9.6 4-Vectori Covarianţi şi Contravarianţi şi forme diferenţiale

- **vector contravariant** (matrice coloană) $\boxed{x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}}$

  Dar produsul scalar nu se poate scrie doar prin componente contravariante. Acesta ar trebui să fie similar (9.9), adică $x \cdot y = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \equiv x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$

- Prin componentele spaţiale cu semn minus, introducem un nou tip de 4-vector,
- **vector covariant** (matrice linie) $\boxed{x_\mu = (x_0 \;\; x_1 \;\; x_2 \;\; x_3) \equiv (ct \;\; -x \;\; -y \;\; -z) \equiv (x_0 \;\; -\vec{x})}$

Produsul scalar se va exprima: $x \cdot y = x_\mu y^\mu = x_0 y^0 - x_1 y^1 - x_2 y^2 - x_3 y^3$
ca produsul între vectorul covariant (matrice linie) şi vectorul contravariant (matrice coloană)

- Dacă folosim versorii spaţiali: e_1, e_2, e_3, şi versorul temporal: e_0,
  4-vectorii de poziţie se scriu: $x = e_\mu x^\mu \quad y = e_\nu y^\nu$

  iar *produsul scalar* se va scrie:
$$x \cdot y = \underbrace{e_\mu e_\nu}_{g_{\mu\nu}} x^\mu y^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \tag{9.15}$$

- Aici am introdus *tensorul (metric)* $g_{\mu\nu}$, definit prin
$$g_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{9.16}$$
- similar: $g^{\mu\nu} = e^\mu e^\nu = g_{\mu\nu}$.

- **4-vector de poziţie:**
$$\begin{cases} x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \\ x_\mu = \begin{pmatrix} ct & -x & -y & -z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} ct & -\vec{x} \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{9.17}$$

Exemplu: intervalul 4-dim.
$$\boxed{ds^2 = dx_\mu dx^\mu \equiv c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \tag{9.18}$$

- **derivata 4-vector de poziţie:**
$$\begin{cases} \partial^\mu \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ -\partial_x \\ -\partial_y \\ -\partial_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \\ \partial_\mu \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t & \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t & \vec{\nabla} \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{9.19}$$

Exemplu: $\partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu \equiv \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = \Box^2$ unde $\vec{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial x^1}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial x^2}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial x^3}\vec{k}$

- **4-vector energie-impuls**: $$\begin{cases} p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} & \mu=0,1,2,3 \\ p_\mu = \begin{pmatrix} E/c & -p_x & -p_y & -p_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E/c & -\vec{p} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{9.20}$$

Exemplu: Relaţia masă-energie $$\boxed{p_\mu p^\mu \equiv \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2} \tag{9.21}$$

- **4-vector potenţial**: $$\begin{cases} A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi/c \\ \vec{A} \end{pmatrix} & \mu=0,1,2,3 \\ A_\mu = \begin{pmatrix} \phi/c & -A_x & -A_y & -A_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi/c & -\vec{A} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{9.22}$$

Exemplu: Transformarea de calibrare Lorenz $$\boxed{\partial_\mu A^\mu \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0} \tag{9.23}$$

- **4-vector curent**: $$\begin{cases} j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} & \mu=0,1,2,3 \\ j_\mu = \begin{pmatrix} c\rho & -j_x & -j_y & -j_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c\rho & -\vec{j} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{9.24}$$

Exemplu: Ecuaţia de continuitate
(conservare curent) $$\boxed{\partial_\mu j^\mu \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0} \tag{9.25}$$

9.6.1 Transformarea Lorentz a 4-vectorilor

- Pentru produsul scalar e nevoie coborârea (ridicarea) indicilor, încât: $$\boldsymbol{x \cdot y = x_\mu y^\mu}$$ indice (pt.o coloană)
indice (pt.o linie)

- Coborârea (ridicarea) indicilor se realizează cu tensorul metric $g_{\mu\nu}$ ($g^{\mu\nu}$): $$\boldsymbol{g_{\mu\nu} x^\nu = e_\mu e_\nu x^\nu = e_\mu x \equiv x_\mu}$$ (linia $\leftrightarrow$ coloană)

Astfel,
$$\boldsymbol{x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu} \quad \text{respectiv} \quad \boldsymbol{x^\mu = x_\nu\, g^{\nu\mu}} \tag{9.26}$$
indice (pt.o coloană)
indice (pt.o linie)

- Un 4-vector x, scris atât în vechea bază, cât şi în noua bază este: $$\boldsymbol{x = e_\nu\, x^\nu}$$ $$\boldsymbol{x = e'_\mu\, x'^\mu = e'_\mu\, \Lambda^\mu_{\ \nu}\, x^\nu}$$ indice (pt.o coloană)
indice (pt.o linie)

Prin identificare avem, $$e_\nu = e'_\mu \Lambda^\mu_{\ \nu} \qquad \text{şi invers} \qquad e'_\mu = e_\nu \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu_{\ \mu} \tag{9.27}$$