

ProQED

Câmpuri Clasice

M. Penția

IFIN-HH, Departament Fizică Nucleară,
P.O.Box MG-6, 077125, București-Măgurele, ROMANIA.
e-mail: pentia@nipne.ro

October 29, 2020

Partea III

Mecanica Lagrangiană

Ecuatii de mișcare în mecanica clasică (oscilator armonic)

- ▶ Conform Newton $F = m\ddot{x}$. Un corp de masă m , sub acțiunea forței elastice $F(x) = -kx$, are ec. de mișcare
$$-kx = m\ddot{x} \quad (1)$$

- ▶ Lagrangian-ul ca funcție de x și \dot{x} :
$$L(x, \dot{x}) = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -kx; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

- ▶ Pentru a exprima ec. (1), scriem și $m\ddot{x}$ prin L : $m\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)$, obținem

Ecuatia de mișcare
Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \quad (2)$$

- ▶ Hamiltonian-ul ca funcție de x și p :
$$H(x, p) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} = kx; \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

- ▶ Pentru a exprima ec. (1), scriem $kx = -m\ddot{x} = -\dot{p}$ și $\frac{p}{m} = \dot{x}$, obținem

Ecuatiile de mișcare
Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x} \quad (3)$$

- ▶ Prin integrarea ecuației de mișcare (1) se obține "traectoria" $x = x(t)$ a particulei. In cazul de față, *mișcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0 [\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)] \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4)$$

Funcțională și Derivata funcțională

- ▶ Dacă o funcție $f(x)$ dă o valoare numerică f pentru o valoare de intrare x , o funcțională $F[f]$, este sub forma integralei: $F[f] = \int_a^b L[x, f(x), f'(x)] dx$ (5)
ex. timp, lungime, acțiune, etc. adică o val. numerică pt. o traiectorie $f(x)$.

- ▶ Pentru a defini derivata funcțională $\frac{\delta F}{\delta f}$, introducem variația $\delta f(x)$ locală a traiectoriei de integrare (ce duce la o variație numerică δF). Noul integrand $L[x, f + \delta f, f' + \delta f']$, duce la variația

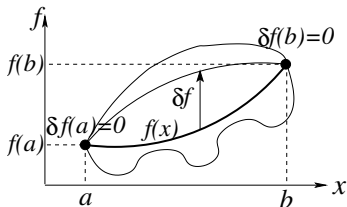
$$\delta F = \int_a^b \delta L dx = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f} \delta f + \frac{\partial L}{\partial f'} \delta f' \right) dx$$

- ▶ Cu $\delta \leftrightarrow \frac{d}{dx}$ și integrarea prin părți $\int u dv = uv - \int v du$ a termenului doi

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial f'} \delta f' dx = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f'} \frac{d\delta f}{dx} dx = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial f'} \delta f \Big|_a^b}_{\delta f(a) = \delta f(b) = 0} - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial f'} \right) \delta f dx$$

- ▶ Deci, $\delta F = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial f'} \right) \right] \delta f dx$, atunci folosind (5), avem

- ▶ Derivata funcțională: $\frac{\delta F}{\delta f} = \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right)$ sau $\frac{\delta F}{\delta f} = \frac{\partial F}{\partial f} - \nabla \left(\frac{\partial F}{\partial \nabla f} \right)$ (6)



Principiul minimei acțiuni - Ecuațiile Euler-Lagrange

► Dinamica unui sistem mecanic, e dată de Lagrangian: $L(q^i, \dot{q}^i, t) = T - V$ cu T -energ.cin. V -energ.pot. $q^i(t)$ - coord. gen. ($i=1, n$ gr. libertate)

► "Traiectoria" $q(t)$ căutată, este cea de minimă acțiune S_{min} : $\delta S = 0$

► Acțiunea: $S(q) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t) dt$ (7)

$q^i(t)$ coord. și $\dot{q}^i(t) \equiv dq^i/dt$ viteza particulei i

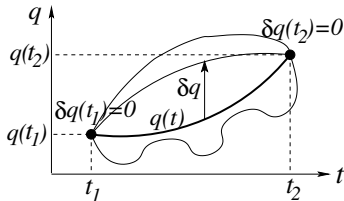
► Variația δS cu $\delta q^i, \delta \dot{q}^i$, pt. $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i(t) \right) dt = 0 \quad (8)$$

► Cu $\delta \leftrightarrow \frac{d}{dt}$ și integrarea prin părți $\int u dv = uv - \int v du$ a termenului doi

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{d\delta q^i(t)}{dt} dt = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i}_{\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \delta q^i dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0} \quad (i=1, \dots, n) \quad (9)$$



Acestea sunt *ecuațiile Euler-Lagrange*, un sistem de n -ecuații diferențiale cuplate de ordin 2, cu $2n$ var. indep. q^i, \dot{q}^i , și $2n$ cond. inițiale $q^i(t=0), \dot{q}^i(t=0)$, într-un spațiu n -dim (spațiul configurațiilor). Soluția este *ecuația de mișcare* $q^i(t)$ a sistemului mecanic.

Descriere Lagrange și Hamilton

- Dinamica unui sistem discret descrisă de Lagrangian $L(q, \dot{q}, t) = T - V$

Ecuțiile (9) Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0$ Impulsul conjugat $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q^i} = \dot{p}_i$

► $\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^i} \dot{q}^i}_{\text{din Ec. E-L}} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right)$ dacă L nu dep. explicit de t

$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L \right) = 0 \Rightarrow$ conserv. energ. $H = \sum p_i \dot{q}^i - L = \text{const.}$

- Dinamica descrisă prin Hamiltonian: $H(q, p) = T + V = \sum p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q})$

► $dH = \sum_i \left(dp_i \dot{q}^i + p_i d\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i \right) = \sum_i (dp_i \dot{q}^i - \dot{p}_i dq^i)$

Ecuțiile Hamilton $\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\dot{p}_i \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i \quad (i=1, \dots, n) \quad (10)$

Ecuțiile Hamilton - sistem $2n$ -ecuații diferențiale cuplate de ordin 1, cu $2n$ var. indep. q^i, p_i și $2n$ cond. inițiale $q^i(t=0), p_i(t=0)$, într-un spațiu cu $2n$ -dim (spațiul fazelor).

- Descrierile Newton \rightarrow Lagrange \rightarrow Hamilton echivalente, conduc la aceleași rezultate. Diferențele constau în evidențierea diverselor proprietăți mecanice: simetrii, invarianțe sau flexibilitate la transformări de coordonate.

Oscilator armonic - ecuația de mișcare Euler-Lagrange

- ▶ Căutăm ecuația de mișcare a unei particule de masă m supusă acțiunii unei forțe elastice 1-dimensionale: $F(x) = -kx$?
- ▶ In mecanica Newton $F = m\ddot{x}$, iar ec. de mișcare este $-kx = m\ddot{x}$ (11)
- ▶ Acum, Lagrangian-ul: $L = T - V$, iar $q \equiv x$,

$$\text{unde } T = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad \text{iar} \quad V = -\int F(x) dx = \frac{kx^2}{2}$$

$$\text{Adică, } L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \implies \frac{\partial L}{\partial x} = -kx ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (12)$$

- ▶ Final, ecuația de mișcare Euler-Lagrange (9) $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0$ este, pt. oscilatorul armonic: $-kx - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0$ adică, $-kx = m\ddot{x}$, la fel ca în mecanica newtoniană (11).
- ▶ Prin integrarea ecuației de mișcare se obține "traectoria" $x = x(t)$ a particulei. In cazul de față, *mișcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0 \exp(\pm i \omega t) \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (13)$$

Forța Lorentz exprimată prin potențiale

- ▶ Asupra unei particule cu sarcină electrică q , aflată în câmp electric \vec{E} și câmp magnetic \vec{B} , acționează *forța Lorentz*:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (14)$$

- ▶ Legătura între \vec{E} și \vec{B} cu potențialele scalar φ și vectorial \vec{A} este dată de (vezi Ec. Maxwell pt. potențiale):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (15)$$

- ▶ Inlocuind (15) în (14), obținem:

$$\vec{F} = q \left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right)$$

- ▶ Dezvoltarea triplului produs vectorial

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

conduce la expresia forței Lorentz: $\vec{F} = q \left(-\vec{\nabla}\varphi - \underbrace{\left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \right]}_{\text{derivata materială}} + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) \right)$

dar
$$\frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{x}, t) + \sum_j \frac{dx_j}{dt} \frac{\partial}{\partial x_j} \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

- ▶ In final, expresia forței Lorentz este:

$$\vec{F} = q \left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) \right) \quad (16)$$

Lagrangian și Hamiltonian pt. particulă în câmp E și M

- ▶ Pt. ec. de mișcare a unei particule de sarcină q aflată în câmp Electric și Magnetic staționar, căutăm Lagrangian-ul și Hamiltonian-ul corespunzător.

- ▶ Pentru mișcarea unidimensională: $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ iar $V = -\int F(x) dx$

- ▶ Forța Lorentz (16) $F(x)$, independentă de timp: $\vec{F} = q(-\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}))$

$$dL_{mec} = F \cdot dx = -q \frac{d\varphi}{dx} dx + q \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{A})}{dx} dx = -q d\varphi + q d(\vec{v} \cdot \vec{A})$$

Deci, în final, energia potențială este: $V = -\int F(x) dx = q\varphi - q\dot{x}A$ (17)

- ▶ Lagrangian-ul: $L = T - V = \frac{m\dot{x}^2}{2} - q\varphi + q\dot{x}A$ iar $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA$ (18)

- ▶ Hamiltonian-ul: $H = p\dot{x} - L = (m\dot{x} + qA)\dot{x} - \frac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi - q\dot{x}A = \frac{m\dot{x}^2}{2} + q\varphi$

- ▶ Inlocuind $\dot{x} \rightarrow p$ din (18) $\dot{x} = \frac{p - qA}{m}$ obținem $H = \frac{(p - qA)^2}{2m} + q\varphi$

- ▶ In absența câmpului EM: $H = \frac{p^2}{2m}$

- ▶ Contribuția câmpului magnetic se traduce prin înlocuirea: $p \rightarrow (p - qA)$.

Oscilator armonic - ecuația de mișcare Hamilton

- ▶ Ecuația de mișcare (11) $-kx = m\ddot{x}$ se poate obține pornind și de la

hamiltonian-ul

$$H(x, p) = T(p) + V(x) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (19)$$

unde $p = m\dot{x}$.

- ▶ Folosind ecuațiile Hamilton (10) $\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p}$; $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}$
obținem $kx = -\dot{p}$; $\frac{p}{m} = \dot{x}$

- ▶ Din ultima expresie avem $\dot{p} = m\ddot{x}$ și introducând în prima, obținem ecuația de mișcare căutată: $-kx = m\ddot{x}$, la fel ca în mecanica newtoniană (11).

- ▶ La fel, prin integrarea ecuației de mișcare se obține "traectoria" $x=x(t)$ a particulei. In cazul de față, *mișcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0 \exp(\pm i \omega t) \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (20)$$

Partea IV

Câmpuri Clasice

Trecerea de la Mecanica Clasică la Câmpuri Clasice

- In teoria câmpurilor clasice coordonatele spațiale și timpul nu se mai folosesc ca variabile de mișcare. Ele nu mai descriu mișcarea particulei, ca $x^i(t)$ de exemplu, ci sunt variabile complet independente, ce caracterizează sau etichetează câmpul în diversele puncte din spațiu-timp. Variabila independentă t din mecanică este înlocuită prin 4-coordonata x^μ . Singurele marimi care variază sunt valorile de câmp la trecerea de la un punct la altul sau de la un moment la altul. Acum avem dependența valorilor de câmp $\varphi^r(x^\mu)$ de coordonata 4-dim $x^\mu = (t, \vec{x})$. Pt. a obține ec. de mișcare (Euler-Lagrange sau Hamilton) de câmp clasice, înlocuim:

Mărimă fizică	Mecanica clasică	Câmpuri clasice
Coord. generalizate	q^i	$\varphi^r(\vec{x}, t)$ (21)
Viteze generalizate	$\dot{q}^i \equiv \frac{dq^i}{dt}$	$\partial_\mu \varphi^r \equiv \frac{\partial \varphi^r}{\partial x^\mu}$ (22)
Lagrangian	$L(q^i, \dot{q}^i)$	$L(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r) = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r)$ (23)
Impulsul conjugat	$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$	$\pi_r^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^r)}$ (24)
Acțiunea S	$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i, \dot{q}^i)$	$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r)$ (25)
Variația $\delta S = 0$ da ec. de mișcare Euler-Lagrange	$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0$	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^r)} \right) = 0$ (26)
Hamiltonian	$H(q^i, p_i) = p_i \dot{q}^i - L$	$\mathcal{H}(\varphi^r, \pi_r) = \pi_r^\mu \partial_\mu \varphi^r - \mathcal{L}$ (27)
Ecuatii de mișcare Hamilton	$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} ; \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$	$\partial_\mu \pi_r^\mu = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi^r} ; \partial_\mu \varphi^r = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_r^\mu}$ (28)

Lagrangian de câmpuri clasice

- Lagrangianul $L(\varphi, \dot{\varphi})$ de câmpuri clasice este o funcțională de φ și $\dot{\varphi}$: $L(t) = L[\varphi(\vec{x}, t), \dot{\varphi}(\vec{x}, t)]$ (29)

Scris prin densit. de Lagrangian: $L(t) = \int d^3\vec{x} \mathcal{L}[\varphi(\vec{x}, t), \nabla\varphi(\vec{x}, t), \dot{\varphi}(\vec{x}, t)]$ (30)

- L nu depinde explicit de \vec{x} (e integrală după $d^3\vec{x}$), însă prin \mathcal{L} e funcție locală de \vec{x} .

Pentru derivata funcțională putem scrie variația } $\delta L(t) = \int d^3\vec{x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta\varphi + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} \delta(\partial_i \varphi)}_{\partial_i(\delta\varphi) = dv} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta\dot{\varphi} \right]$

- Cu $\delta \leftrightarrow \partial_i$ și integrarea prin părți: $\int u dv = uv|_{\text{margină}} - \int v du$ a termenului spațial, ținând cont că la margine câmpul și derivatele se anulează, avem:

$$\int d^3\vec{x} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)}}_u \underbrace{\delta(\partial_i \varphi)}_{\partial_i(\delta\varphi) = dv} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} \delta\varphi}_{=0} \Big|_{\text{margină}} - \int d^3\vec{x} \delta\varphi \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} \right)$$

- Deci, $\delta L(t) = \int d^3\vec{x} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} \right) \right) \delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta\dot{\varphi} \right]$, iar cu integrarea (30) avem,

- derivata funcțională a } $\frac{\delta L}{\delta \varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \varphi)} \right)$; $\frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$ (31)
- L , la fel ca (6), este:

Ecuatiile Euler-Lagrange pentru câmpuri clasice

- Pentru a obține ecuațiile de câmp clasice, folosim acțiunea (25)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r, t) = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r, t) \quad (25)$$

- Evaluăm variația δS , similar cu δF din derivata funcțională (6):

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^r} \delta \varphi^r + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^r)}}_u \underbrace{\delta (\partial_\mu \varphi^r)}_{\partial_\mu (\delta \varphi^r) = dv} \right) \quad (32)$$

Obs: Sumarea după i din mecanică, s-a înlocuit cu integrala după d^3x . În plus, se cere anularea câmpurilor și a derivatelor la infinit.

- Cu integrarea prin părți $\int u dv = u v - \int v du$ în ultimul termen din (32), folosind condiția de minim $\delta S = 0$ și $\delta (\partial_\mu \varphi^r) = \partial_\mu (\delta \varphi^r)$,

$$\text{avem, similar cu } \delta F: \quad 0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^r)} \right) \right] \delta \varphi^r \quad (33)$$

- La variații $\delta \varphi^r$ arbitrare \Rightarrow *ecuațiile Euler-Lagrange pentru câmpuri*

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^r)} \right) = 0} \text{ sau } \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^r} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi^r / \partial t)} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi^r)} \right) = 0} \quad (34)$$

Lagrangian și ecuațiile de câmp clasic Schrödinger

- Pentru a explicita ecuația E-L de mișcare (26) (ecuația de câmp)
- $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi)} \right) = 0 \quad (26)$$

- Avem Lagrangian-ul \mathcal{L} de câmp Schrödinger de forma

$$\mathcal{L} = i\hbar\psi^*\dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi - V\psi^*\psi \quad (35)$$

- Prin variația $\delta\psi^*$ avem: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = i\hbar\dot{\psi} - V\psi$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = 0$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla\psi^*)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi$

- Ecuația (26) de câmp Schrödinger real ψ

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi \quad \text{cu sol. reală:} \quad \psi(\mathbf{x}, t) = \alpha e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \quad (36)$$

formal identică cu ecuația de stare Schrödinger din Mecanica Cuantică (NRQM).

- Prin variația $\delta\psi$ avem: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -V\psi^*$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\hbar\psi^*$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla\psi)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*$

- Ecuația (26) de câmp Schrödinger complex

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + V\psi^* \quad \text{cu sol. complexă:} \quad \psi^*(\mathbf{x}, t) = \alpha^* e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$$

- In Mecanica Cuantică e utilizată doar soluția Schrödinger reală $\psi(\vec{x}, t)$.

Lagrangian și ecuațiile de câmp Klein-Gordon real

► Pentru a explicita ecuația E-L de mișcare (34) (ecuația de câmp)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi)} \right) = 0 \quad (34)$$

► Lagrangian-ul de câmp K-G

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\dot{\varphi}^2 - (\nabla \varphi)^2 - m^2 \varphi^2] \quad \text{sau} \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) \quad (37)$$

► Prin variația $\delta \varphi$ avem:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi)} = -\nabla \varphi$$

► Adică, ecuația (34) de câmp K-G este

$$\boxed{(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2) \varphi = 0} \quad \text{sau} \quad \boxed{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi = 0} \quad (38)$$

formal identică cu *ecuația de stare* K-G din Mecanica Cuantică (RQM).

Lagrangian și ecuații de câmp Klein-Gordon complex

- ▶ Lagrangian-ul K-G complex transcris după cel real (37):
$$\mathcal{L} = \dot{\varphi}^* \dot{\varphi} - \nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi - m^2 \varphi^* \varphi \equiv \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi \quad (39)$$

- ▶ Inlocuind în Ec. E-L pt. cele 2 câmpuri:
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^r} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^r} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi^r)} = 0 \quad (40)$$

- ▶ Avem,
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi^* ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}^* ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi)} = -\nabla \varphi^* \implies \boxed{(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2) \varphi^* = 0}$$

Ec. K-G pt. câmp complex

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} = -m^2 \varphi ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = \dot{\varphi} ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi^*)} = -\nabla \varphi \implies \boxed{(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2) \varphi = 0}$$

Ec. K-G pt. câmp real

- ▶ Soluțiile de câmp (scalar) Klein-Gordon real $\varphi(\vec{x}, t)$ și imaginar $\varphi^*(\vec{x}, t)$:
$$\varphi(\vec{x}, t) = \alpha(\vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad \varphi^*(\vec{x}, t) = \alpha^*(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (\text{absentă în NRQM}) \quad (41)$$

- ▶ - soluția pentru $E = \hbar \omega > 0$ (particule) este: $\varphi(\vec{x}, t) = \alpha(\vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$
- soluția pentru $E < 0$ (antiparticule) este: $\varphi^*(\vec{x}, t) = \alpha^*(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$

Pauli și Weisskopf (Helv.Phys.Acta 7,709 (1934)) au arătat că ec. K-G descrie partic. de spin 0. Ec. Dirac și Proca descriu partic. de spin 1/2 resp. spin 1.

Diferența între stări și câmpuri

- ▶ Ecuația de bază a RQM pentru stările relativiste Klein-Gordon (34) este aceeași cu cea din QFT pentru câmpurile relativiste (38).

Lagrangian și ecuațiile de câmp Dirac clasic (spin 1/2)

► Lagrangian-ul pentru un câmp spinorial ψ :
$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (42)$$

► Ecuația de mișcare Euler-Lagrange (34) este
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right) = 0 \quad (34)$$

ψ și $\bar{\psi}$ sunt variabile dinamice independente, iar ec. Euler-Lagrange (34) pentru $\delta\bar{\psi}$ este:
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right) = 0 \quad (43)$$

avem
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi \quad ; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = 0 \quad (44)$$

► Din ec. Euler-Lagrange (34) pt. $\delta\bar{\psi}$ }
obținem ecuația Dirac pentru ψ :
$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0 \quad (45)$$

► Din ec. Euler-Lagrange (34) pt. $\delta\psi$ }
obținem ec. Dirac adjunctă pt. $\bar{\psi}$:
$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \quad (46)$$

► Soluția pentru $E > 0$ (particule) este: $\psi(\vec{x}, t) = u(\vec{p}) e^{-i p \cdot x}$
Soluția pentru $E < 0$ (antiparticule) e: $\bar{\psi}(\vec{x}, t) = v(\vec{p}) e^{+i p \cdot x}$

► Spinorii:
$$u^{(1,2)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix}; \quad v^{(1,2)} = N \begin{pmatrix} -\frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{|E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{|E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lagrangian de câmp electromagnetic (Maxwell)

► Ecuațiile Maxwell:
$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & (a) & \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (c) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (b) & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \quad (47)$$

► Câmpurile \vec{E} și \vec{B} sunt date de potențialele scalar φ și vector \vec{A} :
$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases} \quad (48)$$

► De data asta căutăm ecuațiile de câmp EM (Maxwell) (47) cu ajutorul ecuațiilor Euler-Lagrange (34). Pentru aceasta avem nevoie de

► Densitatea de Lagrangian pt. câmpul EM este:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 - \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \rho \varphi + \vec{J} \cdot \vec{A} \quad (49)$$

► \mathcal{L} conține termenii: (1) - *densit. de energie* din câmpul EM, (2) - *densit. de energia* dată de interacția *densit. de sarcină* ρ cu *potențial scalar* φ și (3) - *densit. de energie* dată de interacția *densit. de curent* \vec{J} cu *potențial vector* \vec{A} (vezi "particulă în câmp EM" din Mecanica-Clasica).

Ecuțiile de câmp electromagnetic (Maxwell (a))

- ▶ Ecuțiile de câmp (ecuațiile de mișcare Euler-Lagrange) (34)
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} q_i)} \right) = 0 \quad (34)$$

unde variabilele independente (coordonatele) q_i de câmp de data asta sunt potențialul scalar φ și componentele de potențial vector A_x, A_y, A_z .

- ▶ Evaluăm întâi termenii pt. $q_i = \varphi$ din ec. E-L (34) cu expresia \mathcal{L} (49):

adică: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\rho$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 0$; pt. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \varphi)}$ avem $\vec{\nabla} \varphi = -\vec{E}$,

iar
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \varphi)_x} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_x} = -\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right)}{\partial E_x} = -\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) \right)}{\partial E_x} = -\epsilon_0 E_x$$

și la fel pentru componentele după y și z , atunci:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \varphi)} \right) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_x} \right) - \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_y} \right) - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_z} \right) = -\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

- ▶ Înlocuind în (34), avem:
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \varphi)} \right) = -\rho + \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

sau

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

adică am obținut l-a ecuație Maxwell (47)-(a).

Ecuțiile de câmp electromagnetic (Maxwell (d))

► Ecuțiile Euler-Lagrange (34) pentru $q_i = A_i$ ($i = x, y, z$)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} A_i)} \right) = 0 \quad (34)$$

► Densitatea de Lagrangian (49) pt. câmpul EM este:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 - \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \rho \varphi + \vec{J} \cdot \vec{A} \quad (49)$$

► Explicit, câmpurile \vec{E} și \vec{B} sunt legate de potențialele φ și \vec{A} prin (48):

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \dot{A}_x \right) \vec{i} + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \dot{A}_y \right) \vec{j} + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \dot{A}_z \right) \vec{k}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y) \vec{i} + (\partial_z A_x - \partial_x A_z) \vec{j} + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \vec{k}$$

► Pt. $A_i = A_x$, termenul din \mathcal{L} (49) ce depinde de A_x este $\vec{J} \cdot \vec{A}$, cel ce depinde de \dot{A}_x este $\epsilon_0 E^2/2$, iar cel ce depinde de $\partial_j A_x$ este $-B^2/2\mu_0$. Atunci (34) devine:

$$\frac{\partial (\vec{J} \cdot \vec{A})}{\partial A_x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial (\epsilon_0 E^2/2)}{\partial \dot{A}_x} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial (-B^2/2\mu_0)}{\partial (\partial_j A_x)} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial A_x} (J_x A_x + J_y A_y + J_z A_z) - \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \frac{\partial E^2}{2} \frac{\partial E}{\partial \dot{A}_x} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial (\partial_j A_x)} = 0$$

$$J_x + \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \right)}_{-(\vec{\nabla} \times \vec{B})_x} = 0$$

la fel pt. y și $z \Rightarrow$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ecuțiile de câmp electromagnetic (Maxwell (b)-(c))

- ▶ Celelalte două ecuații Maxwell (47) (b)-(c) se obțin imediat din expresiile (48) ale câmpurilor prin potențiale.

Pentru $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, deoarece divergență de rotor este zero, avem imediat:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \text{div}(\vec{B}) = \text{div}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \text{div rot}(\vec{A}) = 0 \quad (\text{b})$$

- ▶ Pentru $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \partial\vec{A}/\partial t$, deoarece rotor din gradient este zero, avem,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \text{rot}(\vec{E}) = -\text{rot grad}(\varphi) - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}(\vec{A}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{c})$$

Lagrangian și ecuațiile de câmp EM (Maxwell covariante)

- ▶ Lagrangian de câmp electromagnetic

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \mu_0 j^\mu A_\mu \quad (50)$$

I-ul termen este expresia 4-dim a termenului I din Lagrangian-ul (49), iar al II-lea este cea a celor doi termeni următori din (49).

- ▶ Tensorul de câmp

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}; \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \equiv \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \quad (51)$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1/c & E^2/c & E^3/c \\ -E^1/c & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2/c & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3/c & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}; \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1/c & -E^2/c & -E^3/c \\ E^1/c & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2/c & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3/c & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (52)$$

Unde, ridicarea perechilor de indici spațiali (i,j) nu schimbă de semn, în timp ce ridicarea indicilor time-space (0,j), (i,0) schimbă de semn.

$$\text{▶ } F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\overbrace{2(E_1^2 + E_2^2 + E_3^2) / c^2}^{F_{0i} F^{0i} + F_{i0} F^{i0}} + \overbrace{2(B_3^2 + B_2^2 + B_1^2)}^{F_{ij} F^{ij} + F_{ji} F^{ji}} = 2 \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right)$$

Ecuatiile Maxwell neomogene covariante

► Lagrangian-ul (50) $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \mu_0 j^\mu A_\mu$ $\begin{cases} F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \end{cases}$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= (F_{12}F^{12} + F_{21}F^{21}) + (F_{23}F^{23} + F_{32}F^{32}) + (F_{31}F^{31} + F_{13}F^{13}) \\ &+ (F_{01}F^{01} + F_{10}F^{10}) + (F_{02}F^{02} + F_{20}F^{20}) + (F_{03}F^{03} + F_{30}F^{30}) \\ &= (F_{12}F_{12} + F_{12}F_{12}) + (F_{23}F_{23} + F_{23}F_{23}) + (F_{31}F_{31} + F_{31}F_{31}) \\ &- (F_{01}F_{01} + F_{01}F_{01}) - (F_{02}F_{02} + F_{02}F_{02}) - (F_{03}F_{03} + F_{03}F_{03}) \\ &= 2 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} \right)^2 \\ &- 2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^2} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^3} \right)^2 \end{aligned}$$

► Vom deduce ecuațiile Maxwell din ecuațiile Euler-Lagrange (34):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) = 0 \quad (53)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_1 A_2)} = -\frac{4}{4} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \right) = - \underbrace{(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)}_{F_{12}} = -F_{12} = F_{21} = F^{21} = -F^{12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_1)} = +\frac{4}{4} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} \right) = + \underbrace{(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0)}_{F_{01}} = F_{01} = -F_{10} = F^{10} = -F^{01}$$

► deci $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\mu_0 j^\nu$; $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) = -\partial_\mu F^{\mu\nu} \implies \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$ (54)

Hamiltonian de câmpuri clasice

- ▶ Hamiltonianul $H[\varphi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}, t)]$ este o funcțională de φ și π :

Scris prin densit. de Hamiltonian:
$$H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}[\varphi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}, t)] \quad (55)$$

- ▶ Dacă H nu depinde de \vec{x} (e integrală după $d^3\vec{x}$), \mathcal{H} însă e funcție locală de \vec{x} .

- ▶ Variația
$$\delta H = \int d^3\vec{x} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \delta \pi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \pi)} \delta (\partial_i \pi) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial^i \varphi)} \delta (\partial^i \varphi) \right]$$

- ▶ Cu $\delta \leftrightarrow \partial_i$ și integrarea prin părți: $\int u dv = uv|_{\text{margină}} - \int v du$ a termenilor spațiali, ținând cont că la margine câmpul și derivatele se anulează, avem:

$$\int d^3\vec{x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \pi)} \delta (\partial_i \pi) = - \int d^3\vec{x} \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \pi)} \right) \delta \pi ; \quad \int d^3\vec{x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial^i \varphi)} \delta (\partial^i \varphi) = - \int d^3\vec{x} \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial^i \varphi)} \right) \delta \varphi$$

- ▶ Deci,
$$\delta H = \int d^3\vec{x} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \pi)} \right) \right) \delta \pi + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial^i \varphi)} \right) \right) \delta \varphi \right]$$

atunci, folosind integrarea (55) avem:

- ▶ derivatele functionale ale H sunt:
$$\begin{cases} \frac{\delta H}{\delta \pi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \pi)} \right) \\ \frac{\delta H}{\delta \varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial^i \varphi)} \right) \end{cases} \quad (56)$$

Ecuțiile canonice Hamilton pentru câmpuri clasice

- ▶ In descrierea de câmp, facem trecerile: $x \rightarrow \varphi(\vec{x}, t)$; $p \rightarrow \pi(\vec{x}, t)$
- ▶ impulsul p și densitatea π exprimate prin (24): $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \rightarrow \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$
- ▶ și densitatea de Hamiltonian (27): $\mathcal{H}(\varphi, \pi) = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi})$ (57)

$$\delta \mathcal{H} = \cancel{\delta \pi \dot{\varphi}} + \underbrace{\pi \delta \dot{\varphi}}_{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right)} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi}_{\pi} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi}}_{\pi} = \dot{\varphi} \delta \pi - \dot{\pi} \delta \varphi$$

unde am folosit Ecuația E-L (26): $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \dot{\pi}$

- ▶ de unde obținem ecuațiile canonice Hamilton (cu derivata funcțională): $\boxed{\dot{\varphi} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi}}$; $\boxed{\dot{\pi} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi}}$ (58)

- ▶ Cu expresiile (6) ale derivatelor funcționale, obținem *ecuațiile canonice Hamilton pentru câmpuri clasice* $\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \pi)} \right) \\ \dot{\pi} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \varphi)} \right) \end{array} \right.$ (59)

Ecuțiile covariante Hamilton pentru câmpuri clasice

- ▶ In descrierea de câmp, facem trecerile: $x^r \rightarrow \varphi^r(\vec{x}, t)$; $p_r \rightarrow \pi_r(\vec{x}, t)$
- ▶ impulsul p_r prin densitatea π_r (24): $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^r} \rightarrow \pi_r^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^r)}$
- ▶ și densit. de Hamiltonian (27): $\mathcal{H}(\varphi^r, \pi_r) = \pi_r^\mu \partial_\mu \varphi^r - \mathcal{L}(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r)$ (60)

$$\delta \mathcal{H} = \delta \pi^\mu \partial_\mu \varphi + \pi^\mu \delta(\partial_\mu \varphi) - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}}_{\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right)} \delta \varphi - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}}_{\pi^\mu} \delta(\partial_\mu \varphi) = \partial_\mu \varphi \delta \pi^\mu - \partial_\mu \pi^\mu \delta \varphi$$

unde am folosit Ecuția E-L (26): $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) = \partial_\mu \pi^\mu$

- ▶ de unde: $\boxed{\partial_\mu \varphi = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi^\mu}} \quad ; \quad \boxed{\partial_\mu \pi^\mu = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi}}$ (61)

- ▶ Cu expresiile (56) ale derivatelor funcționale, obținem *ecuațiile Hamilton pentru câmpuri clasice* $\left\{ \begin{array}{l} \partial_\mu \varphi = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi^\mu} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^\mu} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \pi^\mu)} \right) \\ \partial_\mu \pi^\mu = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \varphi)} \right) \end{array} \right.$ (62)

Hamiltonian și ecuații canonice de câmp Schrödinger clasic

► Hamiltonianul (57) exprimat prin Lagrangian: $\mathcal{H}(\psi, \pi) = \pi\dot{\psi} - \mathcal{L}$

► Cu \mathcal{L} Schrödinger (35)
$$\mathcal{L} = i\hbar\psi^*\dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi - V\psi^*\psi$$

Avem,
$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\hbar\psi^* \implies \psi^* = \frac{\pi}{i\hbar} \quad (63)$$

► Hamiltonianul de câmp Schrödinger va fi:

$$\mathcal{H} = \cancel{i\hbar\psi^*\dot{\psi}} - \cancel{i\hbar\psi^*\dot{\psi}} + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi + V\psi^*\psi = -\frac{i\hbar}{2m}\nabla\pi\cdot\nabla\psi + \frac{V}{i\hbar}\pi\psi \quad (64)$$

► Ecuațiile canonice Hamilton (ca derivata funcțională) (58)

$$\dot{\pi} = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\psi} \quad ; \quad \dot{\psi} = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\pi} \quad (65)$$

► Ecuațiile Hamilton canonice (65) de câmp Schrödinger
$$\begin{cases} \dot{\pi} = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\psi} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi} + \nabla\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\psi)}\right) = -\frac{V}{i\hbar}\pi - \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\pi \\ \dot{\psi} = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\pi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} - \nabla\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\pi)}\right) = \frac{V}{i\hbar}\psi + \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\psi \end{cases}$$

► Folosind $\pi = i\hbar\psi^*$ (63) și $\dot{\pi} = i\hbar\partial\psi^*/\partial t$ **regăsim ecuațiile Schrödinger** (36)
$$\begin{cases} -i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = V\psi^* - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* & \text{ec. Schrödinger complexă} \\ i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = V\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi & \text{ec. Schrödinger reală} \end{cases}$$

Hamiltonian și ecuații canonice de câmp Klein-Gordon clasic

▶ Hamiltonianul (57) exprimat prin Lagrangian: $\mathcal{H}(\varphi, \pi) = \pi\dot{\varphi} - \mathcal{L}$

▶ Cu \mathcal{L} Klein-Gordon (37)
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\dot{\varphi}^2 - (\nabla\varphi)^2 - m^2\varphi^2]$$

Avem,
$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\varphi} \implies \dot{\varphi} = \pi \quad (66)$$

▶ Hamiltonianul de câmp Klein-Gordon va fi:

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\varphi} - \mathcal{L} = \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 - (\nabla\varphi)^2 - m^2\varphi^2) = \frac{1}{2} (\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2) \quad (67)$$

▶ Ecuațiile de mișcare Hamiltonon
(ca derivată funcțională) (58)

$$\dot{\pi} = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\varphi} \quad ; \quad \dot{\varphi} = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\pi} \quad (68)$$

▶ Ecuațiile Hamiltonon canonice (68) de câmp Klein-Gordon
$$\begin{cases} \dot{\pi} = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\varphi} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi} + \nabla\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\varphi)}\right) = -m^2\varphi + \nabla^2\varphi \\ \dot{\varphi} = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\pi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} = \pi \end{cases}$$

▶ Folosind $\pi = \dot{\varphi}$ și $\dot{\pi} = \ddot{\varphi}$, regăsim ec. Klein Gordon (38): $\ddot{\varphi} - \nabla^2\varphi + m^2\varphi = 0$

Hamiltonian și ecuații de câmp clasic Klein-Gordon complex

- ▶ Cu ajutorul Lagrangian-ului de câmp K-G complex (39) putem scrie

Hamiltonian-ul K-G complex:

$$\mathcal{H} = \underbrace{\pi_r \dot{\varphi}^r}_{\dot{\varphi}^*} - \mathcal{L} = \underbrace{\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\varphi}}}_{\dot{\varphi}^*} \dot{\varphi} + \underbrace{\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\varphi}^*}}_{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}^* - (\dot{\varphi}^* \dot{\varphi} - \nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi - m^2 \varphi^* \varphi) = \dot{\varphi} \dot{\varphi}^* + \nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi + m^2 \varphi^* \varphi \quad (69)$$

φ și φ^* ($\pi = \delta \mathcal{L} / \delta \dot{\varphi}$ și $\pi^* = \delta \mathcal{L} / \delta \dot{\varphi}^*$) sunt câmpuri separate în sumarea după r .