$$ și similar
$$(\vec{\nabla}\times\vec{u})_y = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_y$$
$$(\vec{\nabla}\times\vec{u})_z = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_z$$
- Adică, rotorul vectorului $\vec{u}$ este,
$$\vec{\nabla}\times\vec{u} = i\vec{k}\times\vec{u}$$
- Deci, acțiunea operatorului $\vec{\nabla}$, atat ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$.
- In cazul undelor electromagnetice, ca vector $\vec{u}$, luăm fie $\vec{E}$ fie $\vec{B}$ fie $\vec{A}$ fie φ
- Ec. Maxwell (4.a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \Longrightarrow \vec{E} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$
- Ec. Maxwell (4.c) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \Longrightarrow \vec{B} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$
- Cond. calib. Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{A} = 0 \Longrightarrow \vec{A} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$

Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial $\vec{u}$,
$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
- Calculăm divergența de $\vec{u}$,
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$
$$= (u_{0x}\, ik_x + u_{0y}\, ik_y + u_{0z}\, ik_z) e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
$$= i\vec{k}\cdot\vec{u}$$
- Calculăm rotor de $\vec{u}$, pe componente,
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y)$$
$$= i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_x \qquad \text{și similar}$$
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_y = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_y$$
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_z = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_z$$

- Adică, rotorul vectorului $\vec{u}$ este,
$$\vec{\nabla}\times\vec{u} = i\vec{k}\times\vec{u}$$
- Deci, acțiunea operatorului $\vec{\nabla}$, atat ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului $\vec{\nabla}\longrightarrow i\vec{k}$.
- In cazul undelor electromagnetice, ca vector $\vec{u}$, luăm fie $\vec{E}$ fie $\vec{B}$ fie $\vec{A}$ fie φ
- Ec. Maxwell (4.a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{E}=0 \Longrightarrow \vec{E} \text{ oscilează} \perp \vec{k}$$
- Ec. Maxwell (4.c) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{B}=0 \Longrightarrow \vec{B} \text{ oscilează} \perp \vec{k}$$
- Cond. calib. Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{A}=0 \Longrightarrow \vec{A} \text{ oscilează} \perp \vec{k}$$

Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial $\vec{u}$,
$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
- Calculăm divergența de $\vec{u}$,
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$
$$= (u_{0x}\, ik_x + u_{0y}\, ik_y + u_{0z}\, ik_z) e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
$$= i\vec{k}\cdot\vec{u}$$
- Calculăm rotor de $\vec{u}$, pe componente,
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y)$$
$$= i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_x \qquad \text{și similar}$$
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_y = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_y$$
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_z = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_z$$

- Adică, rotorul vectorului $\vec{u}$ este,
$$\vec{\nabla}\times\vec{u} = i\vec{k}\times\vec{u}$$
- Deci, acțiunea operatorului $\vec{\nabla}$, atat ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului $\vec{\nabla} \to i\vec{k}$.
- In cazul undelor electromagnetice, ca vector $\vec{u}$, luăm fie $\vec{E}$ fie $\vec{B}$ fie $\vec{A}$ fie φ
- Ec. Maxwell (4.a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \Longrightarrow \vec{E} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$
- Ec. Maxwell (4.c) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \Longrightarrow \vec{B} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$
- Cond. calib. Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{A} = 0 \Longrightarrow \vec{A} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$

Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial $\vec{u}$,
$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
- Calculăm divergența de $\vec{u}$,
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$
$$= (u_{0x}\, ik_x + u_{0y}\, ik_y + u_{0z}\, ik_z) e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
$$= i\vec{k}\cdot\vec{u}$$
- Calculăm rotor de $\vec{u}$, pe componente,
$$(\vec{\nabla}\times\vec{u})_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y)$$
$$= i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_x \qquad \text{și similar}$$
$$(\vec{\nabla}\times\vec{u})_y = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_y$$
$$(\vec{\nabla}\times\vec{u})_z = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_z$$
- Adică, rotorul vectorului $\vec{u}$ este,
$$\vec{\nabla}\times\vec{u} = i\vec{k}\times\vec{u}$$
- Deci, acțiunea operatorului $\vec{\nabla}$, atat ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului $\vec{\nabla} \to i\vec{k}$.
- In cazul undelor electromagnetice, ca vector $\vec{u}$, luăm fie $\vec{E}$ fie $\vec{B}$ fie $\vec{A}$ fie φ
- Ec. Maxwell (4.a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \Longrightarrow \vec{E} \text{ oscilează} \perp \vec{k}$$
- Ec. Maxwell (4.c) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \Longrightarrow \vec{B} \text{ oscilează} \perp \vec{k}$$
- Cond. calib. Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{A} = 0 \Longrightarrow \vec{A} \text{ oscilează} \perp \vec{k}$$

Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial $\vec{u}$,
$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
- Calculăm divergența de $\vec{u}$,
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$
$$= (u_{0x}\, ik_x + u_{0y}\, ik_y + u_{0z}\, ik_z) e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
$$= i\vec{k}\cdot\vec{u}$$
- Calculăm rotor de $\vec{u}$, pe componente,
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y)$$
$$= i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_x \qquad \text{și similar}$$
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_y = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_y$$
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_z = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_z$$
- Adică, rotorul vectorului $\vec{u}$ este,
$$\vec{\nabla}\times\vec{u} = i\vec{k}\times\vec{u}$$
- Deci, acțiunea operatorului $\vec{\nabla}$, atat ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$.
- In cazul undelor electromagnetice, ca vector $\vec{u}$, luăm fie $\vec{E}$ fie $\vec{B}$ fie $\vec{A}$ fie φ
- Ec. Maxwell (4.a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \Longrightarrow \vec{E} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$
- Ec. Maxwell (4.c) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \Longrightarrow \vec{B} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$
- Cond. calib. Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{A} = 0 \Longrightarrow \vec{A} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$

Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial $\vec{u}$,
$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
- Calculăm divergența de $\vec{u}$,
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$
$$= (u_{0x}\, ik_x + u_{0y}\, ik_y + u_{0z}\, ik_z) e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
$$= i\vec{k}\cdot\vec{u}$$
- Calculăm rotor de $\vec{u}$, pe componente,
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y)$$
$$= i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_x \qquad \text{și similar}$$
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_y = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_y$$
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_z = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_z$$
- Adică, rotorul vectorului $\vec{u}$ este,
$$\vec{\nabla}\times\vec{u} = i\vec{k}\times\vec{u}$$
- Deci, acțiunea operatorului $\vec{\nabla}$, atat ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului $\vec{\nabla} \to i\vec{k}$.
- In cazul undelor electromagnetice, ca vector $\vec{u}$, luăm fie $\vec{E}$ fie $\vec{B}$ fie $\vec{A}$ fie φ
- Ec. Maxwell (4.a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \Longrightarrow \vec{E} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$
- Ec. Maxwell (4.c) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \Longrightarrow \vec{B} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$
- Cond. calib. Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{A} = 0 \Longrightarrow \vec{A} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$

Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial $\vec{u}$,
$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
- Calculăm divergența de $\vec{u}$,
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$
$$= (u_{0x}\, ik_x + u_{0y}\, ik_y + u_{0z}\, ik_z) e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
$$= i\vec{k}\cdot\vec{u}$$
- Calculăm rotor de $\vec{u}$, pe componente,
$$(\vec{\nabla}\times\vec{u})_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y)$$
$$= i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_x \qquad \text{și similar}$$
$$(\vec{\nabla}\times\vec{u})_y = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_y$$
$$(\vec{\nabla}\times\vec{u})_z = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_z$$
- Adică, rotorul vectorului $\vec{u}$ este,
$$\vec{\nabla}\times\vec{u} = i\vec{k}\times\vec{u}$$
- Deci, acțiunea operatorului $\vec{\nabla}$, atat ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$.
- In cazul undelor electromagnetice, ca vector $\vec{u}$, luăm fie $\vec{E}$ fie $\vec{B}$ fie $\vec{A}$ fie φ
- Ec. Maxwell (4.a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \Longrightarrow \vec{E} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$
- Ec. Maxwell (4.c) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \Longrightarrow \vec{B} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$
- Cond. calib. Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{A} = 0 \Longrightarrow \vec{A} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$

Soluțiile ecuațiilor de undă EM

- Fie soluția de undă plană pentru un câmp vectorial $\vec{u}$,
$$\vec{u} = \vec{u}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
- Calculăm divergența de $\vec{u}$,
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$
$$= (u_{0x}\, ik_x + u_{0y}\, ik_y + u_{0z}\, ik_z) e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$
$$= i\vec{k}\cdot\vec{u}$$
- Calculăm rotor de $\vec{u}$, pe componente,
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = (ik_y u_z - ik_z u_y)$$
$$= i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_x \qquad \text{și similar}$$
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_y = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_y$$
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_z = i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_z$$

- Adică, rotorul vectorului $\vec{u}$ este,
$$\vec{\nabla}\times\vec{u} = i\vec{k}\times\vec{u}$$
- Deci, acțiunea operatorului $\vec{\nabla}$, atat ca divergență cât și ca rotor, se face prin înlocuirea operatorului $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$.
- In cazul undelor electromagnetice, ca vector $\vec{u}$, luăm fie $\vec{E}$ fie $\vec{B}$ fie $\vec{A}$ fie φ
- Ec. Maxwell (4.a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \Longrightarrow \vec{E} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$
- Ec. Maxwell (4.c) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \Longrightarrow \vec{B} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$
- Cond. calib. Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ devine,
$$i\vec{k}\cdot\vec{A} = 0 \Longrightarrow \vec{A} \text{ oscilează } \perp \vec{k}$$

Ecuația de propagare a potențialelor EM

- Soluția reală a potențialului vector $\vec{A}$ este: $$\vec{A} = \vec{A}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \qquad (9)$$
- Componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt perpendiculare pe direcția de propagare $\vec{k}$.

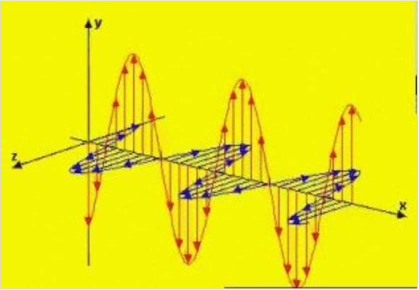
Dacă considerăm propagarea undelor pe direcția x, iar potențialul $\vec{A}$ este

$\vec{A} = A_0 \cos(k_x x - \omega t)\vec{z}$,

atunci $\vec{E}$ și $\vec{B}$ vor fi:

$\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t = -\omega A_0 \sin(k_x x - \omega t)\vec{z}$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = k_x A_0 \sin(k_x x - \omega t)\vec{y}$



- Condiția de calibrare Coulomb $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$, implică și ea perpendicularitatea oscilației $\vec{A}$ pe direcția de mișcare $\vec{k}$.

Ecuația de propagare a potențialelor EM

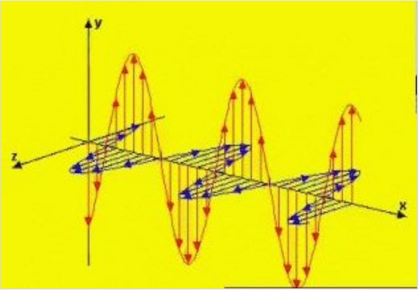
- Soluția reală a potențialului vector $\vec{A}$ este: $\vec{A} = \vec{A}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ (9)
- Componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt perpendiculare pe direcția de propagare $\vec{k}$.

Dacă considerăm propagarea undelor pe direcția x, iar potențialul $\vec{A}$ este $\vec{A} = A_0 \cos(k_x x - \omega t)\vec{z}$,

atunci $\vec{E}$ și $\vec{B}$ vor fi:

$\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t = -\omega A_0 \sin(k_x x - \omega t)\vec{z}$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = k_x A_0 \sin(k_x x - \omega t)\vec{y}$



- Condiția de calibrare Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, implică și ea perpendicularitatea oscilației $\vec{A}$ pe direcția de mișcare $\vec{k}$.

Ecuația de propagare a potențialelor EM

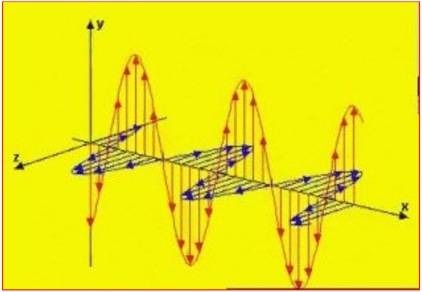
- Soluția reală a potențialului vector $\vec{A}$ este: $\vec{A} = \vec{A}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ (9)
- Componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt perpendiculare pe direcția de propagare $\vec{k}$.

Dacă considerăm propagarea undelor pe direcția x, iar potențialul $\vec{A}$ este
$\vec{A} = A_0 \cos(k_x x - \omega t)\vec{z}$,

atunci $\vec{E}$ și $\vec{B}$ vor fi:

$\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t = -\omega A_0 \sin(k_x x - \omega t)\vec{z}$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = k_x A_0 \sin(k_x x - \omega t)\vec{y}$



- Condiția de calibrare Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, implică și ea perpendicularitatea oscilației $\vec{A}$ pe direcția de mișcare $\vec{k}$.

Ecuația de propagare a potențialelor EM

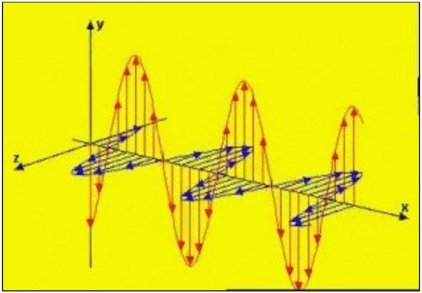
- Soluția reală a potențialului vector $\vec{A}$ este: $$\vec{A} = \vec{A}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \qquad (9)$$
- Componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt perpendiculare pe direcția de propagare $\vec{k}$.

Dacă considerăm propagarea undelor pe direcția x, iar potențialul $\vec{A}$ este
$\vec{A} = A_0 \cos(k_x x - \omega t)\vec{z}$,

atunci $\vec{E}$ și $\vec{B}$ vor fi:

$\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t = -\omega A_0 \sin(k_x x - \omega t)\vec{z}$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = k_x A_0 \sin(k_x x - \omega t)\vec{y}$



- Condiția de calibrare Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, implică și ea perpendicularitatea oscilației $\vec{A}$ pe direcția de mișcare $\vec{k}$.

Ecuația de propagare a potențialelor EM

- Soluția reală a potențialului vector $\vec{A}$ este: $$\vec{A} = \vec{A}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \tag{9}$$
- Componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt perpendiculare pe direcția de propagare $\vec{k}$.

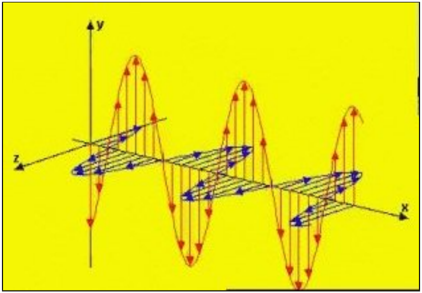
Dacă considerăm propagarea undelor pe direcția x, iar potențialul $\vec{A}$ este

$\vec{A} = A_0 \cos(k_x x - \omega t)\vec{z}$,

atunci $\vec{E}$ și $\vec{B}$ vor fi:

$\vec{E} = -\partial \vec{A}/\partial t = -\omega A_0 \sin(k_x x - \omega t)\vec{z}$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = k_x A_0 \sin(k_x x - \omega t)\vec{y}$



- Condiția de calibrare Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, implică și ea perpendicularitatea oscilației $\vec{A}$ pe direcția de mișcare $\vec{k}$.

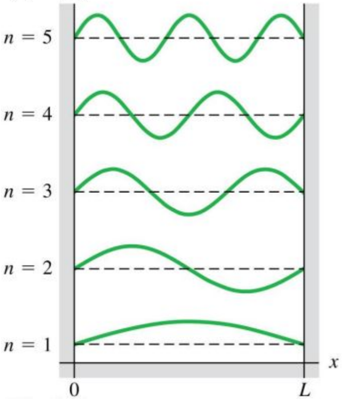
Cuantificarea câmpului EM

- Considerăm o cutie de latură L. Undele staționare (care nu depind de timp) vor avea modurile de oscilație posibile cu nod la margini (componenta electrică $\vec{E}=0$ pe margini). Dacă componenta $E_n(x)=E_0 \sin(k_x x)$
- $\left|\begin{array}{l}\text{Folosind condițiile} \\ \text{la margine pe axa } x\end{array}\right| \left\{\begin{array}{l} E_n(0)=0 \\ E_n(L)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow k_x L = n_x \pi \rightarrow \boxed{k_x = \frac{n_x \pi}{L}}$
- $\left|\begin{array}{l}\text{Soluțiile pe} \\ \text{axa } x \text{ sunt:}\end{array}\right| \boxed{E_n(x)=E_0 \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right)}$

  Similar avem soluțiile pe axele y și z.
- Soluția generală de câmp electric va fi:

  $$E_0 \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right)$$
  $$(n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \ldots)$$
- iar soluția generală de potențial vector $\vec{A}$ va fi:

  $$A_0 \cos\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{n_z \pi z}{L}\right)$$
- Luăm un singur mod de oscilație (o combinație n_x, n_y, n_z și polarizare) și o înlocuim în ecuația de undă (8) pentru $\vec{A}$: $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = 0$



$-(k_x^2+k_y^2+k_z^2)\vec{A}(\vec{k},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{k},t)}{\partial t^2}$ adică o ec. de oscilator armonic $(-\kappa x = m\ddot{x})$.

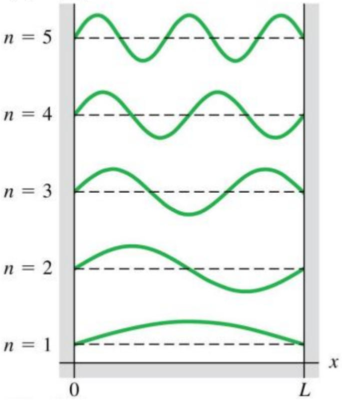
Cuantificarea câmpului EM

- Considerăm o cutie de latură L. Undele staționare (care nu depind de timp) vor avea modurile de oscilație posibile cu nod la margini (componenta electrică $\vec{E}=0$ pe margini). Dacă componenta $E_n(x)=E_0\sin(k_x x)$
- Folosind condițiile la margine pe axa x $\left\{\begin{array}{l} E_n(0)=0 \\ E_n(L)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow k_x L = n_x\pi \rightarrow \boxed{k_x=\frac{n_x\pi}{L}}$
- Soluțiile pe axa x sunt: $\boxed{E_n(x)=E_0\sin\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right)}$

  Similar avem soluțiile pe axele y și z.
- Soluția generală de câmp electric va fi:

  $$E_0\sin\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right)$$
  $$(n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots)$$
- iar soluția generală de potențial vector $\vec{A}$ va fi:

  $$A_0\cos\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right)\cos\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right)$$
- Luăm un singur mod de oscilație (o combinație n_x, n_y, n_z și polarizare) și o înlocuim în ecuația de undă (8) pentru $\vec{A}$: $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{A}=0$



$-(k_x^2+k_y^2+k_z^2)\vec{A}(\vec{k},t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{k},t)}{\partial t^2}$ adică o ec. de oscilator armonic $(-\kappa x = m\ddot{x})$.

Cuantificarea câmpului EM

- Considerăm o cutie de latură L. Undele staționare (care nu depind de timp) vor avea modurile de oscilație posibile cu nod la margini (componenta electrică $\vec{E}=0$ pe margini). Dacă componenta $E_n(x)=E_0\sin(k_x x)$
- Folosind condițiile la margine pe axa x $\begin{cases} E_n(0)=0 \\ E_n(L)=0 \end{cases} \Rightarrow k_x L = n_x\pi \rightarrow \boxed{k_x=\frac{n_x\pi}{L}}$
- Soluțiile pe axa x sunt: $\boxed{E_n(x)=E_0\sin\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right)}$

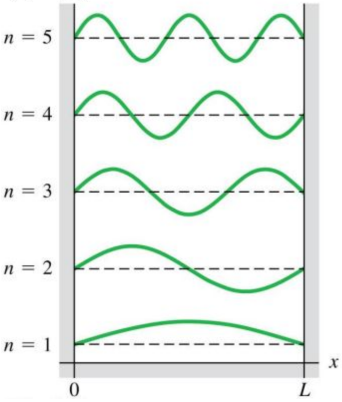
  Similar avem soluțiile pe axele y și z.
- Soluția generală de câmp electric va fi:

$$E_0\sin\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right)$$
$$(n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \ldots)$$

- iar soluția generală de potențial vector $\vec{A}$ va fi:

$$A_0\cos\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right)\cos\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right)$$

- Luăm un singur mod de oscilație (o combinație n_x, n_y, n_z și polarizare) și o înlocuim în ecuația de undă (8) pentru $\vec{A}$: $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{A}=0$

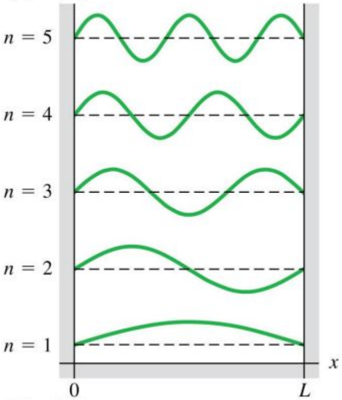


$-(k_x^2+k_y^2+k_z^2)\vec{A}(\vec{k},t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{k},t)}{\partial t^2}$ adică o ec. de oscilator armonic $(-\kappa x = m\ddot{x})$.

Cuantificarea câmpului EM

- Considerăm o cutie de latură L. Undele staționare (care nu depind de timp) vor avea modurile de oscilație posibile cu nod la margini (componenta electrică $\vec{E}=0$ pe margini). Dacă componenta $E_n(x)=E_0\sin(k_x x)$
- Folosind condițiile la margine pe axa x: $\left\{\begin{array}{l} E_n(0)=0 \\ E_n(L)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow k_x L = n_x\,\pi \rightarrow \boxed{k_x=\dfrac{n_x\,\pi}{L}}$
- Soluțiile pe axa x sunt: $\boxed{E_n(x)=E_0\sin\left(\dfrac{n_x\pi\,x}{L}\right)}$

  Similar avem soluțiile pe axele y și z.



- Soluția generală de câmp electric va fi:

$$E_0\sin\left(\frac{n_x\pi\,x}{L}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi\,y}{L}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi\,z}{L}\right)$$
$$(n_x,n_y,n_z=0,1,2,\dots)$$

- iar soluția generală de potențial vector $\vec{A}$ va fi:

$$A_0\cos\left(\frac{n_x\pi\,x}{L}\right)\cos\left(\frac{n_y\pi\,y}{L}\right)\cos\left(\frac{n_z\pi\,z}{L}\right)$$

- Luăm un singur mod de oscilație (o combinație n_x,n_y,n_z și polarizare) și o înlocuim în ecuația de undă (8) pentru $\vec{A}$: $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{A}=0$

$$-(k_x^2+k_y^2+k_z^2)\vec{A}(\vec{k},t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{k},t)}{\partial t^2}$$ adică o ec. de oscilator armonic $(-\kappa x=m\ddot{x})$.

Cuantificarea câmpului EM

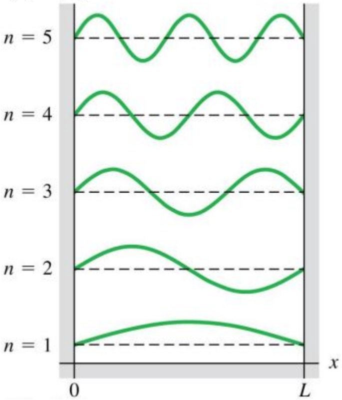
- Considerăm o cutie de latură L. Undele staționare (care nu depind de timp) vor avea modurile de oscilație posibile cu nod la margini (componenta electrică $\vec{E}=0$ pe margini). Dacă componenta $E_n(x)=E_0\sin(k_x x)$
- Folosind condițiile la margine pe axa x $\left.\begin{cases} E_n(0)=0 \\ E_n(L)=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow k_x L = n_x\,\pi \rightarrow \boxed{k_x=\dfrac{n_x\,\pi}{L}}$
- Soluțiile pe axa x sunt: $\boxed{E_n(x)=E_0\sin\left(\dfrac{n_x\pi\, x}{L}\right)}$

  Similar avem soluțiile pe axele y și z.
- Soluția generală de câmp electric va fi:

  $$E_0\sin\left(\frac{n_x\pi\, x}{L}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi\, y}{L}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi\, z}{L}\right) \quad (n_x,n_y,n_z=0,1,2,\dots)$$
- iar soluția generală de potențial vector $\vec{A}$ va fi:

  $$A_0\cos\left(\frac{n_x\pi\, x}{L}\right)\cos\left(\frac{n_y\pi\, y}{L}\right)\cos\left(\frac{n_z\pi\, z}{L}\right)$$
- Luăm un singur mod de oscilație (o combinație n_x,n_y,n_z și polarizare) și o înlocuim în ecuația de undă (8) pentru $\vec{A}$: $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{A}=0$

  $$-(k_x^2+k_y^2+k_z^2)\vec{A}(\vec{k},t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{k},t)}{\partial t^2}$$ adică o ec. de oscilator armonic $(-\kappa x = m\ddot{x})$.



Cuantificarea câmpului EM

- Considerăm o cutie de latură L. Undele staționare (care nu depind de timp) vor avea modurile de oscilație posibile cu nod la margini (componenta electrică $\vec{E}=0$ pe margini). Dacă componenta $E_n(x)=E_0\sin(k_x x)$
- Folosind condițiile la margine pe axa x $\left\{\begin{array}{l} E_n(0)=0 \\ E_n(L)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow k_x L = n_x\pi \rightarrow \boxed{k_x=\frac{n_x\pi}{L}}$
- Soluțiile pe axa x sunt: $\boxed{E_n(x)=E_0\sin\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right)}$

  Similar avem soluțiile pe axele y și z.
- Soluția generală de câmp electric va fi:

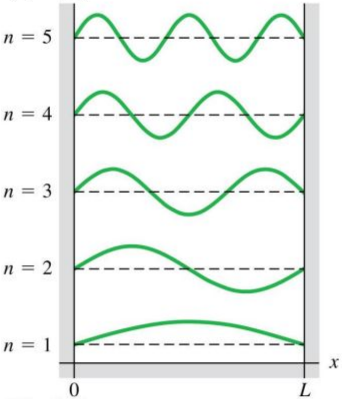
$$E_0\sin\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right)$$
$$(n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots)$$

- iar soluția generală de potențial vector $\vec{A}$ va fi:

$$A_0\cos\left(\frac{n_x\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n_y\pi y}{L}\right)\cos\left(\frac{n_z\pi z}{L}\right)$$

- Luăm un singur mod de oscilație (o combinație n_x, n_y, n_z și polarizare) și o înlocuim în ecuația de undă (8) pentru $\vec{A}$: $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{A}=0$

$-(k_x^2+k_y^2+k_z^2)\vec{A}(\vec{k},t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{k},t)}{\partial t^2}$ adică o ec. de oscilator armonic $(-\kappa x = m\ddot{x})$.



Cuantificarea câmpului EM

- Considerăm o cutie de latură L. Undele staționare (care nu depind de timp) vor avea modurile de oscilație posibile cu nod la margini (componenta electrică $\vec{E}=0$ pe margini). Dacă componenta $E_n(x)=E_0\sin(k_x x)$
- Folosind condițiile la margine pe axa x $\left\{\begin{array}{l} E_n(0)=0 \\ E_n(L)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow k_x L = n_x\,\pi \rightarrow \boxed{k_x=\frac{n_x\,\pi}{L}}$
- Soluțiile pe axa x sunt: $\boxed{E_n(x)=E_0\sin\left(\frac{n_x\pi\,x}{L}\right)}$

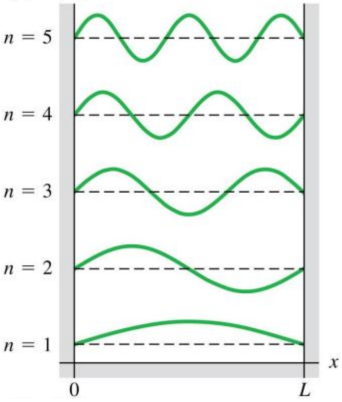
  Similar avem soluțiile pe axele y și z.
- Soluția generală de câmp electric va fi:

$$E_0\sin\left(\frac{n_x\pi\,x}{L}\right)\sin\left(\frac{n_y\pi\,y}{L}\right)\sin\left(\frac{n_z\pi\,z}{L}\right)$$
$$(n_x, n_y, n_z = 0,1,2,\dots)$$

- iar soluția generală de potențial vector $\vec{A}$ va fi:

$$A_0\cos\left(\frac{n_x\pi\,x}{L}\right)\cos\left(\frac{n_y\pi\,y}{L}\right)\cos\left(\frac{n_z\pi\,z}{L}\right)$$

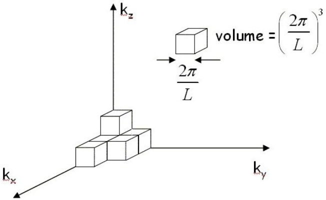
- Luăm un singur <u>mod de oscilație</u> (o combinație n_x, n_y, n_z și polarizare) și o înlocuim în ecuația de undă (8) pentru $\vec{A}$: $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{A}=0$



$$-(k_x^2+k_y^2+k_z^2)\vec{A}(\vec{k},t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{k},t)}{\partial t^2}$$ adică o ec. de oscilator armonic $(-\kappa x = m\ddot{x})$.

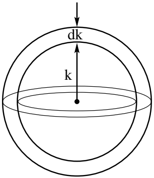
Densitatea de stări de oscilație EM

- Condiția de margine periodică aplicată fiecărui element cub de latură L, cere un număr n întreg de λ: $L = n\lambda$, sau $k_x, k_y, k_z = 2\pi/\lambda = 2\pi n/L$, ce conduce la un volum elementar în spațiul k_x, k_y, k_z: $d^3k = (2\pi/L)^3$.



- Există de două ori mai multe moduri de oscilație independente deoarece câmpul electric are două grade de libertate de polarizare. Atunci, numărul total de moduri de oscilație k cu numărul de undă între k și $k+dk$ este dat de elementele (cuburile elementare) $(2\pi/L)^3$ de pe un strat sferic între k și $k+dk$:

$$2\,\frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi/L)^3} = L^3 \underbrace{\frac{k^2}{\pi^2}}_{D(k)} dk = L^3 D(k)dk$$



- Densit. de stări $D(k)dk = \frac{k^2}{\pi^2}dk$ exprimată prin ω, cu trecerea $\omega = 2\pi c/\lambda = ck$, adică $k = \omega/c$ și $dk = d\omega/c$.

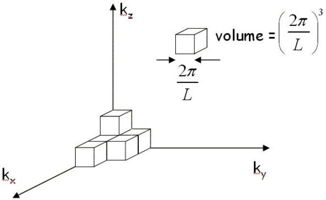
$$D(\omega)d\omega = \frac{\omega^2}{c^3\pi^2}d\omega$$

Apoi prin trecerea la λ obținem $D(\lambda)$:

$$D(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda$$

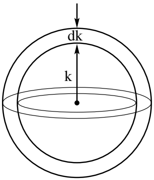
Densitatea de stări de oscilație EM

- Condiția de margine periodică aplicată fiecărui element cub de latură L, cere un număr n întreg de λ: $L = n\lambda$, sau $k_x, k_y, k_z = 2\pi/\lambda = 2\pi n/L$, ce conduce la un volum elementar în spațiul k_x, k_y, k_z: $d^3k = (2\pi/L)^3$.



- Există de două ori mai multe moduri de oscilație independente deoarece câmpul electric are două grade de libertate de polarizare. Atunci, numărul total de moduri de oscilație k cu numărul de undă între k și $k+dk$ este dat de elementele (cuburile elementare) $(2\pi/L)^3$ de pe un strat sferic între k și $k+dk$:

$$2\,\frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi/L)^3} = L^3 \underbrace{\frac{k^2}{\pi^2}}_{D(k)} dk = L^3 D(k) dk$$



- Densit. de stări $D(k)dk = \frac{k^2}{\pi^2}dk$ exprimată prin ω, cu trecerea $\omega = 2\pi c/\lambda = ck$, adică $k = \omega/c$ și $dk = d\omega/c$.

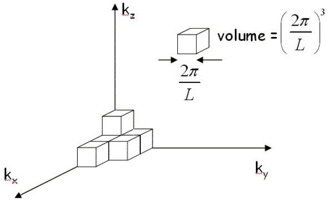
$$D(\omega)d\omega = \frac{\omega^2}{c^3\pi^2}d\omega$$

Apoi prin trecerea la λ obținem $D(\lambda)$:

$$D(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda$$

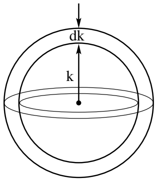
Densitatea de stări de oscilație EM

- Condiția de margine periodică aplicată fiecărui element cub de latură L, cere un număr n întreg de λ: $L = n\lambda$, sau $k_x, k_y, k_z = 2\pi/\lambda = 2\pi n/L$, ce conduce la un volum elementar în spațiul k_x, k_y, k_z: $d^3k = (2\pi/L)^3$.



- Există de două ori mai multe moduri de oscilație independente deoarece câmpul electric are două grade de libertate de polarizare. Atunci, numărul total de moduri de oscilație k cu numărul de undă între k și $k+dk$ este dat de elementele (cuburile elementare) $(2\pi/L)^3$ de pe un strat sferic între k și $k+dk$:

$$2\,\frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi/L)^3} = L^3 \underbrace{\frac{k^2}{\pi^2}}_{D(k)} dk = L^3 D(k) dk$$



- Densit. de stări $D(k)dk = \frac{k^2}{\pi^2}dk$ exprimată prin ω, cu trecerea $\omega = 2\pi c/\lambda = ck$, adică $k = \omega/c$ și $dk = d\omega/c$.

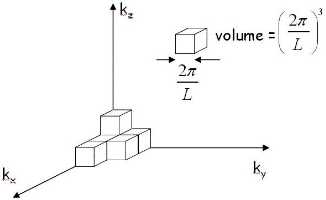
$$D(\omega)d\omega = \frac{\omega^2}{c^3\pi^2}d\omega$$

Apoi prin trecerea la λ obținem $D(\lambda)$:

$$D(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda$$

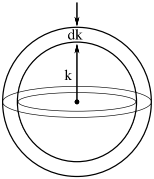
Densitatea de stări de oscilație EM

- Condiția de margine periodică aplicată fiecărui element cub de latură L, cere un număr n întreg de λ: $L = n\lambda$, sau $k_x, k_y, k_z = 2\pi/\lambda = 2\pi n/L$, ce conduce la un volum elementar în spațiul k_x, k_y, k_z: $d^3k = (2\pi/L)^3$.



- Există de două ori mai multe moduri de oscilație independente deoarece câmpul electric are două grade de libertate de polarizare. Atunci, numărul total de moduri de oscilație k cu numărul de undă între k și $k+dk$ este dat de elementele (cuburile elementare) $(2\pi/L)^3$ de pe un strat sferic între k și $k+dk$:

$$2\,\frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi/L)^3} = L^3 \underbrace{\frac{k^2}{\pi^2}}_{D(k)} dk = L^3 D(k) dk$$



- Densit. de stări $D(k)dk = \frac{k^2}{\pi^2}dk$ exprimată prin ω, cu trecerea $\omega = 2\pi c/\lambda = ck$, adică $k = \omega/c$ și $dk = d\omega/c$.

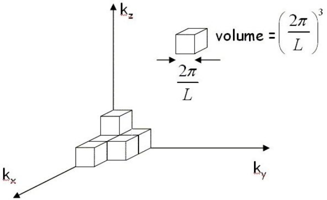
$$D(\omega)d\omega = \frac{\omega^2}{c^3\pi^2}d\omega$$

Apoi prin trecerea la λ obținem $D(\lambda)$:

$$D(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda$$

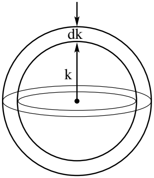
Densitatea de stări de oscilație EM

- Condiția de margine periodică aplicată fiecărui element cub de latură L, cere un număr n întreg de λ: $L = n\lambda$, sau $k_x, k_y, k_z = 2\pi/\lambda = 2\pi n/L$, ce conduce la un volum elementar în spațiul k_x, k_y, k_z: $d^3k = (2\pi/L)^3$.



- Există de două ori mai multe moduri de oscilație independente deoarece câmpul electric are două grade de libertate de polarizare. Atunci, numărul total de moduri de oscilație k cu numărul de undă între k și $k+dk$ este dat de elementele (cuburile elementare) $(2\pi/L)^3$ de pe un strat sferic între k și $k+dk$:

$$2\,\frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi/L)^3} = L^3 \underbrace{\frac{k^2}{\pi^2}}_{D(k)} dk = L^3 D(k) dk$$



- Densit. de stări $D(k)dk = \frac{k^2}{\pi^2}dk$ exprimată prin ω, cu trecerea $\omega = 2\pi c/\lambda = ck$, adică $k = \omega/c$ și $dk = d\omega/c$.

$$D(\omega)d\omega = \frac{\omega^2}{c^3\pi^2}d\omega$$

Apoi prin trecerea la λ obținem $D(\lambda)$:

$$D(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda$$

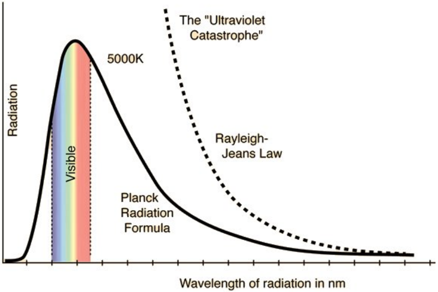
Legea Planck de radiație a corpului negru

- Fotonii sunt bosoni, a căror distribuție pe modurile de oscilație este dată de statistica Bose-Einstein: $P(\lambda) = \dfrac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_\ell}{k_B T}\right) - 1}$

- Densitatea de energie EM în domeniul λ și $\lambda + d\lambda$ este energia $E = h\nu = hc/\lambda$ a fiecărui mod de oscilație λ, înmulțită cu densitatea de stări și cu probabilitatea stării respective de oscilație:

$$u(\lambda)d\lambda = \frac{hc}{\lambda} D(\lambda) P(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} d\lambda \quad [J/m^3]$$

- Aceasta este faimoasa formula Planck a densității de energie pentru radiația corpului negru.



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/mod6.html

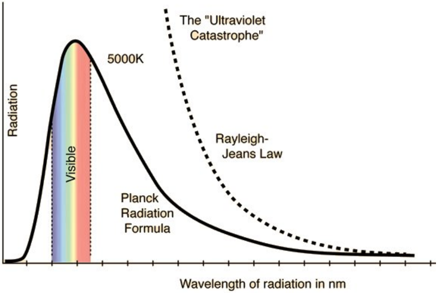
Legea Planck de radiație a corpului negru

- Fotonii sunt bosoni, a căror distribuție pe modurile de oscilație este dată de statistica Bose-Einstein: $P(\lambda) = \dfrac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_\ell}{k_B T}\right) - 1}$

- Densitatea de energie EM în domeniul λ și $\lambda + d\lambda$ este energia $E = h\nu = hc/\lambda$ a fiecărui mod de oscilație λ, înmulțită cu densitatea de stări și cu probabilitatea stării respective de oscilație:

$$u(\lambda)d\lambda = \frac{hc}{\lambda} D(\lambda)P(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}d\lambda \quad [J/m^3]$$

- Aceasta este faimoasa formula Planck a densității de energie pentru radiația corpului negru.



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/mod6.html

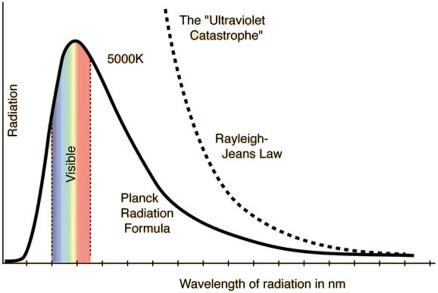
Legea Planck de radiație a corpului negru

- Fotonii sunt bosoni, a căror distribuție pe modurile de oscilație este dată de statistica Bose-Einstein: $P(\lambda) = \dfrac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_\ell}{k_B T}\right) - 1}$

- Densitatea de energie EM în domeniul λ și $\lambda + d\lambda$ este energia $E = h\nu = hc/\lambda$ a fiecărui mod de oscilație λ, înmulțită cu densitatea de stări și cu probabilitatea stării respective de oscilație:

$$u(\lambda)d\lambda = \frac{hc}{\lambda}D(\lambda)P(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}d\lambda \quad [J/m^3]$$

- Aceasta este faimoasa formula Planck a densității de energie pentru radiația corpului negru.



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/mod6.html

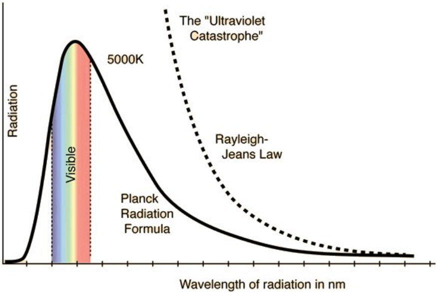
Legea Planck de radiație a corpului negru

- Fotonii sunt bosoni, a căror distribuție pe modurile de oscilație este dată de statistica Bose-Einstein: $P(\lambda) = \dfrac{1}{\exp\left(\dfrac{\hbar\omega_\ell}{k_B T}\right) - 1}$

- Densitatea de energie EM în domeniul λ și $\lambda + d\lambda$ este energia $E = h\nu = hc/\lambda$ a fiecărui mod de oscilație λ, înmulțită cu densitatea de stări și cu probabilitatea stării respective de oscilație:

$$u(\lambda)d\lambda = \frac{hc}{\lambda} D(\lambda) P(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} d\lambda \quad [J/m^3]$$

- Aceasta este faimoasa formula Planck a densității de energie pentru radiația corpului negru.



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/mod6.html

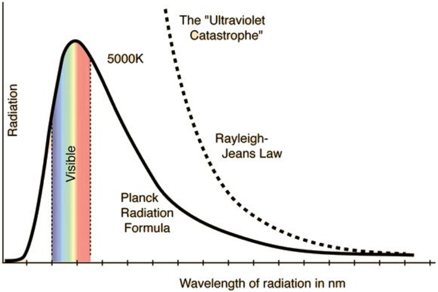
Legea Planck de radiație a corpului negru

- Fotonii sunt bosoni, a căror distribuție pe modurile de oscilație este dată de statistica Bose-Einstein: $P(\lambda) = \dfrac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_\ell}{k_B T}\right) - 1}$

- Densitatea de energie EM în domeniul λ și $\lambda + d\lambda$ este energia $E = h\nu = hc/\lambda$ a fiecărui mod de oscilație λ, înmulțită cu densitatea de stări și cu probabilitatea stării respective de oscilație:

$$u(\lambda)d\lambda = \frac{hc}{\lambda} D(\lambda) P(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} d\lambda \quad [J/m^3]$$

- Aceasta este faimoasa formula Planck a densității de energie pentru radiația corpului negru.



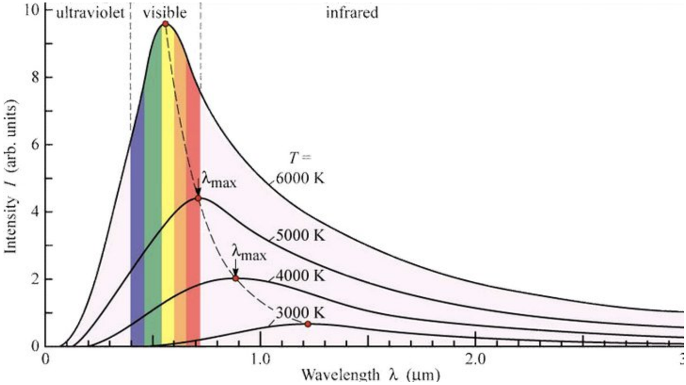
http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/mod6.html

Legea Wien

- Maximul densității de energie se deplasează spre λ mai mici, ν mai mari, odată cu temperatura - Legea Wien.

$$\lambda_{max} T = const. = 0.0028977 mK$$

- Această relație este folosită la determinarea temperaturii stelelor.



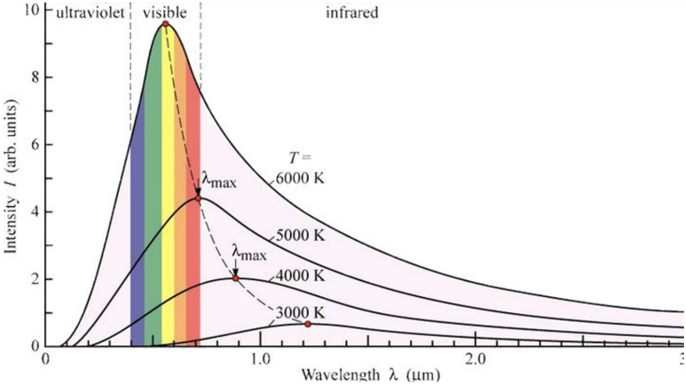
https://esfsciencenew.wordpress.com/2013/10/29/black-body-radiation

Legea Wien

- Maximul densității de energie se deplasează spre λ mai mici, ν mai mari, odată cu temperatura - Legea Wien.

$$\lambda_{max} T = const. = 0.0028977 mK$$

- Această relație este folosită la determinarea temperaturii stelelor.



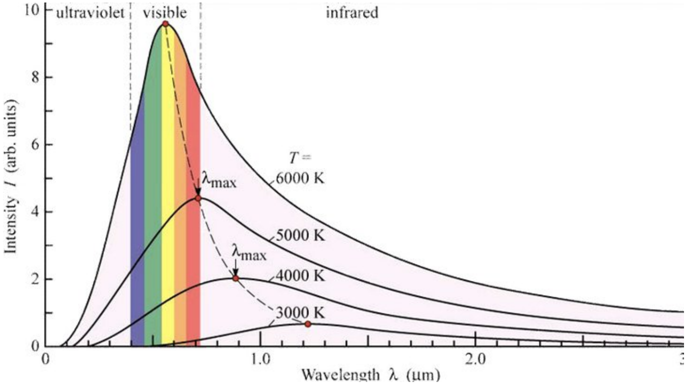
https://esfsciencenew.wordpress.com/2013/10/29/black-body-radiation

Legea Wien

- Maximul densității de energie se deplasează spre λ mai mici, ν mai mari, odată cu temperatura - Legea Wien.

$$\lambda_{max} T = const. = 0.0028977 mK$$

- Această relație este folosită la determinarea temperaturii stelelor.



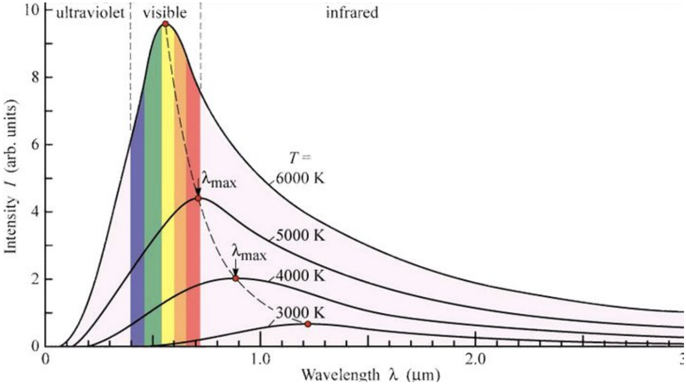
https://esfsciencenew.wordpress.com/2013/10/29/black-body-radiation

Legea Wien

- Maximul densității de energie se deplasează spre λ mai mici, ν mai mari, odată cu temperatura - Legea Wien.

$$\lambda_{max} T = const. = 0.0028977 mK$$

- Această relație este folosită la determinarea temperaturii stelelor.



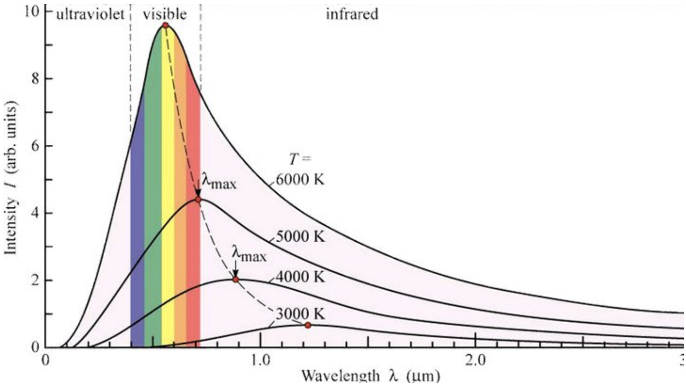
https://esfsciencenew.wordpress.com/2013/10/29/black-body-radiation

Legea Wien

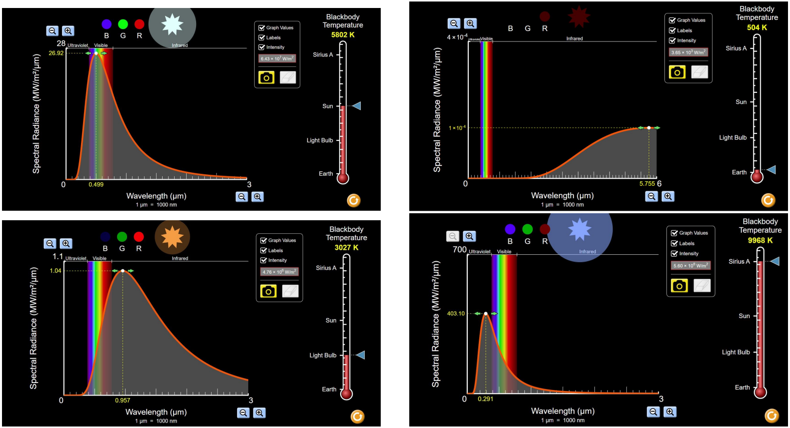
- Maximul densității de energie se deplasează spre λ mai mici, ν mai mari, odată cu temperatura - Legea Wien.

$$\lambda_{max} T = const. = 0.0028977 mK$$

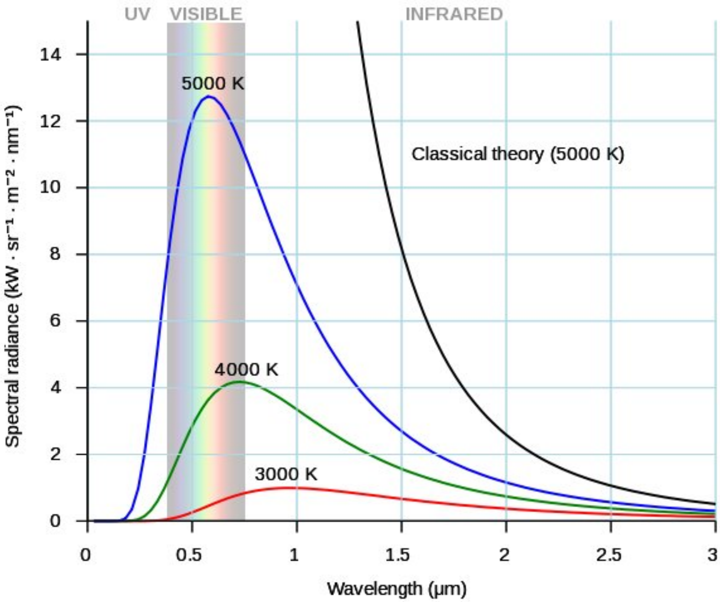
- Această relație este folosită la determinarea temperaturii stelelor.



https://esfsciencenew.wordpress.com/2013/10/29/black-body-radiation



https://phet.colorado.edu/en/simulation/blackbody-spectrum



https://en.wikipedia.org/wiki/Black-body-radiation

Câmpul EM clasic (reluare)

- Am văzut (# Undele-Electromagnetice), din ec. Maxwell fără surse, obținem ecuațiile de propagare a componentelor $\vec{E}$ și $\vec{B}$, sub forma ecuației undelor:
$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{E}=0 \quad ; \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{B}=0 \tag{10}$$
- $\vec{E}$ și $\vec{B}$ pot fi exprimate prin ϕ și $\vec{A}$ (vezi Ec.Maxwell-pt.potențiale)
$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi_{ext}-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{11}$$
- In vid și pentru $\phi_{ext}=const.$, $\vec{A}$ satisface aceeași ecuație de propagare a undelor:
$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{A}=0 \tag{12}$$
- Soluția este unda plană:
$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t)=\vec{A}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{13}$$
- In absența surselor (în vid) și pentru $\phi_{ext}=const.$ relațiile (11) ne dau:
$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\underbrace{\omega\vec{A}_0}_{\vec{E}_0}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \quad ; \quad \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\underbrace{\vec{k}\times\vec{A}_0}_{\vec{B}_0}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \tag{14}$$
- Soluțiile (13) se pot exprima prin exponențiale (la fel ca sol. ec. K-G cu $m=0$), cu $\vec{A}_0=\vec{\epsilon}A_0$, $\vec{\epsilon}$ vector unitar polarizare a $\vec{E}$
$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t)=\vec{\epsilon}A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}+a^*e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)} \tag{15}$$
- iar componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ de câmp EM:
$$\begin{cases}\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=i\omega\vec{\epsilon}A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}-a^*e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)\\ \vec{B}(\vec{r},t)=\vec{\nabla}\times\vec{A}=i(\vec{k}\times\vec{\epsilon})A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}-a^*e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)\end{cases} \tag{16}$$

Câmpul EM clasic (reluare)

- Am văzut (# Undele-Electromagnetice), din ec. Maxwell fără surse, obținem ecuațiile de propagare a componentelor $\vec{E}$ și $\vec{B}$, sub forma ecuației undelor:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{E} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{B} = 0 \tag{10}$$

- $\vec{E}$ și $\vec{B}$ pot fi exprimate prin ϕ și $\vec{A}$ (vezi Ec.Maxwell-pt.potențiale)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_{ext} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{11}$$

- In vid și pentru $\phi_{ext} = const.$, $\vec{A}$ satisface aceeași ecuație de propagare a undelor:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = 0 \tag{12}$$

- Soluția este unda plană:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \tag{13}$$

- In absența surselor (în vid) și pentru $\phi_{ext} = const.$ relațiile (11) ne dau:

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\underbrace{\omega\vec{A}_0}_{\vec{E}_0}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \underbrace{\vec{k}\times\vec{A}_0}_{\vec{B}_0}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \tag{14}$$

- Soluțiile (13) se pot exprima prin exponențiale (la fel ca sol. ec. K-G cu $m = 0$), cu $\vec{A}_0 = \vec{\epsilon}A_0$, $\vec{\epsilon}$ vector unitar polarizare a $\vec{E}$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{\epsilon}A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + a^*e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)} \tag{15}$$

- iar componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ de câmp EM:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = i\omega\vec{\epsilon}A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - a^*e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right) \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A} = i(\vec{k}\times\vec{\epsilon})A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - a^*e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right) \end{cases} \tag{16}$$

Câmpul EM clasic (reluare)

- Am văzut (# Undele-Electromagnetice), din ec. Maxwell fără surse, obținem ecuațiile de propagare a componentelor $\vec{E}$ și $\vec{B}$, sub forma ecuației undelor:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{E} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{B} = 0 \qquad (10)$$

- $\vec{E}$ și $\vec{B}$ pot fi exprimate prin ϕ și $\vec{A}$ (vezi Ec.Maxwell-pt.potențiale)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_{ext} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad (11)$$

- In vid și pentru $\phi_{ext} = const.$, $\vec{A}$ satisface aceeași ecuație de propagare a undelor:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = 0 \qquad (12)$$

- Soluția este unda plană:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \qquad (13)$$

- In absența surselor (în vid) și pentru $\phi_{ext} = const.$ relațiile (11) ne dau:

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\underbrace{\omega\vec{A}_0}_{\vec{E}_0}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \underbrace{\vec{k}\times\vec{A}_0}_{\vec{B}_0}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \qquad (14)$$

- Soluțiile (13) se pot exprima prin exponențiale (la fel ca sol. ec. K-G cu $m=0$), cu $\vec{A}_0 = \vec{\epsilon}A_0$, $\vec{\epsilon}$ vector unitar polarizare a $\vec{E}$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{\epsilon}A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)} \qquad (15)$$

- iar componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ de câmp EM:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = i\omega\vec{\epsilon}A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right) \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A} = i(\vec{k}\times\vec{\epsilon})A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right) \end{cases} \qquad (16)$$

Câmpul EM clasic (reluare)

- Am văzut (# Undele-Electromagnetice), din ec. Maxwell fără surse, obținem ecuațiile de propagare a componentelor $\vec{E}$ și $\vec{B}$, sub forma ecuației undelor:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{E} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{B} = 0 \tag{10}$$

- $\vec{E}$ și $\vec{B}$ pot fi exprimate prin ϕ și $\vec{A}$ (vezi Ec.Maxwell-pt.potențiale)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_{ext} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{11}$$

- In vid și pentru $\phi_{ext} = const.$, $\vec{A}$ satisface aceeași ecuație de propagare a undelor:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = 0 \tag{12}$$

- Soluția este unda plană:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \tag{13}$$

- In absența surselor (în vid) și pentru $\phi_{ext} = const.$ relațiile (11) ne dau:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\underbrace{\omega \vec{A}_0}_{\vec{E}_0} \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \underbrace{\vec{k}\times\vec{A}_0}_{\vec{B}_0} \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \tag{14}$$

- Soluțiile (13) se pot exprima prin exponențiale (la fel ca sol. ec. K-G cu $m = 0$), cu $\vec{A}_0 = \vec{\epsilon} A_0$, $\vec{\epsilon}$ vector unitar polarizare a $\vec{E}$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{\epsilon} A_0 \left(a\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right)} \tag{15}$$

- iar componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ de câmp EM:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\omega \vec{\epsilon} A_0 \left(a\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} - a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right) \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A} = i(\vec{k}\times\vec{\epsilon}) A_0 \left(a\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} - a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right) \end{cases} \tag{16}$$

Câmpul EM clasic (reluare)

- Am văzut (# Undele-Electromagnetice), din ec. Maxwell fără surse, obținem ecuațiile de propagare a componentelor $\vec{E}$ și $\vec{B}$, sub forma ecuației undelor:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{E}=0 \quad ; \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{B}=0 \qquad (10)$$

- $\vec{E}$ și $\vec{B}$ pot fi exprimate prin ϕ și $\vec{A}$ (vezi Ec.Maxwell-pt.potențiale)

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi_{ext}-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad (11)$$

- In vid și pentru $\phi_{ext}=const.$, $\vec{A}$ satisface aceeași ecuație de propagare a undelor:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{A}=0 \qquad (12)$$

- Soluția este unda plană:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t)=\vec{A}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad (13)$$

- In absența surselor (în vid) și pentru $\phi_{ext}=const.$ relațiile (11) ne dau:

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\underbrace{\omega\vec{A}_0}_{\vec{E}_0}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \quad ; \quad \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\underbrace{\vec{k}\times\vec{A}_0}_{\vec{B}_0}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \qquad (14)$$

- Soluțiile (13) se pot exprima prin exponențiale (la fel ca sol. ec. K-G cu $m=0$), cu $\vec{A}_0=\vec{\epsilon}A_0$, $\vec{\epsilon}$ vector unitar polarizare a $\vec{E}$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t)=\vec{\epsilon}A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}+a^*e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)} \qquad (15)$$

- iar componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ de câmp EM:

$$\begin{cases}\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=i\omega\vec{\epsilon}A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}-a^*e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)\\ \vec{B}(\vec{r},t)=\vec{\nabla}\times\vec{A}=i(\vec{k}\times\vec{\epsilon})A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}-a^*e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)\end{cases} \qquad (16)$$

Câmpul EM clasic (reluare)

- Am văzut (# Undele-Electromagnetice), din ec. Maxwell fără surse, obținem ecuațiile de propagare a componentelor $\vec{E}$ și $\vec{B}$, sub forma ecuației undelor:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{E}=0 \quad ; \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{B}=0 \qquad (10)$$

- $\vec{E}$ și $\vec{B}$ pot fi exprimate prin ϕ și $\vec{A}$ (vezi Ec.Maxwell-pt.potențiale)

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi_{ext}-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad (11)$$

- In vid și pentru $\phi_{ext}=const.$, $\vec{A}$ satisface aceeași ecuație de propagare a undelor:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{A}=0 \qquad (12)$$

- Soluția este unda plană:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t)=\vec{A}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad (13)$$

- In absența surselor (în vid) și pentru $\phi_{ext}=const.$ relațiile (11) ne dau:

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\underbrace{\omega\vec{A}_0}_{\vec{E}_0}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \quad ; \quad \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\underbrace{\vec{k}\times\vec{A}_0}_{\vec{B}_0}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \qquad (14)$$

- Soluțiile (13) se pot exprima prin exponențiale (la fel ca sol. ec. K-G cu $m=0$), cu $\vec{A}_0=\vec{\epsilon}A_0$, $\vec{\epsilon}$ vector unitar polarizare a $\vec{E}$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t)=\vec{\epsilon}A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}+a^*e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)} \qquad (15)$$

- iar componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ de câmp EM:

$$\begin{cases}\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=i\omega\vec{\epsilon}A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}-a^*e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)\\ \vec{B}(\vec{r},t)=\vec{\nabla}\times\vec{A}=i(\vec{k}\times\vec{\epsilon})A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}-a^*e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)\end{cases} \qquad (16)$$

Câmpul EM clasic (reluare)

- Am văzut (# Undele-Electromagnetice), din ec. Maxwell fără surse, obținem ecuațiile de propagare a componentelor $\vec{E}$ și $\vec{B}$, sub forma ecuației undelor:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{E}=0 \quad ; \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{B}=0 \qquad (10)$$

- $\vec{E}$ și $\vec{B}$ pot fi exprimate prin ϕ și $\vec{A}$ (vezi Ec.Maxwell-pt.potențiale)

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi_{ext}-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad (11)$$

- In vid și pentru $\phi_{ext}=const.$, $\vec{A}$ satisface aceeași ecuație de propagare a undelor:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\vec{A}=0 \qquad (12)$$

- Soluția este unda plană:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t)=\vec{A}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad (13)$$

- In absența surselor (în vid) și pentru $\phi_{ext}=const.$ relațiile (11) ne dau:

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\underbrace{\omega\vec{A}_0}_{\vec{E}_0}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \quad ; \quad \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\underbrace{\vec{k}\times\vec{A}_0}_{\vec{B}_0}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \qquad (14)$$

- Soluțiile (13) se pot exprima prin exponențiale (la fel ca sol. ec. K-G cu $m=0$), cu $\vec{A}_0=\vec{\epsilon}A_0$, $\vec{\epsilon}$ vector unitar polarizare a $\vec{E}$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t)=\vec{\epsilon}A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}+a^*e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)} \qquad (15)$$

- iar componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ de câmp EM:

$$\begin{cases}\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=i\omega\vec{\epsilon}A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}-a^*e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)\\ \vec{B}(\vec{r},t)=\vec{\nabla}\times\vec{A}=i(\vec{k}\times\vec{\epsilon})A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}-a^*e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)\end{cases} \qquad (16)$$

Câmpul EM clasic (reluare)

- Am văzut (# Undele-Electromagnetice), din ec. Maxwell fără surse, obținem ecuațiile de propagare a componentelor $\vec{E}$ și $\vec{B}$, sub forma ecuației undelor:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{E} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{B} = 0 \tag{10}$$

- $\vec{E}$ și $\vec{B}$ pot fi exprimate prin ϕ și $\vec{A}$ (vezi Ec.Maxwell-pt.potențiale)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_{ext} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{11}$$

- In vid și pentru $\phi_{ext} = const.$, $\vec{A}$ satisface aceeași ecuație de propagare a undelor:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = 0 \tag{12}$$

- Soluția este unda plană:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \tag{13}$$

- In absența surselor (în vid) și pentru $\phi_{ext} = const.$ relațiile (11) ne dau:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\underbrace{\omega \vec{A}_0}_{\vec{E}_0} \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \underbrace{\vec{k} \times \vec{A}_0}_{\vec{B}_0} \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \tag{14}$$

- Soluțiile (13) se pot exprima prin exponențiale (la fel ca sol. ec. K-G cu $m = 0$), cu $\vec{A}_0 = \vec{\epsilon} A_0$, $\vec{\epsilon}$ vector unitar polarizare a $\vec{E}$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{\epsilon} A_0 \left(a\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right)} \tag{15}$$

- iar componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ de câmp EM:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\omega\vec{\epsilon} A_0 \left(a\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} - a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = i(\vec{k} \times \vec{\epsilon}) A_0 \left(a\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} - a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right) \end{cases} \tag{16}$$

Câmpul EM clasic (reluare)

- Am văzut (# Undele-Electromagnetice), din ec. Maxwell fără surse, obținem ecuațiile de propagare a componentelor $\vec{E}$ și $\vec{B}$, sub forma ecuației undelor:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{E} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{B} = 0 \tag{10}$$

- $\vec{E}$ și $\vec{B}$ pot fi exprimate prin ϕ și $\vec{A}$ (vezi Ec.Maxwell-pt.potențiale)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_{ext} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{11}$$

- In vid și pentru $\phi_{ext} = const.$, $\vec{A}$ satisface aceeași ecuație de propagare a undelor:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = 0 \tag{12}$$

- Soluția este unda plană:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \tag{13}$$

- In absența surselor (în vid) și pentru $\phi_{ext} = const.$ relațiile (11) ne dau:

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\underbrace{\omega\vec{A}_0}_{\vec{E}_0}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \underbrace{\vec{k}\times\vec{A}_0}_{\vec{B}_0}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \tag{14}$$

- Soluțiile (13) se pot exprima prin exponențiale (la fel ca sol. ec. K-G cu $m = 0$), cu $\vec{A}_0 = \vec{\epsilon}A_0$, $\vec{\epsilon}$ vector unitar polarizare a $\vec{E}$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{\epsilon}A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + a^*\,e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)} \tag{15}$$

- iar componentele $\vec{E}$ și $\vec{B}$ de câmp EM:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = i\omega\vec{\epsilon}A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - a^*\,e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right) \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A} = i(\vec{k}\times\vec{\epsilon})A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - a^*\,e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right) \end{cases} \tag{16}$$

Energia câmpului EM clasic

- Densitatea de energie a câmpului EM este: (vezi Undele-Electromagnetice):

$$u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \frac{\epsilon_0}{2}\left(E^2 + \underbrace{c^2 B^2}_{E^2}\right) = \epsilon_0 |\vec{E}|^2 = \epsilon_0\, \omega^2 \vec{A}_0^2 \sin^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \qquad (17)$$

unde am folosit (14): $\vec{E} = -\omega \vec{A}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

- Pentru calculul energiei, trebuie să ținem cont și de cele două componente (grade de libertate) de polarizare ϵ_p ale $\vec{E}$, ca două oscilații independente, în plan normal la direcția de mișcare. Acestea dublează energia câmpului EM.
- Astfel, energia câmpului EM într-un volum finit V este: $$W = 2\int_V u\, d^3\vec{r} = 2\epsilon_0 \int_V |\vec{E}|^2\, d^3\vec{r} \qquad (18)$$
- Deoarece $|\vec{E}| = E_0 = \omega A_0$ avem: $$W = 2\epsilon_0\, \omega^2 A_0^2 V \qquad (19)$$
- Cuantificarea energiei implică: (energie foton Planck: $W = h\nu$) $$W = \hbar\omega \qquad (20)$$
- Egalând ultimele două relații, putem exprima: $$A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}} \qquad (21)$$
- Sol. $\vec{A}(\vec{r}, t)$ (15) devine: $$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{\epsilon}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}}\left(a\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right) \qquad (22)$$

Energia câmpului EM clasic

- Densitatea de energie a câmpului EM este: (vezi Undele-Electromagnetice):

$$u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \frac{\epsilon_0}{2}\Big(E^2 + \underbrace{c^2 B^2}_{E^2}\Big) = \epsilon_0 |\vec{E}|^2 = \epsilon_0\, \omega^2 \vec{A}_0^2 \sin^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \qquad (17)$$

unde am folosit (14): $\vec{E} = -\omega \vec{A}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

- Pentru calculul energiei, trebuie să ținem cont și de cele două componente (grade de libertate) de polarizare ϵ_p ale $\vec{E}$, ca două oscilații independente, în plan normal la direcția de mișcare. Acestea dublează energia câmpului EM.
- Astfel, energia câmpului EM într-un volum finit V este: $$W = 2\int_V u\, d^3\vec{r} = 2\epsilon_0 \int_V |\vec{E}|^2\, d^3\vec{r} \qquad (18)$$
- Deoarece $|\vec{E}| = E_0 = \omega A_0$ avem: $$W = 2\epsilon_0\, \omega^2 A_0^2 V \qquad (19)$$
- Cuantificarea energiei implică: (energie foton Planck: $W = h\nu$) $$W = \hbar\omega \qquad (20)$$
- Egalând ultimele două relații, putem exprima: $$A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}} \qquad (21)$$
- Sol. $\vec{A}(\vec{r},t)$ (15) devine: $$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{\epsilon}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}}\left(a\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right) \qquad (22)$$

Energia câmpului EM clasic

- Densitatea de energie a câmpului EM este: (vezi Undele-Electromagnetice):

$$u=\frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2+\frac{B^2}{\mu_0}\right)=\frac{\epsilon_0}{2}\Big(E^2+\underbrace{c^2B^2}_{E^2}\Big)=\epsilon_0|\vec{E}|^2=\epsilon_0\,\omega^2\vec{A}_0^2\sin^2(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \qquad (17)$$

unde am folosit (14): $\vec{E}=-\omega\vec{A}_0\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$

- Pentru calculul energiei, trebuie să ținem cont și de cele două componente (grade de libertate) de polarizare ϵ_p ale $\vec{E}$, ca două oscilații independente, în plan normal la direcția de mișcare. Acestea dublează energia câmpului EM.
- Astfel, energia câmpului EM într-un volum finit V este: $$W=2\int_V u\,d^3\vec{r}=2\epsilon_0\int_V|\vec{E}|^2\,d^3\vec{r} \qquad (18)$$
- Deoarece $|\vec{E}|=E_0=\omega A_0$ avem: $$W=2\epsilon_0\,\omega^2A_0^2V \qquad (19)$$
- Cuantificarea energiei implică: (energie foton Planck: $W=h\nu$) $$W=\hbar\omega \qquad (20)$$
- Egalând ultimele două relații, putem exprima: $$A_0=\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega V}} \qquad (21)$$
- Sol. $\vec{A}(\vec{r},t)$ (15) devine: $$\vec{A}(\vec{r},t)=\vec{\epsilon}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega V}}\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}+a^*e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right) \qquad (22)$$

Energia câmpului EM clasic

- Densitatea de energie a câmpului EM este: (vezi Undele-Electromagnetice):

$$u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \frac{\epsilon_0}{2}\Big(E^2 + \underbrace{c^2 B^2}_{E^2}\Big) = \epsilon_0 |\vec{E}|^2 = \epsilon_0\, \omega^2 \vec{A}_0^2 \sin^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \qquad (17)$$

unde am folosit (14): $\vec{E} = -\omega \vec{A}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

- Pentru calculul energiei, trebuie să ținem cont și de cele două componente (grade de libertate) de polarizare ϵ_p ale $\vec{E}$, ca două oscilații independente, în plan normal la direcția de mișcare. Acestea dublează energia câmpului EM.
- Astfel, energia câmpului EM într-un volum finit V este: $$W = 2\int_V u\, d^3\vec{r} = 2\epsilon_0 \int_V |\vec{E}|^2\, d^3\vec{r} \qquad (18)$$
- Deoarece $|\vec{E}| = E_0 = \omega A_0$ avem: $$W = 2\epsilon_0\, \omega^2 A_0^2 V \qquad (19)$$
- Cuantificarea energiei implică: (energie foton Planck: $W = h\nu$) $$W = \hbar\omega \qquad (20)$$
- Egalând ultimele două relații, putem exprima: $$A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}} \qquad (21)$$
- Sol. $\vec{A}(\vec{r},t)$ (15) devine: $$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{\epsilon}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega V}}\left(a\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right) \qquad (22)$$

Energia câmpului EM clasic

- Densitatea de energie a câmpului EM este: (vezi Undele-Electromagnetice):

$$u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \frac{\epsilon_0}{2}\Big(E^2 + \underbrace{c^2 B^2}_{E^2}\Big) = \epsilon_0 |\vec{E}|^2 = \epsilon_0\, \omega^2 \vec{A}_0^2 \sin^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \qquad (17)$$

unde am folosit (14): $\vec{E} = -\omega \vec{A}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

- Pentru calculul energiei, trebuie să ținem cont și de cele două componente (grade de libertate) de polarizare ϵ_p ale $\vec{E}$, ca două oscilații independente, în plan normal la direcția de mișcare. Acestea dublează energia câmpului EM.
- Astfel, energia câmpului EM într-un volum finit V este:

$$W = 2\int_V u\, d^3\vec{r} = 2\epsilon_0 \int_V |\vec{E}|^2\, d^3\vec{r} \qquad (18)$$

- Deoarece $|\vec{E}| = E_0 = \omega A_0$ avem:

$$W = 2\epsilon_0\, \omega^2 A_0^2 V \qquad (19)$$

- Cuantificarea energiei implică: (energie foton Planck: $W = h\nu$)

$$W = \hbar\omega \qquad (20)$$

- Egalând ultimele două relații, putem exprima:

$$A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}} \qquad (21)$$

- Sol. $\vec{A}(\vec{r},t)$ (15) devine: $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{\epsilon}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega V}}\left(a\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)$ (22)

Energia câmpului EM clasic

- Densitatea de energie a câmpului EM este: (vezi Undele-Electromagnetice):

$$u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \frac{\epsilon_0}{2}\Big(E^2 + \underbrace{c^2 B^2}_{E^2}\Big) = \epsilon_0 |\vec{E}|^2 = \epsilon_0\, \omega^2 \vec{A}_0^2 \sin^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \qquad (17)$$

unde am folosit (14): $\vec{E} = -\omega \vec{A}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

- Pentru calculul energiei, trebuie să ținem cont și de cele două componente (grade de libertate) de polarizare ϵ_p ale $\vec{E}$, ca două oscilații independente, în plan normal la direcția de mișcare. Acestea dublează energia câmpului EM.
- Astfel, energia câmpului EM într-un volum finit V este:

$$W = 2\int_V u\, d^3\vec{r} = 2\epsilon_0 \int_V |\vec{E}|^2\, d^3\vec{r} \qquad (18)$$

- Deoarece $|\vec{E}| = E_0 = \omega A_0$ avem:

$$W = 2\epsilon_0\, \omega^2 A_0^2 V \qquad (19)$$

- Cuantificarea energiei implică: (energie foton Planck: $W = h\nu$)

$$\boxed{W = \hbar\omega} \qquad (20)$$

- Egalând ultimele două relații, putem exprima:

$$A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}} \qquad (21)$$

- Sol. $\vec{A}(\vec{r},t)$ (15) devine: $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{\epsilon}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega V}}\left(a\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right)$ (22)

Energia câmpului EM clasic

- Densitatea de energie a câmpului EM este: (vezi Undele-Electromagnetice):

$$u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \frac{\epsilon_0}{2}\Big(E^2 + \underbrace{c^2 B^2}_{E^2}\Big) = \epsilon_0 |\vec{E}|^2 = \epsilon_0\, \omega^2 \vec{A}_0^2 \sin^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \qquad (17)$$

unde am folosit (14): $\vec{E} = -\omega \vec{A}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

- Pentru calculul energiei, trebuie să ținem cont și de cele două componente (grade de libertate) de polarizare ϵ_p ale $\vec{E}$, ca două oscilații independente, în plan normal la direcția de mișcare. Acestea dublează energia câmpului EM.
- Astfel, energia câmpului EM într-un volum finit V este:

$$W = 2\int_V u\, d^3\vec{r} = 2\epsilon_0 \int_V |\vec{E}|^2\, d^3\vec{r} \qquad (18)$$

- Deoarece $|\vec{E}| = E_0 = \omega A_0$ avem:

$$W = 2\epsilon_0\, \omega^2 A_0^2 V \qquad (19)$$

- Cuantificarea energiei implică: (energie foton Planck: $W = h\nu$)

$$\boxed{W = \hbar\omega} \qquad (20)$$

- Egalând ultimele două relații, putem exprima:

$$A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}} \qquad (21)$$

- Sol. $\vec{A}(\vec{r},t)$ (15) devine: $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{\epsilon}\sqrt{\dfrac{\hbar}{2\epsilon_0\omega V}}\left(a\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right) \qquad (22)$

Energia câmpului EM clasic

- Densitatea de energie a câmpului EM este: (vezi Undele-Electromagnetice):

$$u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \frac{\epsilon_0}{2}\Big(E^2 + \underbrace{c^2 B^2}_{E^2}\Big) = \epsilon_0 |\vec{E}|^2 = \epsilon_0\, \omega^2 \vec{A}_0^2 \sin^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \qquad (17)$$

unde am folosit (14): $\vec{E} = -\omega \vec{A}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

- Pentru calculul energiei, trebuie să ținem cont și de cele două componente (grade de libertate) de polarizare ϵ_p ale $\vec{E}$, ca două oscilații independente, în plan normal la direcția de mișcare. Acestea dublează energia câmpului EM.

- Astfel, energia câmpului EM într-un volum finit V este:

$$W = 2\int_V u\, d^3\vec{r} = 2\epsilon_0 \int_V |\vec{E}|^2\, d^3\vec{r} \qquad (18)$$

- Deoarece $|\vec{E}| = E_0 = \omega A_0$ avem:

$$W = 2\epsilon_0\, \omega^2 A_0^2 V \qquad (19)$$

- Cuantificarea energiei implică: (energie foton Planck: $W = h\nu$)

$$W = \hbar\omega \qquad (20)$$

- Egalând ultimele două relații, putem exprima:

$$A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}} \qquad (21)$$

- Sol. $\vec{A}(\vec{r},t)$ (15) devine: $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{\epsilon}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega V}}\left(a\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right) \qquad (22)$

Energia câmpului EM clasic

- Densitatea de energie a câmpului EM este: (vezi Undele-Electromagnetice):

$$u=\frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2+\frac{B^2}{\mu_0}\right)=\frac{\epsilon_0}{2}\Big(E^2+\underbrace{c^2B^2}_{E^2}\Big)=\epsilon_0|\vec{E}|^2=\epsilon_0\,\omega^2\vec{A}_0^2\sin^2(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) \qquad (17)$$

unde am folosit (14): $\vec{E}=-\omega\vec{A}_0\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$

- Pentru calculul energiei, trebuie să ținem cont și de cele două componente (grade de libertate) de polarizare ϵ_p ale $\vec{E}$, ca două oscilații independente, în plan normal la direcția de mișcare. Acestea dublează energia câmpului EM.
- Astfel, energia câmpului EM într-un volum finit V este:

$$W=2\int_V u\,d^3\vec{r}=2\epsilon_0\int_V|\vec{E}|^2\,d^3\vec{r} \qquad (18)$$

- Deoarece $|\vec{E}|=E_0=\omega A_0$ avem:

$$W=2\epsilon_0\,\omega^2A_0^2V \qquad (19)$$

- Cuantificarea energiei implică: (energie foton Planck: $W=h\nu$)

$$\boxed{W=\hbar\omega} \qquad (20)$$

- Egalând ultimele două relații, putem exprima:

$$A_0=\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega V}} \qquad (21)$$

- Sol. $\vec{A}(\vec{r},t)$ (15) devine:

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\vec{\epsilon}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega V}}\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}+a^*e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right) \qquad (22)$$

Cuantificarea câmpului EM (operatori)

- In cuantificarea oscilatorului armonic am trecut la operatori: $x \longrightarrow \hat{x}$ și $p \longrightarrow \hat{p}$ iar în hamiltonian $(x,p) \longrightarrow (\hat{x},\hat{p}) \longrightarrow (\hat{a},\hat{a}^\dagger)$. Pt. cuantificarea câmp EM trecem la operatori de câmp $\psi(x) \longrightarrow \hat{\psi}(x)$, adică vom înlocui $\vec{A} \longrightarrow \hat{\vec{A}}$. Pt. 2 grade de polarizare independente $\vec{\epsilon}_\lambda$ și un set de frecvențe ω_k proprii, folosind (22) pt. $\vec{A}$,

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r},t) = \sum_{k,\lambda} \vec{\epsilon}_\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k V}} \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + \hat{a}^\dagger_{k\lambda} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} \right) \tag{23}$$

în termen. II a^*-*complex conjugat*, prin trecerea la op. devine $\hat{a}^\dagger$ -*hermitic conjugat*

- Componentele cuantificate $\vec{E}$ și $\vec{B}$ (16) ale câmpului EM, devin operatori:

$$\begin{cases} \hat{\vec{E}}(\vec{r},t) = -\dfrac{\partial \hat{\vec{A}}}{\partial t} = i \sum_{k,\lambda} \omega_k \vec{\epsilon}_\lambda \sqrt{\dfrac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k V}} \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} - \hat{a}^\dagger_{k\lambda} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} \right) \\ \hat{\vec{B}}(\vec{r},t) = \hat{\vec{\nabla}} \times \hat{\vec{A}} = i \sum_{k,\lambda} (\vec{k} \times \vec{\epsilon}_\lambda) \sqrt{\dfrac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k V}} \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} - \hat{a}^\dagger_{k\lambda} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} \right) \end{cases} \tag{24}$$

- Rescriem (24) cu $\vec{u}_\ell = \dfrac{\vec{\epsilon}_\lambda}{\sqrt{2\epsilon_0 V}} e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}$ și indicele mod de oscilație $\ell = (k,\lambda)$, adică,

$$\begin{cases} \hat{E}(\vec{r},t) = i \sum_\ell \sqrt{\hbar \omega_\ell} \left[\hat{a}_\ell e^{-i\omega_\ell t}\, \vec{u}_\ell(\vec{r}) - \hat{a}^\dagger_\ell e^{i\omega_\ell t}\, \vec{u}^*_\ell(\vec{r}) \right] \\ \hat{B}(\vec{r},t) = i \sum_\ell \sqrt{\dfrac{\hbar c^2}{\omega_\ell}} \left[\hat{a}_\ell e^{-i\omega_\ell t} \vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell(\vec{r}) - \hat{a}^\dagger_\ell e^{i\omega_\ell t} \vec{k}_\ell \times \vec{u}^*_\ell(\vec{r}) \right] \end{cases} \tag{25}$$

Cuantificarea câmpului EM (operatori)

- In cuantificarea oscilatorului armonic am trecut la operatori: $x \to \hat{x}$ și $p \to \hat{p}$ iar în hamiltonian $(x, p) \to (\hat{x}, \hat{p}) \to (\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$. Pt. cuantificarea câmp EM trecem la operatori de câmp $\boxed{\psi(x) \to \hat{\psi}(x)}$, adică vom înlocui $\vec{A} \to \hat{\vec{A}}$. Pt. 2 grade de polarizare independente $\vec{\epsilon}_\lambda$ și un set de frecvențe ω_k proprii, folosind (22) pt. $\vec{A}$,

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r}, t) = \sum_{k,\lambda} \vec{\epsilon}_\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k V}} \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + \hat{a}^\dagger_{k\lambda} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right) \tag{23}$$

în termen. II a^*-*complex conjugat*, prin trecerea la op. devine $\hat{a}^\dagger$ -*hermitic conjugat*

- Componentele cuantificate $\vec{E}$ și $\vec{B}$ (16) ale câmpului EM, devin operatori:

$$\begin{cases} \hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = -\dfrac{\partial \hat{\vec{A}}}{\partial t} = i \displaystyle\sum_{k,\lambda} \omega_k \vec{\epsilon}_\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k V}} \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} - \hat{a}^\dagger_{k\lambda} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right) \\ \hat{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \hat{\vec{\nabla}} \times \hat{\vec{A}} = i \displaystyle\sum_{k,\lambda} (\vec{k} \times \vec{\epsilon}_\lambda) \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k V}} \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} - \hat{a}^\dagger_{k\lambda} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right) \end{cases} \tag{24}$$

- Rescriem (24) cu $\vec{u}_\ell = \dfrac{\vec{\epsilon}_\lambda}{\sqrt{2\epsilon_0 V}} e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}$ și indicele mod de oscilație $\ell = (k, \lambda)$, adică,

$$\begin{cases} \hat{E}(\vec{r}, t) = i \displaystyle\sum_\ell \sqrt{\hbar\omega_\ell} \left[\hat{a}_\ell e^{-i\omega_\ell t}\, \vec{u}_\ell(\vec{r}) - \hat{a}^\dagger_\ell e^{i\omega_\ell t}\, \vec{u}^*_\ell(\vec{r}) \right] \\ \hat{B}(\vec{r}, t) = i \displaystyle\sum_\ell \sqrt{\frac{\hbar c^2}{\omega_\ell}} \left[\hat{a}_\ell e^{-i\omega_\ell t} \vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell(\vec{r}) - \hat{a}^\dagger_\ell e^{i\omega_\ell t} \vec{k}_\ell \times \vec{u}^*_\ell(\vec{r}) \right] \end{cases} \tag{25}$$

Cuantificarea câmpului EM (operatori)

- In cuantificarea oscilatorului armonic am trecut la operatori: $x \to \hat{x}$ și $p \to \hat{p}$ iar în hamiltonian $(x,p) \to (\hat{x},\hat{p}) \to (\hat{a},\hat{a}^\dagger)$. Pt. cuantificarea câmp EM trecem la operatori de câmp $\psi(x) \to \hat{\psi}(x)$, adică vom înlocui $\vec{A} \to \hat{\vec{A}}$. Pt. 2 grade de polarizare independente $\vec{\epsilon}_\lambda$ și un set de frecvențe ω_k proprii, folosind (22) pt. $\vec{A}$,

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r},t) = \sum_{k,\lambda} \vec{\epsilon}_\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k V}} \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + \hat{a}^\dagger_{k\lambda} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} \right) \tag{23}$$

în termen. II a^*-*complex conjugat*, prin trecerea la op. devine $\hat{a}^\dagger$ -*hermitic conjugat*

- Componentele cuantificate $\vec{E}$ și $\vec{B}$ (16) ale câmpului EM, devin operatori:

$$\begin{cases} \hat{\vec{E}}(\vec{r},t) = -\dfrac{\partial \hat{\vec{A}}}{\partial t} = i \displaystyle\sum_{k,\lambda} \omega_k \vec{\epsilon}_\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k V}} \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} - \hat{a}^\dagger_{k\lambda} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} \right) \\ \hat{\vec{B}}(\vec{r},t) = \hat{\vec{\nabla}} \times \hat{\vec{A}} = i \displaystyle\sum_{k,\lambda} (\vec{k} \times \vec{\epsilon}_\lambda) \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k V}} \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} - \hat{a}^\dagger_{k\lambda} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} \right) \end{cases} \tag{24}$$

- Rescriem (24) cu $\vec{u}_\ell = \dfrac{\vec{\epsilon}_\lambda}{\sqrt{2\epsilon_0 V}} e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}$ și indicele mod de oscilație $\ell = (k,\lambda)$, adică,

$$\begin{cases} \hat{E}(\vec{r},t) = i \displaystyle\sum_\ell \sqrt{\hbar\omega_\ell} \left[\hat{a}_\ell e^{-i\omega_\ell t}\, \vec{u}_\ell(\vec{r}) - \hat{a}^\dagger_\ell e^{i\omega_\ell t}\, \vec{u}^*_\ell(\vec{r}) \right] \\ \hat{B}(\vec{r},t) = i \displaystyle\sum_\ell \sqrt{\frac{\hbar c^2}{\omega_\ell}} \left[\hat{a}_\ell e^{-i\omega_\ell t} \vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell(\vec{r}) - \hat{a}^\dagger_\ell e^{i\omega_\ell t} \vec{k}_\ell \times \vec{u}^*_\ell(\vec{r}) \right] \end{cases} \tag{25}$$

Cuantificarea câmpului EM (operatori)

- In cuantificarea oscilatorului armonic am trecut la operatori: $x \to \hat{x}$ și $p \to \hat{p}$ iar în hamiltonian $(x, p) \to (\hat{x}, \hat{p}) \to (\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$. Pt. cuantificarea câmp EM trecem la operatori de câmp $\psi(x) \to \hat{\psi}(x)$, adică vom înlocui $\vec{A} \to \hat{\vec{A}}$. Pt. 2 grade de polarizare independente $\vec{\epsilon}_\lambda$ și un set de frecvențe ω_k proprii, folosind (22) pt. $\vec{A}$,

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r}, t) = \sum_{k,\lambda} \vec{\epsilon}_\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k V}} \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + \hat{a}^\dagger_{k\lambda} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right) \tag{23}$$

în termen. II a^*-*complex conjugat*, prin trecerea la op. devine $\hat{a}^\dagger$ -*hermitic conjugat*

- Componentele cuantificate $\vec{E}$ și $\vec{B}$ (16) ale câmpului EM, devin operatori:

$$\begin{cases} \hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = -\dfrac{\partial \hat{\vec{A}}}{\partial t} = i \displaystyle\sum_{k,\lambda} \omega_k \vec{\epsilon}_\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k V}} \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} - \hat{a}^\dagger_{k\lambda} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right) \\ \hat{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \hat{\vec{\nabla}} \times \hat{\vec{A}} = i \displaystyle\sum_{k,\lambda} (\vec{k} \times \vec{\epsilon}_\lambda) \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k V}} \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} - \hat{a}^\dagger_{k\lambda} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right) \end{cases} \tag{24}$$

- Rescriem (24) cu $\vec{u}_\ell = \dfrac{\vec{\epsilon}_\lambda}{\sqrt{2\epsilon_0 V}} e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}$ și indicele mod de oscilație $\ell = (k, \lambda)$, adică,

$$\begin{cases} \hat{E}(\vec{r}, t) = i \displaystyle\sum_{\ell} \sqrt{\hbar \omega_\ell} \left[\hat{a}_\ell e^{-i\omega_\ell t}\, \vec{u}_\ell(\vec{r}) - \hat{a}^\dagger_\ell e^{i\omega_\ell t}\, \vec{u}^*_\ell(\vec{r}) \right] \\ \hat{B}(\vec{r}, t) = i \displaystyle\sum_{\ell} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{\omega_\ell}} \left[\hat{a}_\ell e^{-i\omega_\ell t} \vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell(\vec{r}) - \hat{a}^\dagger_\ell e^{i\omega_\ell t} \vec{k}_\ell \times \vec{u}^*_\ell(\vec{r}) \right] \end{cases} \tag{25}$$

Cuantificarea câmpului EM (operatori)

- In cuantificarea oscilatorului armonic am trecut la operatori: $x \to \hat{x}$ și $p \to \hat{p}$ iar în hamiltonian $(x, p) \to (\hat{x}, \hat{p}) \to (\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$. Pt. cuantificarea câmp EM trecem la operatori de câmp $\psi(x) \to \hat{\psi}(x)$, adică vom înlocui $\vec{A} \to \hat{\vec{A}}$. Pt. 2 grade de polarizare independente $\vec{\epsilon}_\lambda$ și un set de frecvențe ω_k proprii, folosind (22) pt. $\vec{A}$,

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r}, t) = \sum_{k,\lambda} \vec{\epsilon}_\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k V}} \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + \hat{a}^\dagger_{k\lambda} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right) \tag{23}$$

în termen. II a^*-*complex conjugat*, prin trecerea la op. devine $\hat{a}^\dagger$ -*hermitic conjugat*

- Componentele cuantificate $\vec{E}$ și $\vec{B}$ (16) ale câmpului EM, devin operatori:

$$\begin{cases} \hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = -\dfrac{\partial \hat{\vec{A}}}{\partial t} = i \displaystyle\sum_{k,\lambda} \omega_k \vec{\epsilon}_\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k V}} \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} - \hat{a}^\dagger_{k\lambda} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right) \\ \hat{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \hat{\vec{\nabla}} \times \hat{\vec{A}} = i \displaystyle\sum_{k,\lambda} (\vec{k} \times \vec{\epsilon}_\lambda) \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k V}} \left(\hat{a}_{k\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} - \hat{a}^\dagger_{k\lambda} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right) \end{cases} \tag{24}$$

- Rescriem (24) cu $\vec{u}_\ell = \dfrac{\vec{\epsilon}_\lambda}{\sqrt{2\epsilon_0 V}} e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}$ și indicele mod de oscilație $\ell = (k, \lambda)$, adică,

$$\begin{cases} \hat{E}(\vec{r}, t) = i \displaystyle\sum_{\ell} \sqrt{\hbar \omega_\ell} \left[\hat{a}_\ell e^{-i\omega_\ell t}\, \vec{u}_\ell(\vec{r}) - \hat{a}^\dagger_\ell e^{i\omega_\ell t}\, \vec{u}^*_\ell(\vec{r}) \right] \\ \hat{B}(\vec{r}, t) = i \displaystyle\sum_{\ell} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{\omega_\ell}} \left[\hat{a}_\ell e^{-i\omega_\ell t} \vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell(\vec{r}) - \hat{a}^\dagger_\ell e^{i\omega_\ell t} \vec{k}_\ell \times \vec{u}^*_\ell(\vec{r}) \right] \end{cases} \tag{25}$$

Cuantificarea energiei câmpului EM

- Operatorul Hamilton ca energia câmpului EM (vezi # Undele EM) $\hat{H}_{field} = \frac{1}{2}\int_V \left(\epsilon_0 \hat{E}^2 + \frac{\hat{B}^2}{\mu_0}\right) d^3r$
- $$\int_V d^3r \left|\hat{E}\right|^2 = i\sum_{\ell,m} \hbar\sqrt{\omega_\ell\omega_m}\left[-\hat{a}_\ell\hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t+\omega_m t)}\int d^3r\,\vec{u}_\ell(\vec{r})\cdot\vec{u}_m(\vec{r}) + \hat{a}_\ell^\dagger\hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t-\omega_m t)}\int d^3r\,\vec{u}_\ell^*(\vec{r})\cdot\vec{u}_m(\vec{r})\right] + \left[h.c.\right]$$
- Folosind relațiile de ortonormare: $\int d^3r\,\vec{u}_\ell^*(\vec{r})\vec{u}_m(\vec{r}) = \delta_{\ell,m}$; $\int d^3r\,\vec{u}_\ell(\vec{r})\vec{u}_m(\vec{r}) = \delta_{-\ell,m}$

  într-adevăr, cu $u_\ell \sim e^{i\,k_\ell x}$ avem $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,k_\ell x} e^{-i\,k_m x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,(k_\ell - k_m)x}dx = 2\pi\delta_{\ell,m}$
- Obținem: $\int_V d^3r \left|\hat{E}\right|^2 = \sum_\ell \hbar\omega_\ell\left[\hat{a}_\ell^\dagger\hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell\hat{a}_\ell^\dagger - \hat{a}_\ell\hat{a}_{-\ell}e^{-2i\omega_\ell t} - \hat{a}_\ell^\dagger\hat{a}_{-\ell}^\dagger e^{2i\omega_\ell t}\right]$
- $$\int_V d^3r \left|\hat{B}\right|^2 = i\sum_{\ell,m}\frac{\hbar c^2}{\sqrt{\omega_\ell\omega_m}}\left[-\hat{a}_\ell\hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t+\omega_m t)}\int d^3r\,(\vec{k}_\ell\times\vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m) + \hat{a}_\ell^\dagger\hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t-\omega_m t)}\int d^3r\,(\vec{k}_\ell\times\vec{u}_\ell^*)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m)\right] + \left[h.c.\right]$$

  Cu identitățile $(\vec{k}_\ell\times\vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m) = (\vec{k}_\ell\cdot\vec{k}_m)(\vec{u}_\ell\cdot\vec{u}_m)$, și $\vec{k}_\ell\cdot\vec{u}_\ell = 0$, avem,

  $\int d^3r(\vec{k}_\ell\times\vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m) = -k_\ell^2\delta_{-\ell,m}$; $\int d^3r(\vec{k}_\ell\times\vec{u}_\ell^*)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m) = k_\ell^2\delta_{\ell,m}$
- Obținem: $\int_V d^3r \left|\hat{B}\right|^2 = \sum_\ell \hbar\omega_\ell\left[\hat{a}_\ell^\dagger\hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell\hat{a}_\ell^\dagger + \hat{a}_\ell\hat{a}_{-\ell}e^{-2i\omega_\ell t} + \hat{a}_\ell^\dagger\hat{a}_{-\ell}^\dagger e^{2i\omega_\ell t}\right]$

Cuantificarea energiei câmpului EM

- Operatorul Hamilton ca energia câmpului EM (vezi # Undele EM) $\Big\}$ $\hat{H}_{field} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V \left(\epsilon_0 \hat{E}^2 + \frac{\hat{B}^2}{\mu_0}\right) d^3 r$

- $$\int_V d^3 r \left|\hat{E}\right|^2 = i\sum_{\ell,m} \hbar\sqrt{\omega_\ell \omega_m}\left[-\hat{a}_\ell \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t + \omega_m t)}\int d^3 r\, \vec{u}_\ell(\vec{r})\cdot\vec{u}_m(\vec{r}) + \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t - \omega_m t)}\int d^3 r\, \vec{u}_\ell^*(\vec{r})\cdot\vec{u}_m(\vec{r})\right] + \left[h.c.\right]$$

- Folosind relațiile de ortonormare: $\displaystyle\int d^3 r\, \vec{u}_\ell^*(\vec{r})\vec{u}_m(\vec{r}) = \delta_{\ell,m}$; $\displaystyle\int d^3 r\, \vec{u}_\ell(\vec{r})\vec{u}_m(\vec{r}) = \delta_{-\ell,m}$

  într-adevăr, cu $u_\ell \sim e^{i\,k_\ell x}$ avem $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,k_\ell x} e^{-i\,k_m x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,(k_\ell - k_m)x} dx = 2\pi\delta_{\ell,m}$

- Obținem: $\displaystyle\int_V d^3 r \left|\hat{E}\right|^2 = \sum_\ell \hbar\omega_\ell \left[\hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell \hat{a}_\ell^\dagger - \hat{a}_\ell \hat{a}_{-\ell} e^{-2i\omega_\ell t} - \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_{-\ell}^\dagger e^{2i\omega_\ell t}\right]$

- $$\int_V d^3 r \left|\hat{B}\right|^2 = i\sum_{\ell,m} \frac{\hbar c^2}{\sqrt{\omega_\ell \omega_m}}\left[-\hat{a}_\ell \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t + \omega_m t)}\int d^3 r\, (\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m) + \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t - \omega_m t)}\int d^3 r\, (\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell^*)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m)\right] + \left[h.c.\right]$$

  Cu identitățile $(\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m) = (\vec{k}_\ell \cdot \vec{k}_m)(\vec{u}_\ell \cdot \vec{u}_m)$, și $\vec{k}_\ell \cdot \vec{u}_\ell = 0$, avem,

  $\displaystyle\int d^3 r (\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m) = -k_\ell^2 \delta_{-\ell,m}$; $\displaystyle\int d^3 r (\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell^*)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m) = k_\ell^2 \delta_{\ell,m}$

- Obținem: $\displaystyle\int_V d^3 r \left|\hat{B}\right|^2 = \sum_\ell \hbar\omega_\ell \left[\hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell \hat{a}_\ell^\dagger + \hat{a}_\ell \hat{a}_{-\ell} e^{-2i\omega_\ell t} + \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_{-\ell}^\dagger e^{2i\omega_\ell t}\right]$

Cuantificarea energiei câmpului EM

- Operatorul Hamilton ca energia câmpului EM (vezi # Undele EM) $\Big\}$ $\hat{H}_{field} = \frac{1}{2}\int_V \left(\epsilon_0 \hat{E}^2 + \frac{\hat{B}^2}{\mu_0}\right) d^3 r$
- $$\int_V d^3 r \left|\hat{E}\right|^2 = i \sum_{\ell,m} \hbar\sqrt{\omega_\ell \omega_m}\left[-\hat{a}_\ell \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t + \omega_m t)} \int d^3 r\, \vec{u}_\ell(\vec{r})\cdot\vec{u}_m(\vec{r}) + \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t - \omega_m t)} \int d^3 r\, \vec{u}_\ell^*(\vec{r})\cdot\vec{u}_m(\vec{r})\right] + [h.c.]$$
- Folosind relațiile de ortonormare: $\int d^3 r\, \vec{u}_\ell^*(\vec{r})\vec{u}_m(\vec{r}) = \delta_{\ell,m}$; $\int d^3 r\, \vec{u}_\ell(\vec{r})\vec{u}_m(\vec{r}) = \delta_{-\ell,m}$

  într-adevăr, cu $u_\ell \sim e^{i k_\ell x}$ avem $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i k_\ell x} e^{-i k_m x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i (k_\ell - k_m) x} dx = 2\pi \delta_{\ell,m}$
- Obținem: $\int_V d^3 r \left|\hat{E}\right|^2 = \sum_\ell \hbar\omega_\ell \left[\hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell \hat{a}_\ell^\dagger - \hat{a}_\ell \hat{a}_{-\ell} e^{-2i\omega_\ell t} - \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_{-\ell}^\dagger e^{2i\omega_\ell t}\right]$
- $$\int_V d^3 r \left|\hat{B}\right|^2 = i \sum_{\ell,m} \frac{\hbar c^2}{\sqrt{\omega_\ell \omega_m}}\left[-\hat{a}_\ell \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t + \omega_m t)} \int d^3 r\, (\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m) + \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t - \omega_m t)} \int d^3 r\, (\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell^*)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m)\right] + [h.c.]$$

  Cu identitățile $(\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m) = (\vec{k}_\ell\cdot\vec{k}_m)(\vec{u}_\ell\cdot\vec{u}_m)$, și $\vec{k}_\ell\cdot\vec{u}_\ell = 0$, avem,

  $\int d^3 r (\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m) = -k_\ell^2 \delta_{-\ell,m}$; $\int d^3 r (\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell^*)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m) = k_\ell^2 \delta_{\ell,m}$
- Obținem: $\int_V d^3 r \left|\hat{B}\right|^2 = \sum_\ell \hbar\omega_\ell \left[\hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell \hat{a}_\ell^\dagger + \hat{a}_\ell \hat{a}_{-\ell} e^{-2i\omega_\ell t} + \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_{-\ell}^\dagger e^{2i\omega_\ell t}\right]$

Cuantificarea energiei câmpului EM

- Operatorul Hamilton ca energia câmpului EM (vezi # Undele EM) $\Big\}\quad \hat{H}_{field} = \frac{1}{2}\int_V \left(\epsilon_0 \hat{E}^2 + \frac{\hat{B}^2}{\mu_0}\right) d^3r$
- $$\int_V d^3r\,\left|\hat{E}\right|^2 = i\sum_{\ell,m}\hbar\sqrt{\omega_\ell\omega_m}\left[-\,\hat{a}_\ell\hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t+\omega_m t)}\int d^3r\,\vec{u}_\ell(\vec{r})\cdot\vec{u}_m(\vec{r}) + \hat{a}_\ell^\dagger\hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t-\omega_m t)}\int d^3r\,\vec{u}_\ell^*(\vec{r})\cdot\vec{u}_m(\vec{r})\right] + \left[h.c.\right]$$
- Folosind relațiile de ortonormare: $\int d^3r\,\vec{u}_\ell^*(\vec{r})\vec{u}_m(\vec{r}) = \delta_{\ell,m} \quad ; \quad \int d^3r\,\vec{u}_\ell(\vec{r})\vec{u}_m(\vec{r}) = \delta_{-\ell,m}$

  într-adevăr, cu $u_\ell \sim e^{i\,k_\ell x}$ avem $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,k_\ell x}e^{-i\,k_m x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,(k_\ell - k_m)x}dx = 2\pi\delta_{\ell,m}$
- Obținem: $\int_V d^3r\,\left|\hat{E}\right|^2 = \sum_\ell \hbar\omega_\ell\left[\hat{a}_\ell^\dagger\hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell\hat{a}_\ell^\dagger - \hat{a}_\ell\hat{a}_{-\ell}e^{-2i\omega_\ell t} - \hat{a}_\ell^\dagger\hat{a}_{-\ell}^\dagger e^{2i\omega_\ell t}\right]$
- $$\int_V d^3r\,\left|\hat{B}\right|^2 = i\sum_{\ell,m}\frac{\hbar c^2}{\sqrt{\omega_\ell\omega_m}}\left[-\,\hat{a}_\ell\hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t+\omega_m t)}\int d^3r\,(\vec{k}_\ell\times\vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m) + \hat{a}_\ell^\dagger\hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t-\omega_m t)}\int d^3r\,(\vec{k}_\ell\times\vec{u}_\ell^*)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m)\right] + \left[h.c.\right]$$

  Cu identitățile $(\vec{k}_\ell\times\vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m) = (\vec{k}_\ell\cdot\vec{k}_m)(\vec{u}_\ell\cdot\vec{u}_m)$, și $\vec{k}_\ell\cdot\vec{u}_\ell = 0$, avem,

  $\int d^3r(\vec{k}_\ell\times\vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m) = -k_\ell^2\delta_{-\ell,m} \quad ; \quad \int d^3r(\vec{k}_\ell\times\vec{u}_\ell^*)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m) = k_\ell^2\delta_{\ell,m}$
- Obținem: $\int_V d^3r\,\left|\hat{B}\right|^2 = \sum_\ell \hbar\omega_\ell\left[\hat{a}_\ell^\dagger\hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell\hat{a}_\ell^\dagger + \hat{a}_\ell\hat{a}_{-\ell}e^{-2i\omega_\ell t} + \hat{a}_\ell^\dagger\hat{a}_{-\ell}^\dagger e^{2i\omega_\ell t}\right]$

Cuantificarea energiei câmpului EM

- Operatorul Hamilton ca energia câmpului EM (vezi # Undele EM) $\Big\}$ $\hat{H}_{field} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V \left(\epsilon_0 \hat{E}^2 + \frac{\hat{B}^2}{\mu_0}\right) d^3r$

- $$\int_V d^3r \left|\hat{E}\right|^2 = i \sum_{\ell,m} \hbar\sqrt{\omega_\ell \omega_m} \Big[-\hat{a}_\ell \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t + \omega_m t)} \int d^3r\, \vec{u}_\ell(\vec{r}) \cdot \vec{u}_m(\vec{r}) + \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t - \omega_m t)} \int d^3r\, \vec{u}_\ell^*(\vec{r}) \cdot \vec{u}_m(\vec{r}) \Big] + \Big[h.c.\Big]$$

- Folosind relațiile de ortonormare: $\displaystyle\int d^3r\, \vec{u}_\ell^*(\vec{r}) \vec{u}_m(\vec{r}) = \delta_{\ell,m}$; $\displaystyle\int d^3r\, \vec{u}_\ell(\vec{r}) \vec{u}_m(\vec{r}) = \delta_{-\ell,m}$

  într-adevăr, cu $u_\ell \sim e^{i\,k_\ell x}$ avem $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,k_\ell x} e^{-i\,k_m x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,(k_\ell - k_m)x} dx = 2\pi\delta_{\ell,m}$

- Obținem: $\displaystyle\int_V d^3r \left|\hat{E}\right|^2 = \sum_\ell \hbar\omega_\ell \Big[\hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell \hat{a}_\ell^\dagger - \hat{a}_\ell \hat{a}_{-\ell} e^{-2i\omega_\ell t} - \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_{-\ell}^\dagger e^{2i\omega_\ell t}\Big]$

- $$\int_V d^3r \left|\hat{B}\right|^2 = i \sum_{\ell,m} \frac{\hbar c^2}{\sqrt{\omega_\ell \omega_m}} \Big[-\hat{a}_\ell \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t + \omega_m t)} \int d^3r\, (\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell) \cdot (\vec{k}_m \times \vec{u}_m) + \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t - \omega_m t)} \int d^3r\, (\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell^*) \cdot (\vec{k}_m \times \vec{u}_m) \Big] + \Big[h.c.\Big]$$

  Cu identitățile $(\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell) \cdot (\vec{k}_m \times \vec{u}_m) = (\vec{k}_\ell \cdot \vec{k}_m)(\vec{u}_\ell \cdot \vec{u}_m)$, și $\vec{k}_\ell \cdot \vec{u}_\ell = 0$, avem,

  $\displaystyle\int d^3r (\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell) \cdot (\vec{k}_m \times \vec{u}_m) = -k_\ell^2 \delta_{-\ell,m}$; $\displaystyle\int d^3r (\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell^*) \cdot (\vec{k}_m \times \vec{u}_m) = k_\ell^2 \delta_{\ell,m}$

- Obținem: $\displaystyle\int_V d^3r \left|\hat{B}\right|^2 = \sum_\ell \hbar\omega_\ell \Big[\hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell \hat{a}_\ell^\dagger + \hat{a}_\ell \hat{a}_{-\ell} e^{-2i\omega_\ell t} + \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_{-\ell}^\dagger e^{2i\omega_\ell t}\Big]$

Cuantificarea energiei câmpului EM

- Operatorul Hamilton ca energia câmpului EM (vezi # Undele EM) $\Big\}\quad \hat{H}_{field} = \frac{1}{2}\int_V \left(\epsilon_0 \hat{E}^2 + \frac{\hat{B}^2}{\mu_0}\right) d^3r$

- $$\int_V d^3r \left|\hat{E}\right|^2 = i\sum_{\ell,m} \hbar\sqrt{\omega_\ell\omega_m}\left[-\hat{a}_\ell\hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t+\omega_m t)}\int d^3r\,\vec{u}_\ell(\vec{r})\cdot\vec{u}_m(\vec{r}) + \hat{a}_\ell^\dagger\hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t-\omega_m t)}\int d^3r\,\vec{u}_\ell^*(\vec{r})\cdot\vec{u}_m(\vec{r})\right] + \left[h.c.\right]$$

- Folosind relațiile de ortonormare: $\int d^3r\,\vec{u}_\ell^*(\vec{r})\vec{u}_m(\vec{r}) = \delta_{\ell,m}$; $\int d^3r\,\vec{u}_\ell(\vec{r})\vec{u}_m(\vec{r}) = \delta_{-\ell,m}$

  într-adevăr, cu $u_\ell \sim e^{i\,k_\ell x}$ avem $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,k_\ell x}e^{-i\,k_m x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,(k_\ell - k_m)x}dx = 2\pi\delta_{\ell,m}$

- Obținem: $\int_V d^3r \left|\hat{E}\right|^2 = \sum_\ell \hbar\omega_\ell\left[\hat{a}_\ell^\dagger\hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell\hat{a}_\ell^\dagger - \hat{a}_\ell\hat{a}_{-\ell}e^{-2i\omega_\ell t} - \hat{a}_\ell^\dagger\hat{a}_{-\ell}^\dagger e^{2i\omega_\ell t}\right]$

- $$\int_V d^3r \left|\hat{B}\right|^2 = i\sum_{\ell,m}\frac{\hbar c^2}{\sqrt{\omega_\ell\omega_m}}\left[-\hat{a}_\ell\hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t+\omega_m t)}\int d^3r\,(\vec{k}_\ell\times\vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m) + \hat{a}_\ell^\dagger\hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t-\omega_m t)}\int d^3r\,(\vec{k}_\ell\times\vec{u}_\ell^*)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m)\right] + \left[h.c.\right]$$

  Cu identitățile $(\vec{k}_\ell\times\vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m) = (\vec{k}_\ell\cdot\vec{k}_m)(\vec{u}_\ell\cdot\vec{u}_m)$, și $\vec{k}_\ell\cdot\vec{u}_\ell = 0$, avem,

  $$\int d^3r(\vec{k}_\ell\times\vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m) = -k_\ell^2\delta_{-\ell,m} \quad ; \quad \int d^3r(\vec{k}_\ell\times\vec{u}_\ell^*)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m) = k_\ell^2\delta_{\ell,m}$$

- Obținem: $\int_V d^3r \left|\hat{B}\right|^2 = \sum_\ell \hbar\omega_\ell\left[\hat{a}_\ell^\dagger\hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell\hat{a}_\ell^\dagger + \hat{a}_\ell\hat{a}_{-\ell}e^{-2i\omega_\ell t} + \hat{a}_\ell^\dagger\hat{a}_{-\ell}^\dagger e^{2i\omega_\ell t}\right]$

Cuantificarea energiei câmpului EM

- Operatorul Hamilton ca energia câmpului EM (vezi # Undele EM) $\left.\right\}$ $\hat{H}_{field} = \frac{1}{2}\int_V \left(\epsilon_0 \hat{E}^2 + \frac{\hat{B}^2}{\mu_0}\right) d^3 r$
- $$\int_V d^3 r \left|\hat{E}\right|^2 = i\sum_{\ell,m} \hbar\sqrt{\omega_\ell \omega_m}\left[-\hat{a}_\ell \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t+\omega_m t)} \int d^3 r\, \vec{u}_\ell(\vec{r})\cdot\vec{u}_m(\vec{r}) + \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t-\omega_m t)} \int d^3 r\, \vec{u}_\ell^*(\vec{r})\cdot\vec{u}_m(\vec{r})\right] + [h.c.]$$
- Folosind relațiile de ortonormare: $\int d^3 r\, \vec{u}_\ell^*(\vec{r})\vec{u}_m(\vec{r}) = \delta_{\ell,m}$; $\int d^3 r\, \vec{u}_\ell(\vec{r})\vec{u}_m(\vec{r}) = \delta_{-\ell,m}$

  într-adevăr, cu $u_\ell \sim e^{i\,k_\ell x}$ avem $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,k_\ell x} e^{-i\,k_m x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,(k_\ell - k_m)x} dx = 2\pi\delta_{\ell,m}$
- Obținem: $\int_V d^3 r \left|\hat{E}\right|^2 = \sum_\ell \hbar\omega_\ell \left[\hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell \hat{a}_\ell^\dagger - \hat{a}_\ell \hat{a}_{-\ell} e^{-2i\omega_\ell t} - \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_{-\ell}^\dagger e^{2i\omega_\ell t}\right]$
- $$\int_V d^3 r \left|\hat{B}\right|^2 = i\sum_{\ell,m} \frac{\hbar c^2}{\sqrt{\omega_\ell \omega_m}}\left[-\hat{a}_\ell \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t+\omega_m t)} \int d^3 r\, (\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m) + \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t-\omega_m t)} \int d^3 r\, (\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell^*)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m)\right] + [h.c.]$$

  Cu identitățile $(\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m) = (\vec{k}_\ell\cdot\vec{k}_m)(\vec{u}_\ell\cdot\vec{u}_m)$, și $\vec{k}_\ell\cdot\vec{u}_\ell = 0$, avem,

  $$\int d^3 r (\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m) = -k_\ell^2 \delta_{-\ell,m} \quad ; \quad \int d^3 r (\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell^*)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m) = k_\ell^2 \delta_{\ell,m}$$
- Obținem: $\int_V d^3 r \left|\hat{B}\right|^2 = \sum_\ell \hbar\omega_\ell \left[\hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell \hat{a}_\ell^\dagger + \hat{a}_\ell \hat{a}_{-\ell} e^{-2i\omega_\ell t} + \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_{-\ell}^\dagger e^{2i\omega_\ell t}\right]$

Cuantificarea energiei câmpului EM

- Operatorul Hamilton ca energia câmpului EM (vezi # Undele EM) $\Big\}$ $\hat{H}_{field} = \frac{1}{2}\int_V \left(\epsilon_0 \hat{E}^2 + \frac{\hat{B}^2}{\mu_0}\right) d^3r$
- $$\int_V d^3r\, \left|\hat{E}\right|^2 = i\sum_{\ell,m} \hbar\sqrt{\omega_\ell \omega_m}\,\Big[-\,\hat{a}_\ell \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t+\omega_m t)}\int d^3r\, \vec{u}_\ell(\vec{r})\cdot\vec{u}_m(\vec{r}) + \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t-\omega_m t)}\int d^3r\, \vec{u}_\ell^*(\vec{r})\cdot\vec{u}_m(\vec{r})\Big] + \Big[h.c.\Big]$$
- Folosind relațiile de ortonormare: $\int d^3r\, \vec{u}_\ell^*(\vec{r})\vec{u}_m(\vec{r}) = \delta_{\ell,m}$; $\int d^3r\, \vec{u}_\ell(\vec{r})\vec{u}_m(\vec{r}) = \delta_{-\ell,m}$

  într-adevăr, cu $u_\ell \sim e^{i\,k_\ell x}$ avem $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,k_\ell x} e^{-i\,k_m x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,(k_\ell - k_m)x} dx = 2\pi\delta_{\ell,m}$
- Obținem: $\int_V d^3r\, \left|\hat{E}\right|^2 = \sum_\ell \hbar\omega_\ell \left[\hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell \hat{a}_\ell^\dagger - \hat{a}_\ell \hat{a}_{-\ell} e^{-2i\omega_\ell t} - \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_{-\ell}^\dagger e^{2i\omega_\ell t}\right]$
- $$\int_V d^3r\, \left|\hat{B}\right|^2 = i\sum_{\ell,m} \frac{\hbar c^2}{\sqrt{\omega_\ell \omega_m}}\Big[-\,\hat{a}_\ell \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t+\omega_m t)}\int d^3r\, (\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m) + \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_m e^{-i(\omega_\ell t-\omega_m t)}\int d^3r\, (\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell^*)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m)\Big] + \Big[h.c.\Big]$$

  Cu identitățile $(\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m) = (\vec{k}_\ell\cdot\vec{k}_m)(\vec{u}_\ell\cdot\vec{u}_m)$, și $\vec{k}_\ell\cdot\vec{u}_\ell = 0$, avem,

  $$\int d^3r(\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m) = -k_\ell^2\delta_{-\ell,m} \quad ; \quad \int d^3r(\vec{k}_\ell \times \vec{u}_\ell^*)\cdot(\vec{k}_m \times \vec{u}_m) = k_\ell^2\delta_{\ell,m}$$
- Obținem: $\int_V d^3r\, \left|\hat{B}\right|^2 = \sum_\ell \hbar\omega_\ell \left[\hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_\ell + \hat{a}_\ell \hat{a}_\ell^\dagger + \hat{a}_\ell \hat{a}_{-\ell} e^{-2i\omega_\ell t} + \hat{a}_\ell^\dagger \hat{a}_{-\ell}^\dagger e^{2i\omega_\ell t}\right]$

Cuantificarea energiei câmpului EM (cont.)

- In final, expresia Hamiltonian-ului în funcție de operatorii de creare și anihilare:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{k\lambda}\hbar\omega_k\left(\hat{a}^\dagger_{k\lambda}\hat{a}_{k\lambda} + \hat{a}_{k\lambda}\hat{a}^\dagger_{k\lambda}\right) = \sum_{k\lambda}\hbar\omega_k\left(\hat{a}^\dagger_{k\lambda}\hat{a}_{k\lambda} + \frac{1}{2}\right) \quad (26)$$

- $\left.\begin{array}{l}\text{Hamiltonian-ul se poate scrie} \\ \text{și ca cel de oscilator armonic}\end{array}\right\}$ $\hat{H}_{field} = \hbar\omega_k\left(\hat{a}^\dagger_{k\lambda}\hat{a}_{k\lambda} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{N}_{k\lambda} + \frac{1}{2}\right) \quad (27)$
- $\hat{a}^\dagger_{k\lambda}\hat{a}_{k\lambda} = \hat{N}_{k\lambda}$ este operatorul *număr de fotoni* de frecvență ω_k și polarizare ϵ_λ, similar cu operatorul *numar de stare* de oscilator armonic.

Cuantificarea energiei câmpului EM (cont.)

- In final, expresia Hamiltonian-ului în funcție de operatorii de creare și anihilare:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{k\lambda} \hbar\omega_k \left(\hat{a}^\dagger_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda} + \hat{a}_{k\lambda} \hat{a}^\dagger_{k\lambda} \right) = \sum_{k\lambda} \hbar\omega_k \left(\hat{a}^\dagger_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right) \qquad (26)$$

- Hamiltonian-ul se poate scrie și ca cel de oscilator armonic $\Big\}$ $\hat{H}_{field} = \hbar\omega_k \left(\hat{a}^\dagger_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(\hat{N}_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (27)$
- $\hat{a}^\dagger_{k\lambda} \hat{a}_{k\lambda} = \hat{N}_{k\lambda}$ este operatorul *număr de fotoni* de frecvență ω_k și polarizare ϵ_λ, similar cu operatorul *numar de stare* de oscilator armonic.

Cuantificarea energiei câmpului EM (cont.)

- In final, expresia Hamiltonian-ului în funcție de operatorii de creare și anihilare:
$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{k\lambda} \hbar\omega_k \left(\hat{a}^\dagger_{k\lambda}\hat{a}_{k\lambda} + \hat{a}_{k\lambda}\hat{a}^\dagger_{k\lambda}\right) = \sum_{k\lambda} \hbar\omega_k \left(\hat{a}^\dagger_{k\lambda}\hat{a}_{k\lambda} + \frac{1}{2}\right) \tag{26}$$
- Hamiltonian-ul se poate scrie și ca cel de oscilator armonic $\Big\}$ $\hat{H}_{field} = \hbar\omega_k \left(\hat{a}^\dagger_{k\lambda}\hat{a}_{k\lambda} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega \left(\hat{N}_{k\lambda} + \frac{1}{2}\right)$ (27)
- $\hat{a}^\dagger_{k\lambda}\hat{a}_{k\lambda} = \hat{N}_{k\lambda}$ este operatorul *număr de fotoni* de frecvență ω_k și polarizare ϵ_λ, similar cu operatorul *numar de stare* de oscilator armonic.

Cuantificarea energiei câmpului EM (cont.)

- In final, expresia Hamiltonian-ului în funcție de operatorii de creare și anihilare:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{k\lambda} \hbar\omega_k \left(\hat{a}^\dagger_{k\lambda}\hat{a}_{k\lambda} + \hat{a}_{k\lambda}\hat{a}^\dagger_{k\lambda}\right) = \sum_{k\lambda} \hbar\omega_k \left(\hat{a}^\dagger_{k\lambda}\hat{a}_{k\lambda} + \frac{1}{2}\right) \tag{26}$$

- Hamiltonian-ul se poate scrie și ca cel de oscilator armonic

$$\hat{H}_{field} = \hbar\omega_k \left(\hat{a}^\dagger_{k\lambda}\hat{a}_{k\lambda} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{N}_{k\lambda} + \frac{1}{2}\right) \tag{27}$$

- $\hat{a}^\dagger_{k\lambda}\hat{a}_{k\lambda} = \hat{N}_{k\lambda}$ este operatorul *număr de fotoni* de frecvență ω_k și polarizare ϵ_λ, similar cu operatorul *numar de stare* de oscilator armonic.

Cuantificarea energiei câmpului EM (cont.)

- In final, expresia Hamiltonian-ului în funcție de operatorii de creare și anihilare:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{k\lambda} \hbar\omega_k \left(\hat{a}^\dagger_{k\lambda}\hat{a}_{k\lambda} + \hat{a}_{k\lambda}\hat{a}^\dagger_{k\lambda} \right) = \sum_{k\lambda} \hbar\omega_k \left(\hat{a}^\dagger_{k\lambda}\hat{a}_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right) \tag{26}$$

- $\left.\begin{array}{l}\text{Hamiltonian-ul se poate scrie} \\ \text{și ca cel de oscilator armonic}\end{array}\right\}$ $\hat{H}_{field} = \hbar\omega_k \left(\hat{a}^\dagger_{k\lambda}\hat{a}_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(\hat{N}_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right)$ (27)

- $\hat{a}^\dagger_{k\lambda}\hat{a}_{k\lambda} = \hat{N}_{k\lambda}$ este operatorul *număr de fotoni* de frecvență ω_k și polarizare ϵ_λ, similar cu operatorul *numar de stare* de oscilator armonic.

Thank you

Partea II

ANEXA

Tabel: Rezumat - Ecuații Maxwell exprimate prin potențiale

Ecuațiile Maxwell pentru câmpuri	Legătura între câmp și potențial	Calibrare potențiale	Ecuația potențialelor	Ecuație propagare potențiale ($\rho=0,\ \vec j=0$)
$\vec\nabla\cdot\vec B=0$ (1)	$\vec\nabla\cdot\underbrace{(\vec\nabla\times\vec A)}_{\vec B}=0$ $\Longrightarrow \vec B=\vec\nabla\times\vec A$ (5)	Calibrare potențial $\vec A$ (invarianța $\vec B$) $\vec A'=\vec A+\vec\nabla\chi \qquad (\vec\nabla\times\vec\nabla\chi=0)$ $\vec B'=\vec\nabla\times\vec A'=\vec\nabla\times\vec A=\vec B$ (11)		
$\vec\nabla\times\vec E+\frac{\partial\vec B}{\partial t}=0$ (2)	$\vec\nabla\times\underbrace{\left(\vec E+\frac{\partial\vec A}{\partial t}\right)}_{-\vec\nabla\phi}=0$ $\Longrightarrow \vec E=-\frac{\partial\vec A}{\partial t}-\vec\nabla\phi$ (6)	Calibrare potențiale $\vec A$ și ϕ (invarianța $\vec E$) $\vec A'=\vec A+\vec\nabla\chi \qquad \left(+\frac{\partial}{\partial t}\vec\nabla\chi\right)$ $\phi'=\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t} \qquad \left(-\vec\nabla\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)$ $\vec E'=-\frac{\partial\vec A'}{\partial t}-\vec\nabla\phi'=-\frac{\partial\vec A}{\partial t}-\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\vec\nabla\chi}-\vec\nabla\phi+\cancel{\vec\nabla\frac{\partial\chi}{\partial t}}$ $=-\frac{\partial\vec A}{\partial t}-\vec\nabla\phi=\vec E$ (12)	Ecuație câmp de calibrare χ Fie calibrarea Lorenz pt. $\vec A'$ și ϕ' $\vec\nabla\cdot\vec A'+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi'}{\partial t}=0$ $\underbrace{\vec\nabla\cdot\vec A+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}}_{=0\text{ (Lorenz)}}+\nabla^2\chi-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0$ (13)	$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}-\nabla^2\chi=0$
$\vec\nabla\cdot\vec E=\frac{\rho}{\epsilon_0}$ (3)	$\vec E=-\frac{\partial\vec A}{\partial t}-\vec\nabla\phi$	Calibrarea Coulomb: $\vec\nabla\cdot\vec A=0$ Calibrarea Lorenz: $\vec\nabla\cdot\vec A=-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}$ $\longrightarrow$ $-\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\vec\nabla\cdot\vec A\right)}_{=-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\text{ (Lorenz)}}-\nabla^2\phi=\frac{\rho}{\epsilon_0}$ (7)	Sursa de pot. $\vec A$ divergent este $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ $\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\nabla^2\phi=\frac{\rho}{\epsilon_0}$ (9)	$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\nabla^2\phi=0$
$\vec\nabla\times\vec B-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec E}{\partial t}=\mu_0\vec j$ (4)	$\vec B=\vec\nabla\times\vec A$ *) $\vec E=-\frac{\partial\vec A}{\partial t}-\vec\nabla\phi$	$\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec A}{\partial t^2}-\nabla^2\vec A+\vec\nabla\underbrace{\left(\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}+\vec\nabla\cdot\vec A\right)}_{=0\text{ (Lorenz)}}=\mu_0\vec j$ (8)	$\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec A}{\partial t^2}-\nabla^2\vec A=\mu_0\vec j$ (10)	$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec A}{\partial t^2}-\nabla^2\vec A=0$

*) $\vec\nabla\times\left(\vec\nabla\times\vec A\right)=\vec\nabla\left(\vec\nabla\cdot\vec A\right)-\vec\nabla^2\vec A$

Cuantificarea câmpului EM (cont)

- Am obținut deci ec. pt. $\vec{A}(\vec{k},t)$: $-\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)\vec{A}(\vec{k},t)=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}(\vec{k},t)}{\partial t^2}$
- Aceasta însă este ec. de oscilator armonic clasic pt. x: $-\kappa x = m\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}$

  unde $\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)$ este înlocuit prin κ, iar $1/c^2$ prin m.
- Deci *oscilațiile electromagnetice staționare $\longrightarrow$ oscilații armonice*.

  Pe de altă parte, energiile oscilatorului armonic sunt cuantificate:

  $$W=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad n=0,1,2,\ldots$$

  unde: $\omega_n=\sqrt{\kappa/m}$
- Revenind la oscilațiile câmpului electromagnetic, acestea pot avea doar energii cu valori cuantificate:

  $$\boxed{W_\ell=\hbar\omega_\ell\left(n_\ell+\frac{1}{2}\right)} \quad n_\ell=0,1,2,\ldots$$

  unde, acum pulsația: $\omega_\ell=c|\vec{k}_\ell|$

  cu $\omega=2\pi\nu$ și $k=2\pi/\lambda \Rightarrow \nu\lambda=c$
- Valoarea întreagă n_ℓ reprezintă numărul de fotoni din modul de oscilație ℓ.

Cuantificarea câmpului EM (cont)

- Am obținut deci ec. pt. $\vec{A}(\vec{k},t)$: $-\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)\vec{A}(\vec{k},t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{k},t)}{\partial t^2}$
- Aceasta însă este ec. de oscilator armonic clasic pt. x: $-\kappa x = m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$
  unde $\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)$ este înlocuit prin κ, iar $1/c^2$ prin m.
- Deci *oscilațiile electromagnetice staționare $\longrightarrow$ oscilații armonice*.

  Pe de altă parte, energiile oscilatorului armonic sunt cuantificate: $W = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad n = 0,1,2,\ldots$
  unde: $\omega_n = \sqrt{\kappa/m}$

- Revenind la oscilațiile câmpului electromagnetic, acestea pot avea doar energii cu valori cuantificate: $\boxed{W_\ell = \hbar\omega_\ell\left(n_\ell+\frac{1}{2}\right)} \quad n_\ell = 0,1,2,\ldots$
  unde, acum pulsația: $\omega_\ell = c|\vec{k}_\ell|$
  cu $\omega = 2\pi\nu$ și $k = 2\pi/\lambda \Rightarrow \nu\lambda = c$
- Valoarea întreagă n_ℓ reprezintă numărul de fotoni din modul de oscilație ℓ.

Cuantificarea câmpului EM (cont)

- Am obținut deci ec. pt. $\vec{A}(\vec{k},t)$: $-\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)\vec{A}(\vec{k},t)=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}(\vec{k},t)}{\partial t^2}$
- Aceasta însă este ec. de oscilator armonic clasic pt. x: $-\kappa x=m\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}$

  unde $\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)$ este înlocuit prin κ, iar $1/c^2$ prin m.
- Deci *oscilațiile electromagnetice staționare $\longrightarrow$ oscilații armonice*.

  Pe de altă parte, energiile oscilatorului armonic sunt cuantificate: $W=\hbar\omega\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad n=0,1,2,\ldots$

  unde: $\omega_n=\sqrt{\kappa/m}$
- Revenind la oscilațiile câmpului electromagnetic, acestea pot avea doar energii cu valori cuantificate: $\boxed{W_\ell=\hbar\omega_\ell\left(n_\ell+\dfrac{1}{2}\right)}$ $n_\ell=0,1,2,\ldots$

  unde, acum pulsația: $\omega_\ell=c|\vec{k}_\ell|$

  cu $\omega=2\pi\nu$ și $k=2\pi/\lambda \Rightarrow \nu\lambda=c$
- Valoarea întreagă n_ℓ reprezintă numărul de fotoni din modul de oscilație ℓ.

Cuantificarea câmpului EM (cont)

- Am obținut deci ec. pt. $\vec{A}(\vec{k},t)$: $-\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)\vec{A}(\vec{k},t)=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}(\vec{k},t)}{\partial t^2}$
- Aceasta însă este ec. de oscilator armonic clasic pt. x: $-\kappa x = m\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}$

  unde $\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)$ este înlocuit prin κ, iar $1/c^2$ prin m.
- Deci *oscilațiile electromagnetice staționare $\longrightarrow$ oscilații armonice*.

  Pe de altă parte, energiile oscilatorului armonic sunt cuantificate: $W=\hbar\omega\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad n=0,1,2,\ldots$

  unde: $\omega_n=\sqrt{\kappa/m}$
- Revenind la oscilațiile câmpului electromagnetic, acestea pot avea doar energii cu valori cuantificate: $\boxed{W_\ell=\hbar\omega_\ell\left(n_\ell+\dfrac{1}{2}\right)}$ $n_\ell=0,1,2,\ldots$

  unde, acum pulsația: $\omega_\ell=c|\vec{k}_\ell|$

  cu $\omega=2\pi\nu$ și $k=2\pi/\lambda\Rightarrow\nu\lambda=c$
- Valoarea întreagă n_ℓ reprezintă numărul de fotoni din modul de oscilație ℓ.

Cuantificarea câmpului EM (cont)

- Am obținut deci ec. pt. $\vec{A}(\vec{k},t)$: $-\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)\vec{A}(\vec{k},t)=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}(\vec{k},t)}{\partial t^2}$
- Aceasta însă este ec. de oscilator armonic clasic pt. x: $-\kappa x=m\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}$

  unde $\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)$ este înlocuit prin κ, iar $1/c^2$ prin m.
- Deci *oscilațiile electromagnetice staționare $\longrightarrow$ oscilații armonice*.

  Pe de altă parte, energiile oscilatorului armonic sunt cuantificate: $W=\hbar\omega\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad n=0,1,2,\ldots$

  unde: $\omega_n=\sqrt{\kappa/m}$
- Revenind la oscilațiile câmpului electromagnetic, acestea pot avea doar energii cu valori cuantificate: $\boxed{W_\ell=\hbar\omega_\ell\left(n_\ell+\dfrac{1}{2}\right)}$ $\quad n_\ell=0,1,2,\ldots$

  unde, acum pulsația: $\omega_\ell=c|\vec{k}_\ell|$

  cu $\omega=2\pi\nu$ și $k=2\pi/\lambda \Rightarrow \nu\lambda=c$
- Valoarea întreagă n_ℓ reprezintă numărul de fotoni din modul de oscilație ℓ.

Cuantificarea câmpului EM (cont)

- Am obținut deci ec. pt. $\vec{A}(\vec{k},t)$: $-\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)\vec{A}(\vec{k},t)=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}(\vec{k},t)}{\partial t^2}$
- Aceasta însă este ec. de oscilator armonic clasic pt. x: $-\kappa x=m\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}$

  unde $\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)$ este înlocuit prin κ, iar $1/c^2$ prin m.
- Deci *oscilațiile electromagnetice staționare $\longrightarrow$ oscilații armonice*.

  Pe de altă parte, energiile oscilatorului armonic sunt cuantificate: $W=\hbar\omega\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad n=0,1,2,\ldots$

  unde: $\omega_n=\sqrt{\kappa/m}$
- Revenind la oscilațiile câmpului electromagnetic, acestea pot avea doar energii cu valori cuantificate: $\boxed{W_\ell=\hbar\omega_\ell\left(n_\ell+\dfrac{1}{2}\right)}$ $\quad n_\ell=0,1,2,\ldots$

  unde, acum pulsația: $\omega_\ell=c|\vec{k}_\ell|$

  cu $\omega=2\pi\nu$ și $k=2\pi/\lambda \Rightarrow \nu\lambda=c$
- Valoarea întreagă n_ℓ reprezintă numărul de fotoni din modul de oscilație ℓ.

Cuantificarea câmpului EM (cont)

- Am obținut deci ec. pt. $\vec{A}(\vec{k},t)$: $-\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)\vec{A}(\vec{k},t)=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}(\vec{k},t)}{\partial t^2}$
- Aceasta însă este ec. de oscilator armonic clasic pt. x: $-\kappa x = m\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}$

  unde $\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)$ este înlocuit prin κ, iar $1/c^2$ prin m.
- Deci *oscilațiile electromagnetice staționare $\longrightarrow$ oscilații armonice*.

  Pe de altă parte, energiile oscilatorului armonic sunt cuantificate: $W = \hbar\omega\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

  unde: $\omega_n = \sqrt{\kappa/m}$
- Revenind la oscilațiile câmpului electromagnetic, acestea pot avea doar energii cu valori cuantificate: $\boxed{W_\ell = \hbar\omega_\ell\left(n_\ell+\dfrac{1}{2}\right)}$ $\quad n_\ell = 0, 1, 2, \ldots$

  unde, acum pulsația: $\omega_\ell = c|\vec{k}_\ell|$

  cu $\omega = 2\pi\nu$ și $k = 2\pi/\lambda \Rightarrow \nu\lambda = c$
- Valoarea întreagă n_ℓ reprezintă numărul de fotoni din modul de oscilație ℓ.