Capitol 13

Cuantificarea câmpurilor clasice

13.1 Oscilatorul armonic

13.1.1 Oscilatorul armonic în mecanica clasică

- Conform Newton $F = m\ddot{x}$. Un corp de masă m, sub acţiunea forţei elastice $F(x) = -\kappa x$, are ec. de mişcare

$$\boxed{-\kappa\, x = m\ddot{x}} \tag{13.1}$$

- După cum am văzut, aceeaşi ecuaţie (13.1) se poate obţine şi cu ajutorul ecuaţiei Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0} \tag{13.2}$$

cu Lagrangian-ul: $L(x,\dot{x}) = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{\kappa}{2}x^2 \implies \frac{\partial L}{\partial x} = -\kappa x\ ;\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

de unde $\quad m\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right),\quad$ ecuaţia (13.2) conduce imediat la ecuaţia (13.1).

- De asemenea, aceeaşi ecuaţie (13.1) se poate obţine şi cu ajutorul ecuaţiilor Hamilton:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p}\quad ;\quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}} \tag{13.3}$$

cu Hamiltonian-ul: $H(x,p) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{\kappa}{2}x^2 \implies \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}\ ;\ \frac{\partial H}{\partial x} = \kappa x$

de unde $\quad p = m\frac{\partial H}{\partial p} \overset{(13.3)}{\overbrace{=}} m\dot{x} \qquad$ şi $\quad \kappa x = \frac{\partial H}{\partial x} \overset{(13.3)}{\overbrace{=}} -\dot{p} = -m\ddot{x}\quad$ adică (13.1)

- Prin integrarea ecuaţiei de mişcare se obţine "traiectoria" $x = x(t)$ a particulei.
  In cazul de faţă, *mişcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) = a\,e^{i\,\omega\,t} + a^* e^{-i\,\omega\,t} \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \tag{13.4}$$

- Cuantificarea mişcării oscilatorii se face prin trecerea la operatori.

13.1.2 Cuantificare oscilator armonic (formalism Dirac)

- Un oscilator armonic clasic, are energia totală exprimată prin Hamiltonian:

$$H(x,p)=T+V=\frac{p^2}{2m}+\frac{\kappa}{2}x^2=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad \text{am folosit (13.4)} \quad \kappa=m\omega^2 \tag{13.5}$$

- **Cuantificarea oricărui sistem clasic** se face cu ajutorul Hamiltonian-ului, prin

- trecerea la operatori $\hat{H}(\hat{x},\hat{p})=\hat{T}+\hat{V}=\dfrac{\hat{p}^2}{2m}+\dfrac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ | cu operatorii corespunzători variabilelor conjugate canonic ce satisfac relaţia de comutare: | $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$

- şi rezolvarea ecuaţiei de undă cu valori şi funcţii proprii de energie: $\hat{H}\psi_n=E_n\psi_n$ (13.6)

- De exemplu, în cazul oscilatorului armonic cuantic, folosim formalismul Dirac pentru aflarea valorilor E_n.

- Inlocuim $\hat{x}$ şi $\hat{p}$ cu operatorii hermitici reduşi $\hat{X}$ şi $\hat{P}$ (adimensionali):

$$\boxed{\hat{X}=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} \quad ; \hat{P}=\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}\hat{p} \quad \text{cu} \quad \left[\hat{X},\hat{P}\right]=i} \tag{13.7}$$

Intr-adevăr, $\left[\hat{X},\hat{P}\right]=\hat{X}\hat{P}-\hat{P}\hat{X}=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}\underbrace{\left[\hat{x},\hat{p}\right]}_{i\hbar}=i$

- Hamiltonian-ul devine:

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2=\frac{m\omega\hbar}{2m}\hat{P}^2+\frac{m\omega^2}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\hat{X}^2=\frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{X}^2+\hat{P}^2\right) \tag{13.8}$$

Dacă X şi P ar fi numere reale, acesta este Hamiltonian-ul clasic (13.5)

Dacă $\hat{X}$ şi $\hat{P}$ sunt operatori, $\hat{H}$ se poate scrie:

$$\hat{H}=\frac{\hbar\omega}{2}\underbrace{\left(\hat{X}-i\hat{P}\right)}_{\hat{a}^\dagger}\underbrace{\left(\hat{X}+i\hat{P}\right)}_{\hat{a}} \tag{13.9}$$

- Astfel, Dirac trece la operatorii adimensionali $\hat{a}$ şi $\hat{a}^\dagger$:

$$\boxed{\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X}+i\hat{P}\right) \; ; \; \hat{a}^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X}-i\hat{P}\right) \text{ cu } [\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1} \tag{13.10}$$

Intr-adevăr,

$$\begin{aligned}\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]&=\frac{1}{2}\left[\hat{X}+i\hat{P},\hat{X}-i\hat{P}\right]\\&=\frac{1}{2}\left(\underbrace{\left[\hat{X},\hat{X}\right]}_{=0}-i\underbrace{\left[\hat{X},\hat{P}\right]}_{=i}+i\underbrace{\left[\hat{P},\hat{X}\right]}_{=-i}+\underbrace{\left[\hat{P},\hat{P}\right]}_{=0}\right)=\frac{1}{2}\left(1+1\right)=1\end{aligned}$$

similar $\quad \left[\hat{a}^\dagger,\hat{a}\right]=-1$

- Hamiltonian-ul (13.9) va fi: $\hat{H} = \hbar\omega\, \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ori $\hat{H} = \hbar\omega\, \hat{a}\hat{a}^\dagger$ (ambiguitate de ordonare).

- Putem exprima operatorii hermitici $\hat{X}$ şi $\hat{P}$ cu ajutorul $\hat{a}$ şi $\hat{a}^\dagger$:

$$\boxed{\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right) \;;\; \hat{P} = \frac{-i}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right)} \tag{13.11}$$

- Am văzut Hamiltonian-ul (12.11): $\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{X}^2+\hat{P}^2\right)$

$$\begin{cases} \hat{X}^2 = \frac{1}{2}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)(\hat{a}+\hat{a}^\dagger) = \frac{1}{2}(\hat{a}^2+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}+(\hat{a}^\dagger)^2) \\ \hat{P}^2 = -\frac{1}{2}(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)(\hat{a}-\hat{a}^\dagger) = -\frac{1}{2}(\hat{a}^2-\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}+(\hat{a}^\dagger)^2) \end{cases}$$

- Folosind relaţia de comutare $\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$, Hamiltonian-ul devine:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{X}^2+\hat{P}^2\right) = \frac{\hbar\omega}{2}\Big(\underbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger}_{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1} + \underbrace{\hat{a}^\dagger\hat{a}}_{\hat{a}\hat{a}^\dagger-1}\Big) = \begin{cases} \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right) \\ \hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \tag{13.12}$$

- Evaluăm şi relaţiile de comutare $\left[\hat{H},\hat{a}\right]$, $\left[\hat{H},\hat{a}^\dagger\right]$ pentru Hamiltonianul $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\right)$

$$\left[\hat{H},\hat{a}\right] = \left[\hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \tfrac{1}{2}\right),\hat{a}\right] = \hbar\omega\Big(\hat{a}\underbrace{\left[\hat{a}^\dagger,\hat{a}\right]}_{-1} + \underbrace{\left[\hat{a},\hat{a}\right]}_{0}\hat{a}^\dagger\Big) = -\hbar\omega\hat{a}$$

în mod similar (13.13)

$$\left[\hat{H},\hat{a}^\dagger\right] = +\hbar\omega\hat{a}^\dagger$$

Rezolvarea ecuaţiei cu valori proprii de energie

- Presupunem că ψ_n este stare proprie a hamiltonianului $\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$ (13.6), cu energia E_n.

  Să studiem acum acţiunea comutatorilor $\left[\hat{H},\hat{a}\right]$ şi $\left[\hat{H},\hat{a}^\dagger\right]$ asupra funcţiei de stare ψ_n.

$$\left[\hat{H},\hat{a}\right]\psi_n = -\hbar\omega\hat{a}\psi_n$$

$$\hat{H}\hat{a}\psi_n - \hat{a}\underbrace{\hat{H}\psi_n}_{E_n\psi_n} = -\hbar\omega\hat{a}\psi_n$$

$$\hat{H}(\hat{a}\psi_n) - E_n(\hat{a}\psi_n) = -\hbar\omega(\hat{a}\psi_n)$$

$$\hat{H}(\hat{a}\psi_n) = (E_n - \hbar\omega)(\hat{a}\psi_n)$$

adică $(\hat{a}\psi_n) \sim \psi_{n-1}$ este funcţie proprie pentru Hamiltonianul $\hat{H}$, cu valoarea proprie $E_n - \hbar\omega$.

Deci, $\hat{a}\psi_n$ este starea cu energia coborâtă cu $\hbar\omega$.

$$\left[\hat{H},\hat{a}^\dagger\right]\psi_n = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\psi_n$$

$$\hat{H}\hat{a}^\dagger\psi_n - \hat{a}^\dagger\underbrace{\hat{H}\psi_n}_{E_n\psi_n} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\psi_n$$

$$\hat{H}(\hat{a}^\dagger\psi_n) - E_n(\hat{a}^\dagger\psi_n) = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\psi_n)$$

$$\hat{H}(\hat{a}^\dagger\psi_n) = (E_n + \hbar\omega)(\hat{a}^\dagger\psi_n)$$

adică $(\hat{a}^\dagger\psi_n) \sim \psi_{n+1}$ este funcţie proprie pentru Hamiltonianul $\hat{H}$, cu valoarea proprie $E_n + \hbar\omega$.

Deci, $\hat{a}^\dagger\psi_n$ este starea cu energia ridicată cu $\hbar\omega$.

- Cu operatorii $\hat{a}^\dagger$ de creare şi $\hat{a}$ de anihilare stări se pot obţine toate stările de energie ale oscilatorului armonic. Totuşi, nu putem coborî sub zero energia oscilatorului armonic.

- Pentru a opri ca operatorul de coborâre $\hat{a}$ să ducă la stări de energie negativă, prin aplicarea succesivă asupra funcţiei de stare ψ_n, va trebui să facem ca funcţia proprie însăşi să devină zero, pentru energia minimă. Adică pentru starea fundamentală cerem ca: $\hat{a}\psi_0 = 0$

Deoarece $\hat{H}$ (13.12) conţine $\hat{a}$ pe poziţia necesară, putem scrie energia stării fundamentale:

$$\hat{H}\psi_0 = \hbar\omega\Big(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\Big)\psi_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger \underbrace{\hat{a}\psi_0}_{0} + \frac{\hbar\omega}{2}\psi_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\psi_0 \tag{13.14}$$

- Deci energia stării fundamentale este: $$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \tag{13.15}$$

- Identificăm operatorul *număr de stări*: $$\boxed{\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}} \tag{13.16}$$

- Studiem acum acţiunea operatorului *număr de stări* asupra funcţiei $\psi_n \equiv |n\rangle$.

  Am văzut că $\hat{a}\psi_n$ este legat de $|n-1\rangle$ iar $\hat{a}^\dagger\psi_n$ este legat de $|n+1\rangle$.

- Separat, operatorii $\hat{a}$ de anihilare şi $\hat{a}^\dagger$ de creare stări, conduc la stările (normate): $$\begin{cases} \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \quad \text{cu} \quad \hat{a}|0\rangle = 0 \quad \text{şi} \quad \||0\rangle\|^2 = 1 \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|n\rangle = \dfrac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle} \end{cases} \tag{13.17}$$

- Operatorul $\hat{N}$ număr de stări $$\begin{cases} \hat{N}|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \hat{a}^\dagger\sqrt{n}\,|n-1\rangle = \\ \qquad = \sqrt{n}\sqrt{n}\,|n\rangle = n\,|n\rangle \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{13.18}$$

- Setul complet de vectori de bază $|n\rangle$ sunt *funcţii proprii* din ecuaţia cu valori proprii $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ $$\hat{H}\,|n\rangle = \hbar\omega\Big(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\Big)|n\rangle = \hbar\omega\Big(n + \frac{1}{2}\Big)|n\rangle = E_n\,|n\rangle \tag{13.19}$$

- Adică *valorile proprii* cuantificate de energie ale oscilatorului armonic sunt $$\boxed{E_n = \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\hbar\omega} \quad (n = 0, 1, 2 \ldots) \tag{13.20}$$

- In starea fundamentală $n = 0$, $E_0 = \dfrac{1}{2}\hbar\omega \neq 0$

13.2 Câmpuri clasice

13.2.1 Câmp scalar clasic liber

- Soluţiile ecuaţiei (12.133) de *câmp (scalar) liber* real $\varphi_k(\vec{x},t)$ şi imaginar $\varphi_k^*(\vec{x},t)$ sunt unde plane:

$$\varphi_k(\vec{x},t)=\alpha_k\, e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})} \qquad \varphi_k^*(\vec{x},t)=\alpha_k^* e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})} \text{ (absentă în NRQM)} \tag{13.21}$$

Nota: φ_k şi φ_k^* sunt câmpuri diferite.

- Soluţia generală este o superpoziţie de φ şi φ^*, cu notaţia $k\cdot x=\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x}$

$$\varphi(\vec{x},t)=\int\frac{d^4k}{\sqrt{(2\pi)^3}}\left(\alpha_k\, e^{-ik\cdot x}+\alpha_k^* e^{ik\cdot x}\right) \tag{13.22}$$

la numitor $\sqrt{(2\pi)^3}$ introdus pentru uz ulterior

- Cu relaţiile de bază: $E=\hbar\omega,\quad \vec{p}=\hbar\vec{k},\quad x^0=ct,\quad k^0=\omega/c=E/\hbar c$

$$k_\mu=\Big(\omega/c\ ,-\vec{k}\Big)\ ;\ p_\mu=\Big(E/c\ ,-\vec{p}\Big)\ ;\ x^\mu=\begin{pmatrix}ct\\ \vec{x}\end{pmatrix}\ ;\ \begin{cases}k\cdot x=\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x}\\ p\cdot x=Et-\vec{p}\cdot\vec{x}\end{cases}$$

Pentru $\hbar=c=1$ avem $d^4k=dk^0\, d^3\vec{k}=dE\, d^3\vec{p}=d^4p$

- Cu legătura între $\vec{p}$ şi E (conservare energie): $\delta\big(p^2-m^2\big)=\delta(E^2-|\vec{p}|^2-m^2)$

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x},t)&=\int\frac{d^4p}{\sqrt{(2\pi)^3}}\left[\alpha_k e^{-ip\cdot x}+\alpha_k^* e^{ip\cdot x}\right]\delta\big(p^2-m^2\big) \\ &=\int\frac{d^3\vec{p}}{\sqrt{(2\pi)^3}}\underbrace{dE\,\delta(E^2-|\vec{p}|^2-m^2)}\left[\alpha_k e^{-i(E(\vec{p})t-\vec{p}\cdot\vec{x})}+\alpha_k^* e^{i(E(\vec{p})t-\vec{p}\cdot\vec{x})}\right]\end{aligned} \tag{13.23}$$

- Deoarece E este funcţie de $|\vec{p}|$, efectuăm integrala $\displaystyle\int dE\,\delta(E^2-|\vec{p}|^2-m^2)$

folosind relaţia pentru funcţia $\delta[f(x)]=\dfrac{1}{|df/dx|_{x_0}}\delta(x-x_0)$, unde $f(E)=E^2-|\vec{p}|^2-m^2$,

pentru x_0 soluţia ecuaţiei $f(x)=0$, aici $x\equiv E$, adică $E^2-|\vec{p}|^2-m^2=0$,

avem soluţia de energie pozitivă $E_0(\vec{p})=+\sqrt{|\vec{p}|^2+m^2}$

- Soluţiile de *câmp (scalar) liber* real $\varphi_k(\vec{x},t)$ vor fi:

$\Rightarrow$ în variabilele $(E_0,\vec{p})$
$$\varphi(\vec{x},t)=\int\frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3}\,2E_0(\vec{p})}\left[\alpha_k e^{-i(E_0t-\vec{p}\cdot\vec{x})}+\alpha_k^* e^{i(E_0t-\vec{p}\cdot\vec{x})}\right] \tag{13.24}$$

$\Rightarrow$ în variabilele $(\omega_0,\vec{k})$
$$\varphi(\vec{x},t)=\int\frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3}\,2\omega_0(\vec{k})}\left[\alpha_k e^{-i(\omega_0t-\vec{k}\cdot\vec{x})}+\alpha_k^* e^{i(\omega_0t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\right] \tag{13.25}$$