Capitol 12

Câmpuri Clasice de Particule Cuantice

Trecerea de la Mecanica Cuantică la Câmpuri Clasice

Teoria Clasică a Câmpurilor face trecerea de la *funcţia de undă* (de probabilitate) ψ din Mecanica Cuantică la *funcţia de câmp* (de particule) ψ, ce se propagă sub formă de unde.

Funcţia de undă $\psi(x)$ din Mecanica Cuantică specifică probabilitatea de a găsi particula în acel punct (x), printre altele *densitatea* (de probabilitate) şi *curentul* (de probabilitate).

Funcţia de câmp $\varphi(x^\mu)$ specifică starea respectivului câmp, care, în urma cuantificării, permite printre altele determinarea *densităţii* (de particule) şi a *curentului* (de particule).

Trecerea de la Mecanica Clasică la Câmpuri Clasice

In Teoria Câmpurilor coordonatele spaţiale şi timpul nu se mai folosesc ca variabile ce descriu mişcarea $x^i(t)$. Acuma ele sunt variabile independente, cum înainte era timpul t, adică ele specifică coordonata câmpului în spaţiu-timp.

Din punct de vedere matematic, trecerea de la descrierea mişcării $x(t)$ din mecanica particulei, la descrierea "mişcării" unui câmp $\varphi(x^\mu)$, se face prin înlocuirile $x \longrightarrow \varphi$ şi $t \longrightarrow x^\mu$.

Deci, variabila independentă t din mecanica particulei este înlocuită prin 4-coordonata x^μ a câmpului. 4-coordonata x^μ, ca variabilă independentă de câmp, este echivalentă cu timpul t din mecanică ca variabila independentă funcţie de care avem descrisă mişcarea.
Singurele mărimi care variază acum sunt valorile de câmp la trecerea de la un punct la altul sau de la un moment de timp la altul. Acum avem dependenţa valorilor de câmp $\varphi^r(x^\mu)$ de coordonata 4-dim $x^\mu = (t,\vec{x})$.

Pentru a obţine "ecuaţiile de mişcare" (Euler-Lagrange sau Hamilton) pentru câmpuri, înlocuim în formalismul matematic (vezi Tabel de la pag. 170) coordonatele generalizate q^i din Mecanica Clasică (legate de gradele de libertate), prin componentele elementare de câmp $\varphi^r(x,t)$ (gradele de libertate) după care acum se face dezvoltarea oricărui câmp.
La fel ca în Mecanica Cuantică unde aveam spaţiul Hilbert al stărilor proprii, după care se dezvoltă orice altă stare cuantică (vezi (5.75) pag. 61). Aici facem înlocuirile: $q^i \longrightarrow \varphi^r(x,t)$, şi vitezele $\dot{q}^i$ prin derivate $\dot{q}^i \rightarrow \partial_\mu \varphi^r(x,t) \equiv \dfrac{\partial \varphi^r(x,t)}{\partial x^\mu}$

Tabel 12.1: De la Mecanica Clasică la Câmpuri Cuantice - transformare variabile independente

Mărime fizică	Mecanica clasică	Câmpuri clasice	
Coordonate generalizate	q^i	$\varphi^r(\vec{x},t)$	(12.1)
Viteze generalizate	$\dot{q}^i \equiv \dfrac{dq^i}{dt}$	$\partial_\mu \varphi^r \equiv \dfrac{\partial \varphi^r}{\partial x^\mu}$	(12.2)
Lagrangian	$L(q^i, \dot{q}^i)$	$L(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r) = = \int d^3x\, \mathcal{L}(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r)$	(12.3)
Impulsul conjugat	$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$	$\pi_r^\mu = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^r)}$	(12.4)
Acţiunea S, cu variaţia $\delta S = 0$ dă ec. de mişcare Euler-Lagrange	$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q^i, \dot{q}^i)$	$S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\varphi^r, \partial_\mu \varphi^r)$	(12.5)
	$\dfrac{\partial L}{\partial q^i} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0$	$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^r} - \partial_\mu \left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^r)}\right) = 0$	(12.6)
Hamiltonian	$H(q^i, p_i) = p_i \dot{q}^i - L$	$\mathcal{H}(\varphi^r, \pi_r) = \pi_r^\mu \partial_\mu \varphi^r - \mathcal{L}$	(12.7)
Ecuaţii de mişcare Hamilton	$\begin{cases} \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i} \\ \dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$	$\begin{cases} \partial_\mu \pi_r^\mu = -\dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi^r} \\ \partial_\mu \varphi^r = \dfrac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_r^\mu} \end{cases}$	(12.8)

12.1 Oscilaţii şi unde mecanice longitudinale

12.1.1 Sistem cuplat de un oscilator longitudinal

- Să considerăm o particulă de masă m legată elastic prin două resorturi de constantă elastică k şi lungime l_0 în stare netensionată, fixate la margini (vezi Fig.12.7). In starea de echilibru, lungimea fiecăruia din cele două resorturi este $a > l_0$. Dacă se scoate particula din această stare şi se plasează în poziţia iniţială $x(0)$, dupa care se eliberează, aceasta începe să oscileze sub acţiunea forţelor elastice.

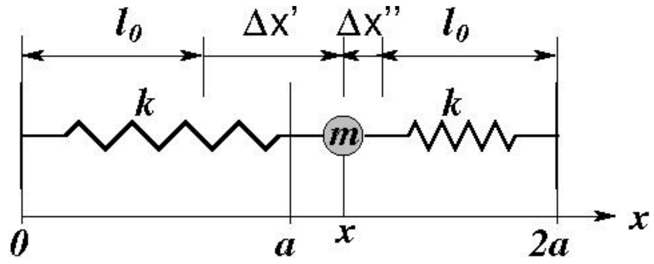


Figura 12.1: Un sistem oscilator de masă m cu un singur grad de libertate. Resorturile au constanta elastică k, lungimea liberă (netensionată) l_0, lungimea în stare de echilibru a. Poziţia curentă x realizeaă alungirile celor două resorturi $\Delta x'$ respectiv $\Delta x''$.

- In cele ce urmează căutăm să scriem ecuaţia diferenţială de oscilaţie şi să aflăm apoi soluţia $x(t)$ ce descrie această oscilaţie în timp. Vom face abordarea Lagrange a problemei, deoarece poate fi uşor apoi generalizată la sisteme cu mai multe grade de libertate, inclusiv la câmpuri.
- Pentru a scrie ecuaţia de mişcare Euler-Lagrange avem nevoie de lagrangian-ul acestui sistem

$$L = T - V = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \left[\frac{k\big(\overbrace{x - l_0}^{\Delta x'}\big)^2}{2} + \frac{k\big(\overbrace{2a - x - l_0}^{\Delta x''}\big)^2}{2}\right] \tag{12.9}$$

- Ecuaţia Euler-Lagrange (4.4) este: $$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \qquad (4.4)$$

- Folosind expresia lagrangianului (12.9), derivatele cerute în (4.4) sunt: $$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -k(x - l_0) + k(2a - x - l_0) = 2k\,(a - x) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \end{cases}$$

- Atunci, ecuaţia diferenţială de mişcare a oscilatorului unidimensional va fi: $$\boxed{m\ddot{x} = -2k(x - a)} \tag{12.10}$$

- Ecuaţia (12.10) de oscilaţie a masei m supusă acţiunii a două resorturi este identică cu ecuaţia Newton (4.1) sub forma $m\ddot{x} = \vec{F}' - \vec{F}''$, unde (vezi Figura 12.7):

$\vec{F}' = -k\Delta\vec{x}' = -k(x - l_0)$, iar $\vec{F}'' = -k\Delta\vec{x}'' = -k(2a - x - l_0)$, adică

$m\ddot{x} = \vec{F}' - \vec{F}'' = -k(x - l_0) + k(2a - x - l_0) = -2k(x - a)$, identică cu (12.10).

- La echilibru $\ddot{x} = 0$, atunci din (12.10) poziţia de echilibru este $x^e = a$.

Descrierea prin mod de oscilaţie de o particulă

- Pentru a putea faca mai târziu generalizarea studiului oscilaţiei pentru mai multe corpuri legate elastic, vom relua problema oscialţiei unei singure mase m, legată prin două resorturi de constantă elastică k şi lungime l_0 în stare netensionată, fixate la margini, vezi Fig.12.7, cu ajutorul noii variabile $X(t)$ ca abaterea faţă de poziţia de echilibru a:

$$X(t) = x(t) - a \tag{12.11}$$

- Tinem cont că alungirea la echilibru a fiecărui resort este $(a - l_0)$. I-ul resort este alungint suplimentar cu $a - l_0$, iar al II-lea este alungint cu mai puţin de $a - l_0$. Atunci lagrangian-ul sistemului, exprimat prin nou variabilă X este,

$$L = T - V = \frac{m\dot{X}^2}{2} - \left[\frac{k\Big(\overbrace{X + (a - l_0)}^{\Delta x'}\Big)^2}{2} + \frac{k\Big(\overbrace{X - (a - l_0)}^{\Delta x''}\Big)^2}{2} \right] \tag{12.12}$$

- Ecuaţia Euler-Lagrange (4.4) este: $$\frac{\partial L}{\partial X} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}\right) = 0 \tag{4.4}$$

- Folosind expresia lagrangianului (12.12), derivatele cerute în (4.4) sunt:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -k\Big(X + (a - l_0)\Big) - k\Big(X - (a - l_0)\Big) = -2kX \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = m\dot{X}$$

- Atunci, ecuaţia Euler-Lagrange de mişcare a oscilatorului unidimensional va fi: $$\boxed{-2kX = m\ddot{X}} \tag{12.13}$$

- Căutăm soluţia ecuaţiei (12.13), sub forma: $$X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{12.14}$$

  Derivata soluţiei este: $$\dot{X}(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t \tag{12.15}$$

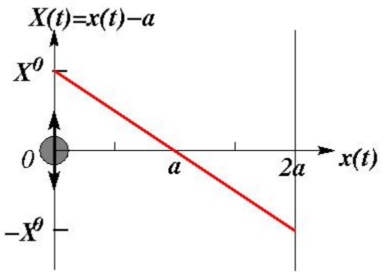
- Folosind condiţiile iniţiale $$\begin{cases} X(0) = X^0 & \Longrightarrow \quad A = X^0 \\ \dot{X}(0) = 0 & \Longrightarrow \quad B = 0 \end{cases}$$

- Soluţia ecuaţiei de mişcare (12.13) a oscilatorului unidimensional este: $$\boxed{X(t) = X^0\cos\omega t} \tag{12.16}$$

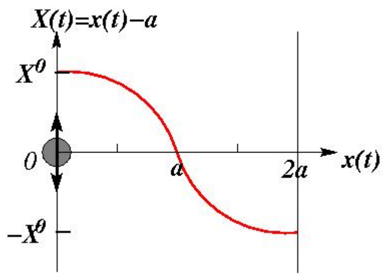
  iar derivatele $\dot{X}$ şi $\ddot{X}$ sunt: $\dot{X}(t) = -X^0\,\omega\sin\omega t \quad ; \quad \ddot{X}(t) = -X^0\,\omega^2\cos\omega t$

  Inlocuind în ecuaţia de mişcare (12.13) avem: $$2X^0 = \mu^2 X^0 \quad \text{unde} \quad \mu^2 = \frac{m\omega^2}{k} \tag{12.17}$$

- Adică avem valoarea proprie μ^2 şi frecvenţa corespunzătoare ω^2 pentru oscilaţia armonică (4.6), $$\mu^2 = 2 \quad \text{iar} \quad \boxed{\omega^2 = \frac{2k}{m}} \tag{12.18}$$



(a) Amplitudinea X^0 de mod propriu de oscilaţie.



(b) Coordonata $X(t) = x(t) - a$ (12.16) de mod propriu de oscilaţie.

Figura 12.2: Mişcarea longitudinală oscilatorie a unei mase legată de două resorturi, este descrisă de un singur mod de oscilaţie, exprimat prin frecvenţa (12.18) $\omega = \sqrt{2k/m}$

12.1.2 Sistem cuplat de doi oscilatori longitudinali

- Să considerăm acum două particule de masă m legate prin trei resorturi de constantă elastică k şi lungime l_0 în stare netensionată, fixate la margini (vezi Fig.12.8). In starea de echilibru, lungimea fiecăruia din resorturi este $a > l_0$. Dacă se scot particulele din această stare şi se plasează în poziţia iniţială x_1^0 respectiv x_2^0, după care se eliberează, sistemul începe să oscileze sub acţiunea forţelor elastice.

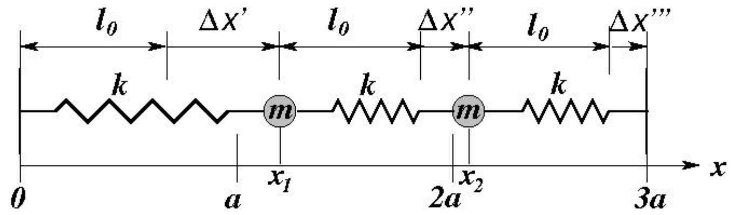


Figura 12.3: Un sistem oscilator longitudinal de două mase m cu două grade de libertate. Resorturile au constanta elastică k, lungimea liberă (netensionată) l_0, lungimea în stare de echilibru a. Poziţia curentă x realizează alungirile celor trei resorturi $\Delta x'$, $\Delta x''$ şi $\Delta x'''$.

- In cele ce urmează căutăm să scriem sistemul de ecuaţii diferenţiale de oscilaţie şi să aflăm apoi soluţiile $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ ce descriu oscilaţiile acestor particule în timp. Vom face abordarea Lagrange a problemei, la fel ca în cazul anterior.

- Pentru ecuaţiile de mişcare Euler-Lagrange avem nevoie de lagrangian-ul acestui sistem

$$L=T-V=\frac{m\dot{x}_1^2}{2}+\frac{m\dot{x}_2^2}{2}-\left[\frac{k\Big(\overbrace{x_1-l_0}^{\Delta x'}\Big)^2}{2}+\frac{k\Big(\overbrace{x_2-x_1-l_0}^{\Delta x''}\Big)^2}{2}+\frac{k\Big(\overbrace{3a-x_2-l_0}^{\Delta x'''}\Big)^2}{2}\right] \tag{12.19}$$

- Ecuaţiile Euler-Lagrange (4.4) sunt: $$\frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)=0 \qquad (i=1,2) \qquad (4.4)$$

- Folosind expresia lagrangianului (12.19) şi derivatele cerute în (4.4), obţinem ecuaţia de mişcare pentru x_1 (e cuplată cu x_2):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=-k(x_1-l_0)+k(x_2-x_1-l_0))=-2kx_1+kx_2\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=m\dot{x}_1 \qquad \Longrightarrow \boxed{-2kx_1+kx_2=m\ddot{x}_1}\end{cases} \tag{12.20}$$

$$\text{La echilibru} \quad \ddot{x}_1=0 \quad \Longrightarrow \quad x_1^e=\frac{x_2^e}{2} \tag{12.21}$$

- Folosind expresia lagrangianului (12.19) şi derivatele cerute în (4.4), obţinem ecuaţia de mişcare pentru x_2 (e cuplată cu x_1):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_2}=-k(x_2-x_1-l_0)+k(3a-x_2-l_0)=3ka+kx_1-2kx_2\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}=m\dot{x}_2 \qquad \Longrightarrow \boxed{3ka+kx_1-2kx_2=m\ddot{x}_2}\end{cases} \tag{12.22}$$

$$\text{La echilibru} \quad \ddot{x}_2=0 \quad \Longrightarrow \quad x_2^e=\frac{3a+x_1^e}{2} \tag{12.23}$$

- Ecuaţiile de mişcare (12.20) şi (12.22) sunt de tip Newton ($m\ddot{x} = -kx$):

$$\boxed{\begin{cases} -k\,(2x_1 - x_2) = m\ddot{x}_1 \\ -k\,(-x_1 + 2x_2 - 3a) = m\ddot{x}_2 \end{cases}} \tag{12.24}$$

- Membrul drept al acestor ecuaţii sunt forţe elastice. Pentru a determina potenţialul din care derivă aceste forţe îl introducem în ecuaţiile de mişcare (12.24)

$$\begin{cases} F_1 = -\dfrac{\partial V}{\partial x_1} = -k\,(2x_1 - x_2) \\ F_2 = -\dfrac{\partial V}{\partial x_2} = -k\,(-x_1 + 2x_2 - 3a) \end{cases} \tag{12.25}$$

- Prin integrare (până la o constantă arbitrară de integrare), obţinem:

$$V = k\Big(x_1^2 + x_2^2 - x_1\,x_2 - 3ax_2\Big) \tag{12.26}$$

- Ecuaţiile (12.24) formează un sistem de ecuaţii diferenţiale cuplate. Adică ecuaţia pentru x_1 conţine x_2 şi similar, ecuaţia pentru x_2 conţine x_1. Soluţia evidenţiază acest cuplaj prin termenul $-kx_1x_2$ din V, ceea ce corespunde cuplajului fizic între cele două mase m.

  In prezenţa cuplajului, soluţiile ecuaţiilor (12.24) nu mai sunt aşa simple. Totuşi, pentru anumite combinaţii, soluţiile se obţin uşor, prin decuplarea ecuaţiilor diferenţiale respective.

- Din expresiile (12.21) şi (12.23) exprimăm coordonatele la echilibru x_1^e, x_2^e

$$\begin{cases} x_1^e = \dfrac{3a + x_1^e}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1^e = a & (12.27) \\ x_2^e = \dfrac{3a}{2} + \dfrac{x_2^e}{4} = \dfrac{6a + x_2^e}{4} \qquad \Longrightarrow x_2^e = 2a & (12.28) \end{cases}$$

Descrierea prin mod de oscilaţie de două particule

- Introducem ca noi variabile, deviaţia faţă de coordonatele la echilibru:

$$\begin{cases} X_1(t) = x_1(t) - x_1^e \\ X_2(t) = x_2(t) - x_2^e \end{cases} \tag{12.29}$$

- Folosind (12.29) precum şi (12.20) şi (12.27) pentru $\ddot{X}_1$ sau (12.22) şi (12.28) pentru $\ddot{X}_2$, *ecuaţiile de mişcare* (12.24) pentru noile variabile devin:

$$\begin{cases} -2k\,\overbrace{(X_1 + a)}^{x_1} + k\,\overbrace{(X_2 + 2a)}^{x_2} = -k\,(2X_1 - X_2) = m\ddot{X}_1 \\ 3ka + k\,\overbrace{(X_1 + a)}^{x_1} - 2k\,\overbrace{(X_2 + 2a)}^{x_2} = -k\,(-X_1 + 2X_2) = m\ddot{X}_2 \end{cases} \tag{12.30}$$

- Căutăm soluţiile $X_1(t)$ şi $X_2(t)$, ca abaterile faţă de poziţia de echilibru, sub forma

$$\begin{cases} X_1(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \quad \text{cu} \quad \dot{X}_1(t) = -\omega\,A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t \\ X_2(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t \quad \text{cu} \quad \dot{X}_2(t) = -\omega\,C\sin\omega t + \omega D\cos\omega t \end{cases} \tag{12.31}$$

- Pentru determinarea constantelor de integrare folosim condiţiile iniţiale:

$$\begin{cases} X_1(0) = X_1^0 \qquad \text{cu} \qquad \dot{X}_1(0) = 0 \\ X_2(0) = X_2^0 \qquad \text{cu} \qquad \dot{X}_2(0) = 0 \end{cases} \tag{12.32}$$

- Inlocuind condiţiile iniţiale în soluţiile generale (12.31), obţinem constantele şi soluţiile corespunzătoare (decuplate):

$$\begin{cases} A = X_1^0 \quad B = 0 \\ C = X_2^0 \quad D = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} X_1(t) = X_1^0\cos\omega t \\ X_2(t) = X_2^0\cos\omega t \end{cases}} \tag{12.33}$$

- Inlocuind soluţiile (12.33) în ecuaţiile iniţiale (12.30) pentru X_1 şi X_2, obţinem:

$$\begin{cases} -k\left(2X_1^0 - X_2^0\right) = -m\omega^2 X_1^0 \\ -k\left(-X_1^0 + 2X_2^0\right) = -m\omega^2 X_2^0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \end{pmatrix} = \mu^2 \begin{pmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \end{pmatrix} \right.$$

unde am notat $\mu^2 = \dfrac{m\omega^2}{k}$

- Adică, am obţinut un *sistem de ecuaţii cu valori proprii* μ^2, pus sub altă formă:

$$\begin{pmatrix} 2-\mu^2 & -1 \\ -1 & 2-\mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \end{pmatrix} = 0 \tag{12.34}$$

- Acest sistem de ecuaţii omogen, are soluţii diferite de zero dacă determinantul este zero:

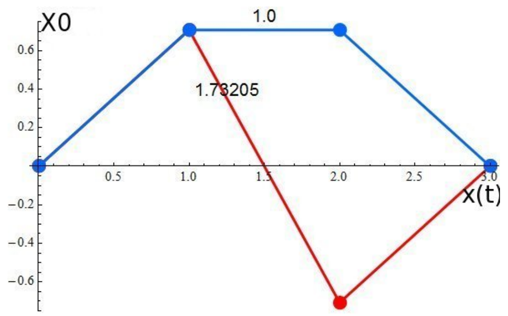
$$\begin{vmatrix} 2-\mu^2 & -1 \\ -1 & 2-\mu^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau} \quad \left(2-\mu^2\right)^2 - 1 = 0$$

- De aici avem *valorile proprii* (modurile de oscilaţie) simultan pentru ambele variabile $X_1(t)$ şi $X_2(t)$ decuplate (12.33) ale celor doi oscilatori cuplaţi:

$$2 - \mu^2 = \pm 1 \quad \text{adică} \quad \begin{cases} \mu_1^2 \equiv \dfrac{m\omega_1^2}{k} = 1 \\ \mu_2^2 \equiv \dfrac{m\omega_2^2}{k} = 3 \end{cases} \tag{12.35}$$

- Pentru aflarea *vectorilor proprii* (amplitudinile X_1^0, X_2^0 din (12.33)) din ecuaţia matriceală cu valori proprii (12.34), înlocuim *valorile proprii* $\mu_i^2 = m\omega_i^2/k$, obţinem:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \end{pmatrix} \Longrightarrow X_1^0 = X_2^0 \\ &\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \end{pmatrix} \Longrightarrow X_1^0 = -X_2^0 \end{aligned} \tag{12.36}$$

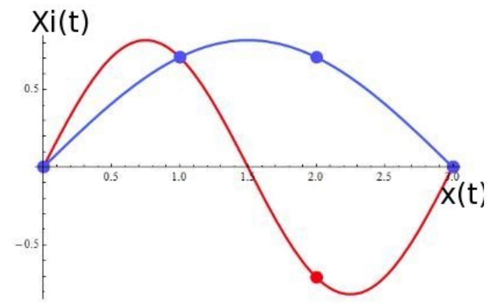


(a)

Amplitudinile (12.78) celor două moduri proprii de oscilaţie cu frecvenţele (12.76).

mod 1: $X_2^0 = X_1^0 \quad \omega_1 \sim 1$

mod 2: $X_2^0 = -X_1^0 \quad \omega_2 \sim \sqrt{3} = 1.732$



(b)

Coordonatele $X_1(t)$ şi $X_2(t)$ (12.29) ce descriu mişcarea (12.33) a celor două moduri proprii de oscilaţie, cu frecvenţele date de (12.76) $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$,

(După M.S.Suzuki şi I.S.Suzuki ”Lecture Note on Oscillations and Waves”)
`https://www.researchgate.net/profile/Masatsugu_Suzuki`

Figura 12.4: Cele două *moduri normale de oscilaţie* longitudinală de două mase legate elastic.

12.1.3 Sistem cuplat de trei oscilatori longitudinali

- Să considerăm acum trei particule de masă m legate prin patru resorturi de constantă elastică k şi lungime l_0 în stare netensionată, fixate la margini (vezi Fig.12.5). In starea de echilibru, lungimea fiecăruia din resorturi este $a > l_0$. Dacă se scot particulele din această stare şi se plasează în poziţia iniţială x_1^0, x_2^0 respectiv x_3^0, după care se eliberează, sistemul începe să oscileze sub acţiunea forţelor elastice. Vom face abordarea Lagrange a problemei.

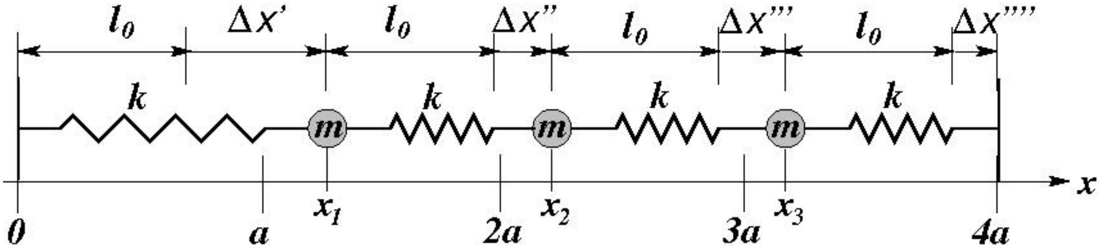


Figura 12.5: Un sistem oscilator longitudinal de trei mase m cu trei grade de libertate. Resorturile au constanta elastică k, lungimea liberă (netensionată) l_0, lungimea în stare de echilibru a. Poziţiile curente x_i realizează alungirile celor patru resorturi $\Delta x'$, $\Delta x''$, $\Delta x'''$ şi $\Delta x''''$.

- Pentru ecuaţiile de mişcare Euler-Lagrange avem nevoie de lagrangian-ul de tip (4.12) al sistemului:

$$L = T - V = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2} + \frac{m\dot{x}_3^2}{2} - \\ - \left[\frac{k\Big(\overbrace{x_1 - l_0}^{\Delta x'}\Big)^2}{2} + \frac{k\Big(\overbrace{x_2 - l_0 - x_1}^{\Delta x''}\Big)^2}{2} + \frac{k\Big(\overbrace{x_3 - l_0 - x_2}^{\Delta x'''}\Big)^2}{2} + \frac{k\Big(\overbrace{4a - l_0 - x_3}^{\Delta x''''}\Big)^2}{2} \right] \tag{12.37}$$

- Ecuaţiile Euler-Lagrange (4.4) sunt: $\dfrac{\partial L}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad \mathbf{(4.4)}$

- Folosind expresia lagrangianului (12.37) şi derivatele cerute în (4.4), obţinem ecuaţia de mişcare pentru x_1 (e cuplată cu x_2):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -k(x_1 - l_0) + k(x_2 - x_1 - l_0)) = -2kx_1 + kx_2 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 \qquad \Longrightarrow \boxed{-k\big(2x_1 - x_2\big) = m\ddot{x}_1} \end{cases} \tag{12.38}$$

$$\text{La echilibru} \quad \ddot{x}_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1^e = x_2^e/2 \tag{12.39}$$

- Folosind expresia lagrangianului (12.37) şi derivatele cerute în (4.4), obţinem ecuaţia de mişcare pentru x_2 (e cuplată cu x_1):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = -k(x_2 - x_1 - l_0) + k(x_3 - x_2 - l_0) = kx_1 - 2kx_2 + kx_3 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 \qquad \Longrightarrow \boxed{-k\big(-x_1 + 2x_2 - x_3 = m\ddot{x}_2} \end{cases} \tag{12.40}$$

$$\text{La echilibru} \quad \ddot{x}_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2^e = \left(x_1^e + x_3^e\right)/2 \tag{12.41}$$

- Folosind expresia lagrangianului (12.37) şi derivatele cerute în (4.4), obţinem ecuaţia de mişcare pentru x_3 (e cuplată cu x_2):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = -k(x_3 - x_2 - l_0) + k(4a - x_3 - l_0) = 4ka + kx_2 - 2kx_3 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = m\dot{x}_3 \qquad \Longrightarrow \boxed{-k\big(-x_2 + 2x_3 - 4a\big) = m\ddot{x}_3} \end{cases} \tag{12.42}$$

$$\text{La echilibru} \quad \ddot{x}_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_3^e = \left(4a + x_2^e\right)/2 \tag{12.43}$$

- Ecuaţiile de mişcare (12.38) (12.40) şi (12.42) sunt de tip Newton ($m\ddot{x} = -kx$):

$$\boxed{\begin{cases} -k\left(2x_1 - x_2\right) = m\ddot{x}_1 \\ -k\left(-x_1 + 2x_2 - x_3\right) = m\ddot{x}_2 \\ -k\left(-x_2 + 2x_3 - 4a\right) = m\ddot{x}_3 \end{cases}} \tag{12.44}$$

- Din expresiile (12.39), (12.41) şi (12.43) obţinem coordonatele la echilibru x_1^e, x_2^e, x_3^e:

$$\begin{cases} x_1^e = x_2^e/2 & \Longrightarrow \quad x_1^e = a & (12.45) \\ x_2^e = \left(x_1^e + x_3^e\right)/2 & \Longrightarrow \quad x_2^e = 2a & (12.46) \\ x_3^e = \left(4a + x_2^e\right)/2 & \Longrightarrow \quad x_2^e = 3a & (12.47) \end{cases}$$

Descrierea prin mod de oscilaţie de trei particule

- Introducem ca noi variabile, deviaţia faţă de poziţia de echilibru:

$$\begin{cases} X_1(t) = x_1(t) - x_1^e \\ X_2(t) = x_2(t) - x_2^e \\ X_3(t) = x_3(t) - x_3^e \end{cases} \tag{12.48}$$

- Folosind (12.48) precum şi ecuaţiile (12.38) şi (12.45) pentru $\ddot{X}_1$, (12.40) şi (12.46) pentru $\ddot{X}_2$, (12.42) şi (12.47) pentru $\ddot{X}_3$, *ecuaţiile de mişcare* pentru noile variabile devin:

$$\begin{cases} -2k\overbrace{(X_1+a)}^{x_1} + k\overbrace{(X_2+2a)}^{x_2} = -k\left(2X_1 - X_2\right) = m\ddot{X}_1 \\ k\overbrace{(X_1+a)}^{x_1} - 2k\overbrace{(X_2+2a)}^{x_2} + k\overbrace{(X_3+3a)}^{x_3} = -k\left(-X_1+2X_2-X_3\right) = m\ddot{X}_2 \\ k\overbrace{(X_2+2a)}^{x_2} - 2k\overbrace{(X_3+3a)}^{x_3} + 4ka = -k\left(-X_2+2X_3\right) = m\ddot{X}_3 \end{cases} \tag{12.49}$$

- Căutăm soluţiile $X_1(t)$, $X_2(t)$ şi $X_3(t)$, ca abateri faţă de poziţia de echilibru, sub forma

$$\begin{cases} X_1(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t & \text{cu} \quad \dot{X}_1(t) = -\omega\, A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t \\ X_2(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t & \text{cu} \quad \dot{X}_2(t) = -\omega\, C\sin\omega t + \omega D\cos\omega t \\ X_3(t) = E\cos\omega t + F\sin\omega t & \text{cu} \quad \dot{X}_3(t) = -\omega\, E\sin\omega t + \omega F\cos\omega t \end{cases} \tag{12.50}$$

- Pentru determinarea constantelor de integrare folosim condiţiile iniţiale:

$$\begin{cases} X_1(0) = X_1^0 & \text{cu} \quad \dot{X}_1(0) = 0 \\ X_2(0) = X_2^0 & \text{cu} \quad \dot{X}_2(0) = 0 \\ X_3(0) = X_3^0 & \text{cu} \quad \dot{X}_3(0) = 0 \end{cases} \tag{12.51}$$

- Inlocuind condiţiile iniţiale în soluţiile generale (12.50), obţinem constantele şi soluţiile corespunzătoare (decuplate):

$$\begin{cases} A = X_1^0 & B = 0 \\ C = X_2^0 & D = 0 \\ E = X_3^0 & F = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} X_1(t) = X_1^0\cos\omega t \\ X_2(t) = X_2^0\cos\omega t \\ X_3(t) = X_3^0\cos\omega t \end{cases}} \tag{12.52}$$

- Inlocuind soluţiile (12.52) în ecuaţiile iniţiale (12.49) pentru X_1, X_2 şi X_3, obţinem:

$$\begin{cases} -k\left(2X_1^0 - X_2^0\right) = -m\omega^2 X_1^0 \\ -k\left(-X_1^0 + 2X_2^0 - X_3^0\right) = -m\omega^2 X_2^0 \\ -k\left(-X_2^0 + 2X_3^0\right) = -m\omega^2 X_3^0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \\ X_3^0 \end{pmatrix} = \mu^2 \begin{pmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \\ X_3^0 \end{pmatrix} \right.$$

unde am notat $\mu^2 = m\omega^2/k$

- Adică, am obţinut un *sistem de ecuaţii cu valori proprii* μ^2, pus sub altă formă:

$$\begin{pmatrix} 2-\mu^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2-\mu^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2-\mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \\ X_3^0 \end{pmatrix} = 0 \qquad (12.53)$$

- Acest sistem de ecuaţii omogen, are soluţii diferite de zero dacă determinantul este zero:

$$\begin{vmatrix} 2-\mu^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2-\mu^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2-\mu^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{sau} \qquad \left[\left(2-\mu^2\right)^2 - 2\right]\left(2-\mu^2\right) = 0$$

- De aici avem *valorile proprii* (modurile de oscilaţie) simultan pentru $X_1(t)$, $X_2(t)$ şi $X_3(t)$ decuplate (12.52) ale celor trei oscilatori:

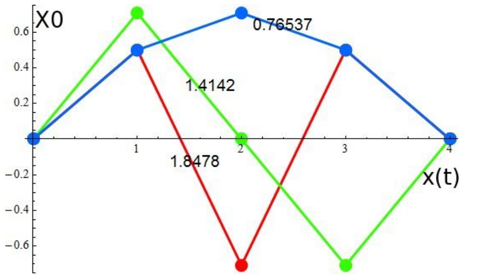
$$2-\mu^2 = \pm 2 \qquad \mu^2 = 2 \qquad \text{adică} \qquad \begin{cases} \mu_1^2 = 2-\sqrt{2} \rightarrow \omega_1^2 = \dfrac{(2-\sqrt{2})k}{m} \\ \mu_2^2 = 2 \qquad\;\; \rightarrow \omega_2^2 = \dfrac{2k}{m} \\ \mu_3^2 = 2+\sqrt{2} \rightarrow \omega_3^2 = \dfrac{(2+\sqrt{2})k}{m} \end{cases} \qquad (12.54)$$

- Pentru aflarea *vectorilor proprii* (amplitudinile X_1^0, X_2^0 şi X_3^0 din (12.52)), înlocuim *valorile proprii* (12.54) în ecuaţia (12.53), care pentru fiecare valoare $\mu_i^2 = m\omega_i^2/k$, devine:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \\ X_3^0 \end{pmatrix} = \mu_i^2 \begin{pmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \\ X_3^0 \end{pmatrix} \qquad (12.55)$$

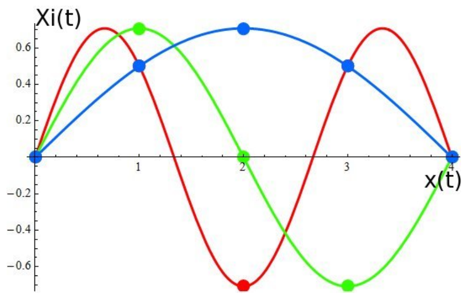
- Ecuaţia matricială (12.55) ne dă legatura între amplitudinile celor trei mase oscilante:

$$\begin{array}{llll} \text{mod 1:} & \mu_1^2 = m\omega_1^2/k = 2-\sqrt{2} & \longrightarrow & X_1^0 = X_3^0, \quad X_2^0 = \sqrt{2}X_1^0 \\ \text{mod 2:} & \mu_2^2 = m\omega_2^2/k = 2 & \longrightarrow & X_1^0 = -X_3^0, \quad X_2^0 = 0 \\ \text{mod 3:} & \mu_3^2 = m\omega_3^2/k = 2+\sqrt{2} & \longrightarrow & X_1^0 = X_3^0, \quad X_2^0 = -\sqrt{2}X_1^0 \end{array} \qquad (12.56)$$



(a)

Amplitudinile (12.56) celor trei moduri proprii de oscilaţie cu frecvenţele (12.54): $\omega_1 \sim \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0.765$; $\omega_2 \sim \sqrt{2} = 1.414$; $\omega_3 \sim \sqrt{2+\sqrt{2}} = 1.848$



(b)

Coordonatele (12.48) ce descriu mişcarea (12.52) a celor trei moduri proprii de oscilaţie, cu frecvenţele (12.54)

(După M.S.Suzuki şi I.S.Suzuki ”Lecture Note on Oscillations and Waves”)
`https://www.researchgate.net/profile/Masatsugu_Suzuki`

Figura 12.6: Cele trei *moduri normale de oscilaţie* longitudinală de trei mase legate elastic.

Tabel 12.2: Oscilatii longitudinale cuplate - REZUMAT

Mărime fizică	1 particulă legată	2 - particule legate	3 - particule legate
Ecuaţii mişcare Newton	$m\ddot{x}=-2k\Delta x$ $(\Delta x=x-x^e)$ $x^e=a$	$m\ddot{x}_1=-2kx_1+kx_2$ $m\ddot{x}_2=kx_1-2kx_2+3ka$	$m\ddot{x}_1=-2kx_1+kx_2$ $m\ddot{x}_2=kx_1-2kx_2+kx_3$ $m\ddot{x}_3=kx_2-2kx_3+4ka$
Variabile decuplate	$X=x-x^e$	$X_1=x_1-x_1^e$ $X_2=x_2-x_2^e$	$X_1=x_1-x_1^e$ $X_2=x_2-x_2^e$ $X_3=x_3-x_3^e$
Ecuaţii mişcare Lagrange	$m\ddot{X}=-2kX$	$m\ddot{X}_1=-2kX_1+kX_2$ $m\ddot{X}_2=kX_1-2kX_2$	$m\ddot{X}_1=-2kX_1+kX_2$ $m\ddot{X}_2=kX_1-2kX_2+kX_3$ $m\ddot{X}_3=kX_2-2kX_3$
Soluţii mod de oscilaţie (decuplate)	$X(t)=X^0\cos\omega t$	$X_1(t)=X_1^0\cos\omega t$ $X_2(t)=X_2^0\cos\omega t$	$X_1(t)=X_1^0\cos\omega t$ $X_2(t)=X_2^0\cos\omega t$ $X_3(t)=X_3^0\cos\omega t$
Ecuaţia cu valori proprii $\mu^2=\dfrac{m\,\omega^2}{k}$	$2X^0=\mu^2X^0$	$\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1^0\\X_2^0\end{pmatrix}=\mu^2\begin{pmatrix}X_1^0\\X_2^0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1^0\\X_2^0\\X_3^0\end{pmatrix}=\mu^2\begin{pmatrix}X_1^0\\X_2^0\\X_3^0\end{pmatrix}$
Valori proprii μ_i (frecvenţa ω_i)	$\mu^2=2$ $\longrightarrow\omega^2=\dfrac{2k}{m}$	$\mu_1^2=3\longrightarrow\omega_1^2=\dfrac{3k}{m}$ $\mu_2^2=1\longrightarrow\omega_2^2=\dfrac{k}{m}$	$\mu_1^2=2-\sqrt{2}\rightarrow\omega_1^2=\dfrac{(2-\sqrt{2})k}{m}$ $\mu_2^2=2\rightarrow\omega_2^2=\dfrac{k}{m}$ $\mu_3^2=2+\sqrt{2}\rightarrow\omega_3^2=\dfrac{(2+\sqrt{2})k}{m}$
Vectori proprii (amplitu-dini X_i^0)	X^0	$X_2^0=X_1^0$ $X_2^0=-X_1^0$	$X_3^0=X_1^0,\quad X_2^0=\sqrt{2}X_1^0$ $X_3^0=-X_1^0,\quad X_2^0=0$ $X_3^0=X_1^0,\quad X_2^0=-\sqrt{2}X_1^0$

12.2 Oscilaţii şi unde mecanice transversale

12.2.1 Sistem cuplat de un oscilator transversal

- Să considerăm o masă m legată pe un elastic fixat la margini (vezi Fig.12.7), care se poate mişca doar pe direcţie transversală.

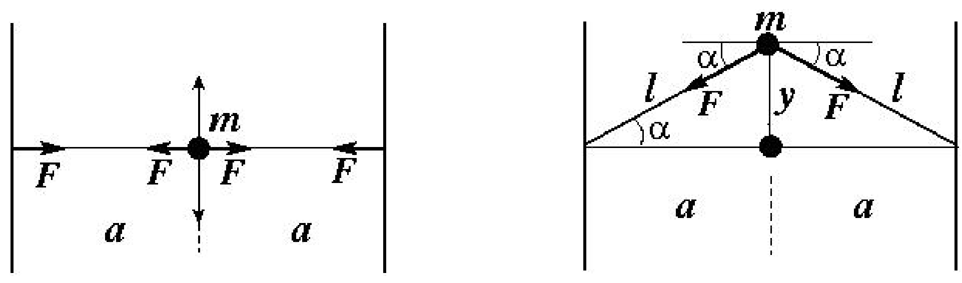


Figura 12.7: Un sistem oscilator cu un grad de libertate. (a) masa m este în repaus în starea iniţială, legată pe un elastic tensionat F; (b) starea acestuia la un moment t în mişcare oscilatorie transversală de deplasare y faţă de poziţia de echilibru.

- Iniţial masa este în repaus, aflată sub tensiunea (forţa) F din elastic (Fig.12.7 (a))

  Apoi se eliberează sistemul, care începe să oscileze (Fig.12.7 (b)).

  Fie $y(t)$ deplasarea transversală fată de poziţia de echilibru (coordonata) la un moment dat, a cărei variaţie în timp va trebui să o descriem.

Ecuaţia de mişcare (tratarea Newton)

- Căutăm ecuaţia de mişcare a masei m folosind întâi descrierea Newton ($F = m\ddot{y}$).

- Asupra masei m (vezi Figura 12.7), având abaterea la momentul t faţă de poziţia de echilibru $y(t)$, se exercită o forţă de revenire F_r la starea de echilibru din partea celor două tensiuni F laterale:

$$F_r = 2F \sin\alpha \tag{12.57}$$

  Notă: In cele ce urmează notăm $y(t) \equiv y$

- Pentru deplasări y mici $\sin\alpha \approx tg\alpha$, avem:

$$\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} \approx \frac{y}{a} \tag{12.58}$$

- Forţa de revenire la echilibru F (12.57), folosind (12.58), şi notând $k_T = F/a$ (echivalentul constantei elastice pentru mişcarea transversală), este:

$$F_r = -2k_T y \tag{12.59}$$

- Ecuaţia de mişcare Newton, de tip $m\ddot{x} = F$, este aici o ecuaţie de oscilator armonic:

$$\boxed{m\ddot{y} = -2k_T y} \tag{12.60}$$

Determinarea energiei potenţiale V

Metoda I

- Determinăm potenţialul din care derivă forţa (12.59) prin introducere în ecuaţia de mişcare (12.60), apoi

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial y} = -2k_T y \tag{12.61}$$

prin integrare (până la o constantă arbitrară), obţinem:

$$V = k_T y^2 \tag{12.62}$$

Metoda II

- Energia potenţială acumulată în coarda elastică poate fi calculată şi ca lucrul mecanic pentru alungirile $\sum \Delta\ell$ ale celor două segmente de coardă.
- Intâi, pentru deplasări y mici ($y \ll a$), lungimea acestor segmente este (Fig.12.7):

$$\ell = \sqrt{a^2 + y^2} \approx a + \frac{y^2}{2a} \tag{12.63}$$

unde am folosit dezvoltarea binomială $(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}b + \ldots$ (aici $n = 1/2$) şi neglijarea termenilor de ordin superior):

- Atunci alungirea $\Delta\ell$, faţa de lungimea iniţială a a fiecărui segment, este:

$$\Delta\ell = \frac{y^2}{2a} \tag{12.64}$$

- Se presupune că tensiunea F din coardă, pentru orice alungire $\Delta\ell$, este constantă. Atunci, energia potenţială acumulată în coarda elastică este egală cu lucrul mecanic total pentru alungirile $\Delta\ell$ ale segmentelor de coardă:

$$V = 2F\Delta\ell = 2F\frac{y^2}{2a} = k_T y^2 \qquad \text{unde am notat: (nu e const. elastică)} \quad k_T \equiv \frac{F}{a} \tag{12.65}$$

relaţie identică cu (12.62)

Ecuaţia de mişcare Euler-Lagrange

- Pentru aflarea ecuaţiei de mişcare Euler-Lagrange avem nevoie de lagrangian-ul acestui sistem:

$$L = T - V = \frac{m}{2}\dot{y}^2 - k_T y^2 \tag{12.66}$$

- Ecuaţia Euler-Lagrange (4.4) este:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \qquad (4.4)$$

- Folosind expresia lagrangianului (12.66) şi derivatele cerute în (4.4), obţinem ecuaţia de mişcare pentru y:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial y} = -2k_T y \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \qquad \Longrightarrow \boxed{m\ddot{y} = -2k_T y} \\ \text{identică cu cea obţinută în tratarea Newton (12.60).} \end{cases} \tag{12.67}$$

12.2.2 Sistem cuplat de doi oscilatori transversali (tratare Newton)

- Să considerăm un sistem de două mase m legate pe un elastic fixat la margini (vezi Fig.12.8), care se pot mişca doar pe direcţie transversală.

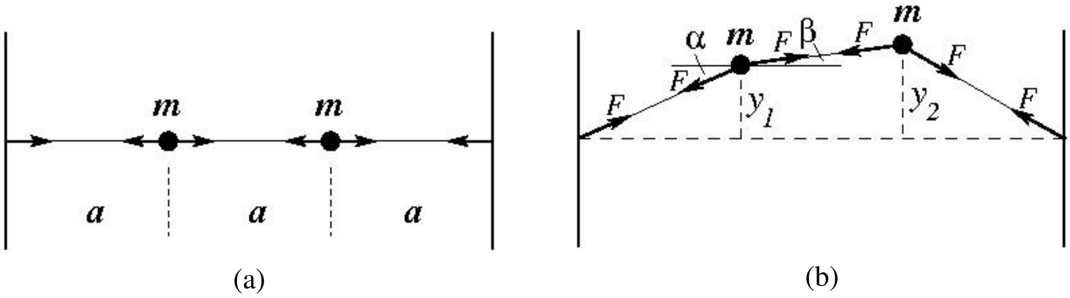


Figura 12.8: Un sistem oscilator cu două grade de libertate. (a) cele două mase m sunt în repaus, legate pe un elastic tensionat F; (b) starea lor la un moment t în mişcare oscilatorie transversală de deplasări y_1 respectiv y_2.

- Putem privi acest sistem cu două grade de libertate ca un solid ce conţine doar doi atomi ce pot vibra în structura solidului. Atomii, fiecare de masă m, sunt legaţi elastic, atât între ei cât şi de margini.

  Iniţial atomii sunt în repaus, aflaţi sub tensiunea (forţa) F din elastic (Fig.12.8 (a))

  Apoi se dă un impuls sistemului de doi atomi, care încep să oscileze (Fig.12.8 (b)).

  Fie $y_r(t), (r = 1, 2)$ deplasările lor transversale (coordonatele) la un moment dat, a căror variaţie în timp va trebui să o descriem.

- Căutăm ecuaţiile de mişcare ale celor două mase m folosind descrierea Newton ($F = ma$).

- Asupra primului atom (vezi Figura 12.8 (b)), având deplasarea $y_1(t)$, se exercită o forţă de revenire în starea de echilibru:

$$F_1 = F\sin\alpha - F\sin\beta \tag{12.68}$$

  Notă: In cele ce urmează notăm $y_i(t) \equiv y_i$

- Pentru deplasări y_1 şi y_2 mici $\sin \approx tg$, avem:

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{y_1}{\sqrt{a^2 + y_1^2}} \approx \dfrac{y_1}{a} \\ \sin\beta = \dfrac{y_2 - y_1}{\sqrt{a^2 + (y_2 - y_1)^2}} \approx \dfrac{y_2 - y_1}{a} \end{cases} \tag{12.69}$$

- Forţele de revenire la echilibru F_1 (12.68) şi similar F_2, folosind (12.69), şi notând $k_T = F/a$ (echivalent constanta elastică transversală), sunt:

$$\begin{cases} F_1 = -k_T\,(2y_1 - y_2) \\ F_2 = -k_T\,(2y_2 - y_1) \end{cases} \tag{12.70}$$

- Ecuaţiile de mişcare Newton, de tip $m\ddot{x} = -kx$ (B.1) Anexa B, (a se compara cu (12.30) sunt:

$$\boxed{\begin{cases} -k_T\,(2y_1 - y_2) = m\ddot{y}_1 \\ -k_T\,(2y_2 - y_1) = m\ddot{y}_2 \end{cases}} \tag{12.71}$$

- Pentru a determina potenţialul din care derivă forţele (12.70) le egalăm cu ecuaţiile de mişcare (12.71)

$$\begin{cases} F_1 = -\dfrac{\partial V}{\partial y_1} = -k_T\,(2y_1 - y_2) \\ F_2 = -\dfrac{\partial V}{\partial y_2} = -k_T\,(2y_2 - y_1) \end{cases} \tag{12.72}$$

- Prin integrare (până la o constantă arbitrară de integrare), obţinem:

$$V = k_T\Big(y_1^2 + y_2^2 - y_1\,y_2\Big) \tag{12.73}$$

- Ecuaţiile (12.71) formează un sistem de ecuaţii diferenţiale cuplate. Adică ecuaţia pentru y_1 conţine y_2 şi similar, ecuaţia pentru y_2 conţine y_1. Soluţia evidenţiază acest cuplaj prin termenul $-k_T y_1 y_2$ din V, ceea ce corespunde cuplajului fizic între cele două mase m.

  In absenţa acestui cuplaj ecuaţiile de mişcare (12.71) $m\ddot{y}_i = -2k_T y_i$ descriu două oscilaţii armonice independente, fiecare cu frecvenţa $\omega = \sqrt{2k_T/m}$.

  In prezenţa cuplajului, soluţiile ecuaţiilor (12.71) nu mai sunt aşa simple. Totuşi, pentru unele combinaţii particulare, soluţiile se obţin uşor, prin decuplarea ecuaţiilor diferenţiale respective.

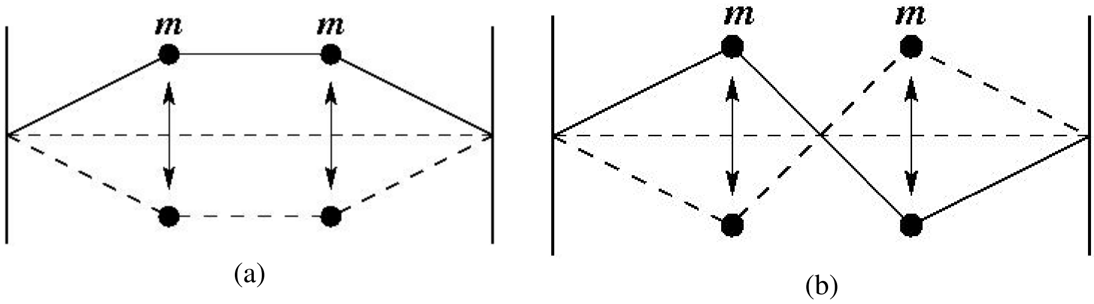


Figura 12.9: Mişcarea unui sistem oscilator cu două grade de libertate, pentru cele două *moduri normale de oscilaţie*: (a) $y_1^0 = y_2^0 \quad \longrightarrow$ *mod de oscilaţie* cu frecvenţa $\omega_1 = \sqrt{k_T/m}$ şi (b) $y_1^0 = -y_2^0 \quad \longrightarrow$ *mod de oscilaţie* cu frecvenţa $\omega_2 = \sqrt{3k_T/m}$.

Ecuaţiile de doi oscilatori cuplaţi (metoda matricială)

- Dacă căutăm soluţiile ecuaţiei de mişcare (12.71) sub formă de oscilaţii armonice (4.13):

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1^0 e^{-i\omega t} \\ y_2(t) = y_2^0 e^{-i\omega t} \end{cases} \tag{12.74}$$

- Inlocuind soluţiile (12.74) în ecuaţiile iniţiale (12.71) pentru y_1 şi y_2, obţinem:

$$\begin{cases} -k\,(2y_1^0 - y_2^0) = -m\omega^2 y_1^0 \\ -k\,(-y_1^0 + 2y_2^0) = -m\omega^2 y_2^0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} = \mu^2 \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} \right.$$

unde am notat $\mu^2 = \dfrac{m\omega^2}{k}$

- Adică, am obţinut un *sistem de ecuaţii cu valori proprii* μ^2, pus sub altă formă:

$$\begin{pmatrix} 2-\mu^2 & -1 \\ -1 & 2-\mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} = 0 \tag{12.75}$$

- Acest sistem de ecuaţii omogen, are soluţii diferite de zero dacă determinantul este zero:

$$\begin{vmatrix} 2-\mu^2 & -1 \\ -1 & 2-\mu^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau} \quad (2-\mu^2)^2 - 1 = 0$$

- De aici avem *valorile proprii* (modurile de oscilaţie) simultan pentru ambele variabile $y_1(t)$ şi $y_2(t)$ decuplate (12.75) ale celor doi oscilatori cuplaţi:

$$2-\mu^2=\pm 1 \quad \text{adică} \quad \begin{cases} \mu_1^2 \equiv \dfrac{m\omega_1^2}{k_T}=1 \\ \mu_2^2 \equiv \dfrac{m\omega_2^2}{k_T}=3 \end{cases} \tag{12.76}$$

- De unde, frecvenţele corespunzătoare celor două *valori proprii* μ^2 sunt

$$\begin{cases} \omega_1^2 = k_T/m \\ \omega_2^2 = 3k_T/m \end{cases} \tag{12.77}$$

- Pentru aflarea *vectorilor proprii* (amplitudinile y_1^0, y_2^0 din (12.74)) din ecuaţia matriceală cu valori proprii (12.75), înlocuim *valorile proprii* $\mu_i^2 = m\omega_i^2/k$, obţinem:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} &= 1\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} \Longrightarrow y_1^0 = y_2^0 \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} &= 3\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} \Longrightarrow y_1^0 = -y_2^0 \end{aligned} \tag{12.78}$$

$$\boxed{y_1^0 = y_2^0} \tag{12.79}$$

Ambele mase au poziţii iniţiale egale ; oscilează în fază cu frecvenţa ω_1 (vezi Fig.12.9 a).

$$\boxed{y_1^0 = -y_2^0} \tag{12.80}$$

Ambele mase au poziţii iniţiale opuse ; oscilează în antifază cu frecvenţa ω_2 (vezi Fig.12.9 b).

12.2.3 Sistem cuplat de trei oscilatori transversali

- Fie o coardă elastică întinsă de lungime 4ℓ, sub tensiune F, fixată la capete. De-a lungul acesteia sunt ataşate la distanţe egale a, trei particule de mase egale m, vezi Figura 12.10. Dacă se scot particulele din această stare şi se plasează în poziţia iniţială y_1^0, y_2^0 respectiv y_3^0, după care se eliberează, sistemul începe să oscileze sub acţiunea forţelor elastice.

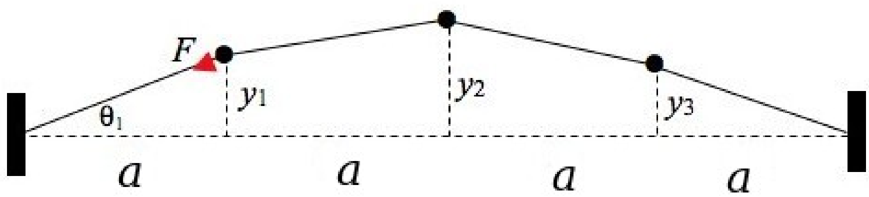


Figura 12.10: Un sistem oscilator transversal de trei mase m cu trei grade de libertate. Resorturile au constanta elastică k, lungimea liberă (netensionată) l_0, lungimea în stare de echilibru ℓ. Poziţiile curente y_i realizează alungirile celor patru resorturi $\Delta\ell_1$, $\Delta\ell_2$, $\Delta\ell_3$ şi $\Delta\ell_4$.

- In cele ce urmează căutăm să scriem sistemul de ecuaţii diferenţiale de oscilaţie şi să aflăm apoi soluţiile $y_1(t)$, $y_2(t)$ şi $y_3(t)$ ce descriu oscilaţiile acestor mase în timp. Vom face abordarea Lagrange a problemei, la fel ca în cazul oscilaţiilor longitudinale. Pentru aceasta avem nevoie de exprimarea energiilor cinetice T şi potenţiale V ale sistemului nostru.

- Energia cinetică de oscilaţie pe verticală a întregului sistem este:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2\right) \tag{12.81}$$

- Pentru determinarea energiei potenţiale avem nevoie de evaluarea alungirii $\Delta\ell_i$ pentru fiecare din cele patru segmente de coardă. Lungimea acestor segmente (v. Figura 12.10) este:

$$\sqrt{a^2 + y_1^2} \ ; \ \sqrt{a^2 + (y_2 - y_1)^2} \ ; \ \sqrt{a^2 + (y_3 - y_2)^2} \ ; \ \sqrt{a^2 + y_3^2} \tag{12.82}$$

- Pentru deplasări y mici ($y \ll a$), aceste lungimi, printr-o dezvoltare binomială $(a+b)^n = a^n + n\, a^{n-1} b + \ldots$ (aici $n = 1/2$) şi neglijarea termenilor de ordin superior, devin:

$$a + \frac{y_1^2}{2a} \ ; \ a + \frac{(y_2 - y_1)^2}{2a} \ ; \ a + \frac{(y_3 - y_2)^2}{2a} \ ; \ a + \frac{y_3^2}{2} \tag{12.83}$$

- Atunci alungirile $\Delta\ell_i$, faţa de lungimea iniţială a a fiecărui segment, sunt:

$$\Delta\ell_1 = \frac{y_1^2}{2a} \ ; \ \Delta\ell_2 = \frac{(y_2 - y_1)^2}{2a} \ ; \ \Delta\ell_3 = \frac{(y_3 - y_2)^2}{2a} \ ; \ \Delta\ell_4 = \frac{y_3^2}{2a} \tag{12.84}$$

- Se presupune că tensiunea F din coardă, pentru orice deplasare $\Delta\ell_i$, este constantă.

  Atunci, energia potenţială acumulată în coarda elastică este egală cu lucrul mecanic total pentru alungirile $\sum \Delta\ell_i$ ale segmentelor de coardă:

$$\begin{aligned} V &= F\left(\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \Delta\ell_3 + \Delta\ell_4\right) = \frac{F}{2a}\left[y_1^2 + (y_2 - y_1)^2 + (y_3 - y_2)^2 + y_3^2\right] \\ &= k_T\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_2 - y_2 y_3\right) \qquad \left.\begin{array}{c}\text{unde am notat:} \\ \text{(nu e const. elastică)}\end{array}\right\} k_T \equiv \frac{F}{a} \end{aligned} \tag{12.85}$$

De remarcat prezenţa termenilor mixti $y_1 y_2$ şi $y_2 y_3$, care indică cuplajul ecuaţiilor de mişcare.

- Pentru ecuaţiile de mişcare Euler-Lagrange avem nevoie de lagrangian-ul acestui sistem:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2\right) - k_T\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_2 - y_2 y_3\right) \tag{12.86}$$

- Ecuaţiile Euler-Lagrange (4.4) sunt:

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4.4}$$

- Folosind expresia lagrangianului (12.86) şi derivatele cerute în (4.4), obţinem ecuaţia de mişcare pentru y_1 (e cuplată cu y_2):

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y_1} &= -k_T\,(2y_1 - y_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} &= m\dot{y}_1 \end{aligned}\right. \implies \boxed{m\ddot{y}_1 = -k_T\,(2y_1 - y_2)} \tag{12.87}$$

- Folosind expresia lagrangianului (12.86) şi derivatele cerute în (4.4), obţinem ecuaţia de mişcare pentru y_2 (e cuplată cu y_1 şi y_3):

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y_2} &= -k_T\,(-y_1 + 2y_2 - y_3) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} &= m\dot{y}_2 \end{aligned}\right. \implies \boxed{m\ddot{y}_2 = -k_T\,(-y_1 + 2y_2 - y_3)} \tag{12.88}$$

- Folosind expresia lagrangianului (12.86) şi derivatele cerute în (4.4), obţinem ecuaţia de mişcare pentru y_3 (e cuplată cu y_2):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial y_3} = -k_T\,(-y_2 + 2y_3) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} = m\dot{y}_3 \end{cases} \implies \boxed{m\ddot{y}_3 = -k_T\,(-y_2 + 2y_3)} \tag{12.89}$$

- Ecuaţiile de mişcare (12.87) (12.88) şi (12.89) sunt de tip oscilator armonic ($m\ddot{y} = -ky$):

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{y}_1 = -k_T\,(2y_1 - y_2) \\ m\ddot{y}_2 = -k_T\,(2y_2 - y_1 - y_3) \\ m\ddot{y}_3 = -k_T\,(2y_3 - y_2) \end{cases}} \tag{12.90}$$

- Căutăm soluţiile $y_1(t)$, $y_2(t)$ şi $y_3(t)$, ca abaterile faţă de poziţia de echilibru, sub forma

$$\begin{cases} y_1(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t & \text{cu} \quad \dot{y}_1(t) = -\omega\,A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t \\ y_2(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t & \text{cu} \quad \dot{y}_2(t) = -\omega\,C\sin\omega t + \omega D\cos\omega t \\ y_3(t) = E\cos\omega t + F\sin\omega t & \text{cu} \quad \dot{y}_3(t) = -\omega\,E\sin\omega t + \omega F\cos\omega t \end{cases} \tag{12.91}$$

- Pentru determinarea constantelor de integrare folosim condiţiile iniţiale:

$$\begin{cases} y_1(0) = y_1^0 & \text{cu} \quad \dot{y}_1(0) = 0 \\ y_2(0) = y_2^0 & \text{cu} \quad \dot{y}_2(0) = 0 \\ y_3(0) = y_3^0 & \text{cu} \quad \dot{y}_3(0) = 0 \end{cases} \tag{12.92}$$

- Inlocuind condiţiile iniţiale în soluţiile generale (12.91), obţinem constantele şi soluţiile corespunzătoare (decuplate):

$$\begin{cases} A = y_1^0 & B = 0 \\ C = y_2^0 & D = 0 \\ E = y_3^0 & F = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} y_1(t) = y_1^0\cos\omega t \\ y_2(t) = y_2^0\cos\omega t \\ y_3(t) = y_3^0\cos\omega t \end{cases}} \tag{12.93}$$

- Inlocuind soluţiile (12.93) în ecuaţiile iniţiale (12.90) pentru y_1, y_2 şi y_3, obţinem:

$$\begin{cases} -m\omega^2 y_1^0 = -2k_T y_1^0 + k_T y_2^0 \\ -m\omega^2 y_2^0 = k_T y_1^0 - 2k_T y_2^0 + k_T y_3^0 \\ -m\omega^2 y_3^0 = k_T y_2^0 - 2k_T y_3^0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \mu^2 \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{unde am notat} \qquad \mu^2 = \frac{m\omega^2}{k_T} \tag{12.94}$$

- Adică, am obţinut un *sistem de ecuaţii cu valori proprii*:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} = \mu^2 \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{pmatrix} 2-\mu^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2-\mu^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2-\mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} = 0 \tag{12.95}$$

sistem identc cu cel din cazul oscilaţiilor longitudinale (12.53), cu deosebire că acum $k \longrightarrow k_T$.

- Acest sistem de ecuaţii omogen, are soluţii diferite de zero dacă determinantul este zero:

$$\begin{vmatrix} 2-\mu^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2-\mu^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2-\mu^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{sau} \qquad \left[\left(2-\mu^2\right)^2 - 2\right]\left(2-\mu^2\right) = 0$$

- De aici avem *valorile proprii* μ^2 (12.94) (modurile de oscilaţie de frecvenţă ω_i) simultan pentru variabilele $y_1(t)$, $y_2(t)$ şi $y_3(t)$ decuplate (12.93) ale celor trei oscilatori cuplaţi:

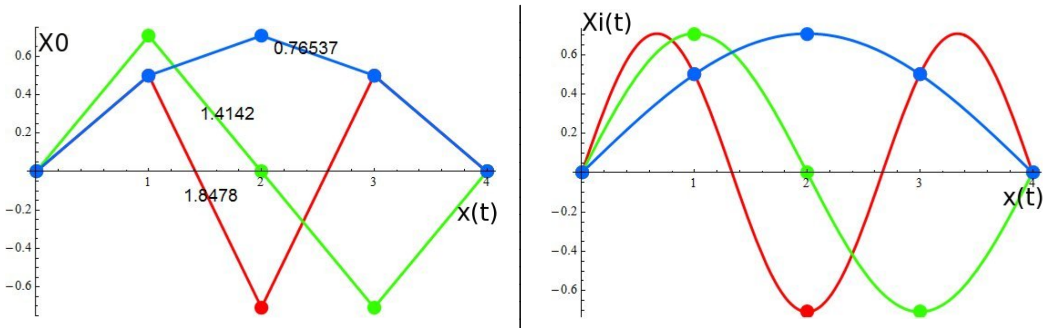
$$\begin{matrix} 2-\mu^2 = \pm\sqrt{2} \\ \mu^2 = 2 \end{matrix} \quad \text{adică} \quad \begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{(2-\sqrt{2})k_T}{m} \\ \omega_2^2 = \dfrac{2k_T}{m} \\ \omega_3^2 = \dfrac{(2+\sqrt{2})k_T}{m} \end{cases} \tag{12.96}$$

- Pentru aflarea *vectorilor proprii* (amplitudinile y_1^0, y_2^0 şi y_3^0 din (12.93)), înlocuim *valorile proprii* (12.96) în ecuaţia (12.95), care pentru fiecare valoare $\mu_i^2 = m\omega_i^2/k_T$, devine:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} = \mu_i^2 \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} \tag{12.97}$$

Ecuaţiile matriceale (12.97), pentru fiecare din valorile proprii μ_i^2, ne dau legătura între amplitudinile celor trei mase oscilante în cadrul fiecărui mod de oscilaţie:

$$\begin{aligned} &\text{mod 1:} \quad \mu_1^2 = \frac{m\omega_1^2}{k_T} = 2-\sqrt{2} \quad \longrightarrow \quad y_1^0 = y_3^0, \quad y_2^0 = \sqrt{2}y_1^0 \\ &\text{mod 2:} \quad \mu_2^2 = \frac{m\omega_2^2}{k_T} = 2 \quad \longrightarrow \quad y_1^0 = -y_3^0, \quad y_2^0 = 0 \\ &\text{mod 3:} \quad \mu_3^2 = \frac{m\omega_3^2}{k_T} = 2+\sqrt{2} \quad \longrightarrow \quad y_1^0 = y_3^0, \quad y_2^0 = -\sqrt{2}y_1^0 \end{aligned} \tag{12.98}$$



(a)

Amplitudinile y_1^0, y_2^0 şi y_3^0 (12.98) ale celor trei moduri de oscilaţie cu frecvenţele (12.96).

mod 1: $y_3^0 = y_1^0 \qquad y_2^0 = \sqrt{2}y_1^0$

mod 2: $y_3^0 = -y_1^0 \qquad y_2^0 = 0$

mod 3: $y_3^0 = y_1^0 \qquad y_2^0 = -\sqrt{2}y_1^0$

(b)

Mişcarea oscilatorie (12.93) a celor 3 mase, cu frecvenţele (12.96) $\omega_1^2 = (2-\sqrt{2})k_T/m$, $\omega_2^2 = 2k_T/m$, $\omega_3^2 = (2+\sqrt{2})k_T/m$

mod 1: $\omega_1 \sim \sqrt{2-\sqrt{2}} = 0.765$

mod 2: $\omega_2 \sim \sqrt{2} = 1.414$

mod 3: $\omega_3 \sim \sqrt{2+\sqrt{2}} = 1.848$

(După M.S.Suzuki şi I.S.Suzuki ”Lecture Note on Oscillations and Waves”)
`https://www.researchgate.net/profile/Masatsugu_Suzuki`

Figura 12.11: Cele trei *moduri normale de oscilaţie* transversală permise, corespunzător gradelor de libertate ale celor trei mase legate la distanţe egale pe o coardă elastică.

Sistem cuplat de trei oscilatori transversali (tratare Lagrange)

- Fie o coardă elastică întinsă de lungime $4a$, sub tensiune F, fixată la capete. De-a lungul acesteia sunt ataşate la distanţe egale a, trei particule de mase egale m, vezi Figura 12.12.

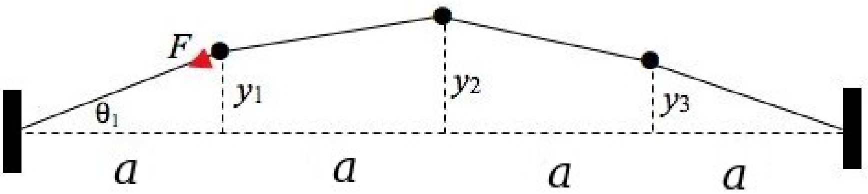


Figura 12.12: Sistem mecanic oscilator unidimensional de trei particule legate elastic.

- Pentru a putea generaliza la cazul unui oscilator cu număr infinit de particule legate elastic, vom trece să determinăm ecuaţiile de mişcare ale celor trei particule, prin tratarea lagrangiană a mişcării sistemului. De aceea vom exprima întâi energiile cinetică şi potenţială.

- Energia cinetică de oscilaţie pe verticală a întregului sistem este:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2\right) \tag{12.99}$$

- Pentru determinarea energiei potenţiale avem nevoie de evaluarea alungirii pentru fiecare din cele patru porţiuni de coardă. Lungimea acestora (vezi Figura 12.12) este:

$$\sqrt{a^2 + y_1^2} \; ; \; \sqrt{a^2 + (y_2 - y_1)^2} \; ; \; \sqrt{a^2 + (y_3 - y_2)^2} \; ; \; \sqrt{a^2 + y_3^2} \tag{12.100}$$