Fizica - nimic mai simplu

12 - Ecuațiile Maxwell pentru potențiale (câmpuri nestaționare)

M. Penția

IFIN-HH, Departament Fizică Nucleară,
P.O.Box MG-6, 077125, București-Măgurele, ROMANIA.
e-mail: pentia@nipne.ro

23 Iulie 2015

Partea XII

Ecuațiile Maxwell pentru potențiale (câmpuri nestaționare)

Exprimarea câmpurilor nestaționare prin potențiale

- Ecuațiile Maxwell pentru câmpurile nestaționare sunt,

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} & (a) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \qquad (1)$$

- Câmpul magnetic de divergență zero (1.c) se poate scrie ca rotorul unui câmp vectorial $\vec{A}$: $\longrightarrow$ $\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$ (2)
- Inlocuind în (1.b), avem,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)}{\partial t} \quad \text{sau} \quad \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

- Pe de altă parte, un câmp de rotor nul se poate scrie ca gradient de ϕ,

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi \quad \text{sau} \quad \boxed{\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi} \qquad (3)$$

Deci, câmpul electric are două surse posibile, una de câmp electric staționar, dată de $-\vec{\nabla}\phi$ și una indusă magnetic, dată de $\partial \vec{A}/\partial t$.

Ecuațiile Maxwell exprimate prin potențiale

- Inlocuind în ecuația Maxwell (1.a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, câmpul electric nestaționar (3) exprimat prin potențiale: $\vec{E} = -\partial \vec{A}/\partial t - \vec{\nabla}\phi$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \boxed{-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \vec{\nabla}^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \tag{4}$$

- Similar, exprimăm prin potențiale și a patra ecuație Maxwell (1.d), unde înlocuim câmpul magnetic nestaționar $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ (2)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

precum și câmpul electric nestaționar $\vec{E} = -\partial \vec{A}/\partial t - \vec{\nabla}\phi$ (3)

adică,
$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

- obținem
$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla}\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

sau
$$\boxed{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} + \vec{\nabla}\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = \mu_0 \vec{j}} \tag{5}$$

Deci, pornind de la ec. Maxwell (1) obținem sistemul de ecuații diferențiale de ordin 2 cuplate (4-5) pt. potențialele scalar ϕ și vector $\vec{A}$.

Ecuațiile Maxwell pentru potențiale - cazuri particulare

- Calibrarea Coulomb - Ecuație potențial ϕ

- Calibrarea Lorenz - Ecuație potențial ϕ
  Calibrarea Lorenz - Ecuație potențial $\vec{A}$

- **Notă importantă:** Când se va trece la cuantificarea câmpurilor, potențialele joacă rolul *funcțiilor de undă* din mecanica cuantică.

Calibrarea Coulomb - Ecuație potențial ϕ

- Pentru a separa și rezolva partea de potențial scalar ϕ din ecuația Maxwell pentru potențiale (4),

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\vec{\nabla}^2\phi=\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad (4)$$

se alege $\vec{A}$ astfel încât scalarul dintre paranteze să se anuleze,

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0} \text{ sau } \partial_i A^i=0 \qquad (6)$$

care definește *calibrarea Coulomb*.

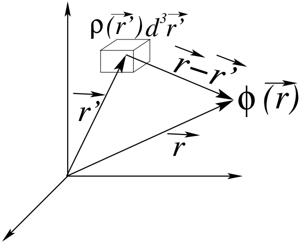
- Atunci, ecuația potențialului scalar ϕ din cazul nestaționar, după o *calibrare Coulomb*, e identică cu cea din cazul staționar,

$$\boxed{\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\epsilon_0}} \qquad (7)$$

care este o ecuație de tip Poisson.

- Deci, soluția de *potențial scalar* pentru câmpuri nestaționare, este identică cu cea din cazul staționar, dată doar de distribuția de sarcină,

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r'},t)}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\,d^3\vec{r'}$$



Observații legate de calibrarea Coulomb

- Rezultatul obținut anterior descrie o acțiune la distanță. O schimbare a densității de sarcină $\rho(\vec{r'}, t)$ în punctul $\vec{r'}$, implică o schimbare simultană a potențialului ϕ la distanța $|\vec{r} - \vec{r'}|$, deoarece prin *calibrarea Coulomb*, în ecuația Maxwell pentru potențiale s-a eliminat dependența de timp, prin potențialul vector $\vec{A}$.
- In cazul dependenței de timp,
$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi \tag{3}$$
avem două componente ale câmpului electric, una care derivă din potențialul scalar și alta care derivă din potențialul vector. Dacă potențialul scalar ϕ (ce nu depinde de timp) răspunde imediat schimbării densității de sarcină, asta nu înseamnă că și câmpul electric trebuie să răspundă imediat acestei schimbări.
- De fapt, schimbarea datorată componentei $\vec{\nabla}\phi$ a câmpului electric (3) este compensată de o schimbare egală și de semn opus a componentei $\partial\vec{A}/\partial t$, astfel că pe ansamblu câmpul electric rămâne neschimbat. Echilibrul se păstrează atâta timp cât îi trebuie luminii să ajungă de la sarcinile electrice la regiunea în cauză.
- Calibrarea Coulomb este utilă doar pt. câmpuri staționare.

Calibrarea Lorenz - Ecuația potențial $\vec{A}$

- Facem separarea funcțiilor de potențial ϕ și $\vec{A}$ în ecuațiile Maxwell pentru potențiale (4), (5). La început, în ecuația (5)

$$\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = \mu_0\vec{j} \tag{5}$$

- Calibrăm $\vec{A}$ astfel încât scalarul dintre paranteze să se anuleze, adică

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}} \text{ sau } \partial_\mu A^\mu = 0 \tag{8}$$

relație ce definește *transformarea de calibrare Lorenz*.

- Atunci ecuația (5) devine *ecuația Maxwell pentru potențialul vector* $\vec{A}$

$$\boxed{\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{j}} \tag{9}$$

- In vid ($\vec{j} = 0$), aceasta devine ecuația de propagare a potențialului vector $\vec{A}$ sub formă de unde, cu viteza luminii ($\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$),

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{A} = 0 \tag{10}$$

Calibrarea Lorenz - Ecuația potențial ϕ

- Inlocuind transformarea de calibrare Lorenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$ (8)

  în cealaltă ec.Maxwell (4) pt. potențiale $-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (4)

  obținem,
  $$\boxed{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \tag{11}$$
  adică, *ecuația Maxwell pentru potențialul scalar* ϕ în funcție de $\vec{r}$ și t.
- In vid ($\rho = 0$), aceasta devine ecuația de propagare a potențialului scalar ϕ sub formă de unde, cu viteza luminii ($\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$),
  $$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0 \tag{12}$$
- Faptul că partea $\partial \vec{A}/\partial t$ a câmpului electric $\vec{E} = -\partial \vec{A}/\partial t - \vec{\nabla} \phi$ diferă când se trece de la calibrarea Coulomb la cea Lorenz, sugerează ideea că separarea câmpului electric în componenta indusă electric (sarcini) și componenta indusă magnetic, nu este unică în cazul general de variație temporală. Adică această separare este doar o convenție.