

11.2.3 Sistem cuplat de trei oscilatori transversali

- Fie o coardă elastică întinsă de lungime $4a$, sub tensiune F , fixată la capete. De-a lungul acesteia sunt atașate la distanțe egale a , trei particule de mase egale m , vezi Figura 11.11. Dacă se scot particulele din această stare și se plasează în poziția inițială y_1^0, y_2^0 respectiv y_3^0 , după care se eliberează, sistemul începe să oscileze sub acțiunea forțelor elastice.

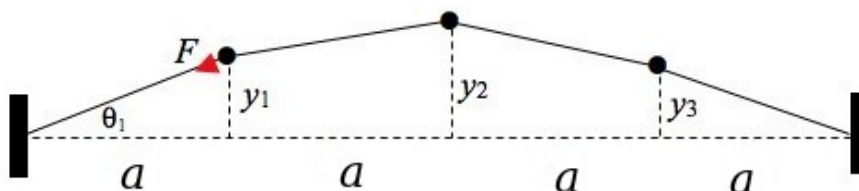


Figura 11.11: Un sistem oscilator transversal de trei mase m cu trei grade de libertate. Resorturile au constanta elastică k , lungimea liberă (netensionată) l_0 , lungimea în stare de echilibru a . Pozițiile curente y_i realizează alungirile celor patru resorturi $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$ și Δl_4 .

- În cele ce urmează căutăm să scriem sistemul de ecuații diferențiale de oscilație și să aflăm apoi soluțiile $y_1(t)$, $y_2(t)$ și $y_3(t)$ ce descriu oscilațiile acestor mase în timp. Vom face abordarea Lagrange a problemei, la fel ca în cazul oscilațiilor longitudinale. Pentru aceasta avem nevoie de exprimarea energiilor cinetice T și potențiale V ale sistemului nostru.

- Energia cinetică de oscilație pe verticală a întregului sistem este:
$$T = \frac{1}{2}m (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2) \quad (11.92)$$

- Pentru determinarea energiei potențiale avem nevoie de evaluarea alungirii Δl_i pentru fiecare din cele patru segmente de coardă. Lungimea acestor segmente (v. Figura 11.11) este:

$$\sqrt{a^2 + y_1^2} ; \sqrt{a^2 + (y_2 - y_1)^2} ; \sqrt{a^2 + (y_3 - y_2)^2} ; \sqrt{a^2 + y_3^2} \quad (11.93)$$

- Pentru deplasări y mici ($y \ll a$), aceste lungimi, printr-o dezvoltare binomială $(a + b)^n = a^n + n a^{n-1}b + \dots$ (aici $n = 1/2$) și neglijarea termenilor de ordin superior, devin:

$$a + \frac{y_1^2}{2a} ; a + \frac{(y_2 - y_1)^2}{2a} ; a + \frac{(y_3 - y_2)^2}{2a} ; a + \frac{y_3^2}{2} \quad (11.94)$$

- Atunci alungirile Δl_i , față de lungimea inițială a a fiecărui segment, sunt:

$$\Delta l_1 = \frac{y_1^2}{2a} ; \Delta l_2 = \frac{(y_2 - y_1)^2}{2a} ; \Delta l_3 = \frac{(y_3 - y_2)^2}{2a} ; \Delta l_4 = \frac{y_3^2}{2a} \quad (11.95)$$

- Se presupune că tensiunea F din coardă, pentru orice deplasare Δl_i , este constantă.

Atunci, energia potențială acumulată în coarda elastică este egală cu lucrul mecanic total pentru alungirile $\sum \Delta l_i$ ale segmentelor de coardă:

$$\begin{aligned}
V &= F(\Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \Delta\ell_3 + \Delta\ell_4) = \frac{F}{2a} \left[y_1^2 + (y_2 - y_1)^2 + (y_3 - y_2)^2 + y_3^2 \right] \\
&= k_T (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_2 - y_2 y_3) \quad \left. \begin{array}{l} \text{unde am notat:} \\ \text{(nu e const. elastică)} \end{array} \right\} k_T = \frac{F}{a}
\end{aligned} \tag{11.96}$$

De remarcat prezența termenilor mixti $y_1 y_2$ și $y_2 y_3$, care indică cuplajul ecuațiilor de mișcare.

Ecuatiile de mișcare

- Pentru ecuațiile de mișcare Euler-Lagrange avem nevoie de lagrangian-ul acestui sistem:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2) - k_T (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_2 - y_2 y_3) \tag{11.97}$$

- Ecuatiile Euler-Lagrange (3.4) sunt: $\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$ (3.4)

- Folosind expresia lagrangianului (11.97) și derivatele cerute în (3.4), obținem ecuația de mișcare pentru y_1 (e cuplată cu y_2): $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial y_1} = -k_T (2y_1 - y_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = m\dot{y}_1 \end{array} \right. \implies -k_T (2y_1 - y_2) = m\ddot{y}_1$ (11.98)

- Folosind expresia lagrangianului (11.97) și derivatele cerute în (3.4), obținem ecuația de mișcare pentru y_2 (e cuplată cu y_1 și y_3): $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial y_2} = -k_T (-y_1 + 2y_2 - y_3) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = m\dot{y}_2 \end{array} \right. \implies -k_T (-y_1 + 2y_2 - y_3) = m\ddot{y}_2$ (11.99)

- Folosind expresia lagrangianului (11.97) și derivatele cerute în (3.4), obținem ecuația de mișcare pentru y_3 (e cuplată cu y_2): $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial y_3} = -k_T (-y_2 + 2y_3) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} = m\dot{y}_3 \end{array} \right. \implies -k_T (-y_2 + 2y_3) = m\ddot{y}_3$ (11.100)

- Ecuatiile de mișcare (11.98) (11.99) și (11.100) sunt de tip oscilator armonic ($-ky = m\ddot{y}$):

$$\begin{array}{l}
-k_T (2y_1 - y_2) = m\ddot{y}_1 \\
-k_T (2y_2 - y_1 - y_3) = m\ddot{y}_2 \\
-k_T (2y_3 - y_2) = m\ddot{y}_3
\end{array} \tag{11.101}$$

Observație importantă: Ecuatiile mișcării transversale (11.101) pentru y_1 , y_2 și y_3 , sunt similare cu cele ale mișcării longitudinale (11.49) pentru X_1 , X_2 și X_3 (descriind pozițiile curente față de pozițiile de echilibru), prin înlocuirea constantei elastice $k \rightarrow k_T = F/a$.

Soluțiile ca moduri independente de oscilație

- Căutăm soluțiile $y_1(t)$, $y_2(t)$ și $y_3(t)$, ca abaterile față de poziția de echilibru, sub forma

$$\begin{array}{l}
y_1(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \\
y_2(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t \\
y_3(t) = E \cos \omega t + F \sin \omega t
\end{array} \quad \begin{array}{l}
\text{cu } \dot{y}_1(t) = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t \\
\text{cu } \dot{y}_2(t) = -\omega C \sin \omega t + \omega D \cos \omega t \\
\text{cu } \dot{y}_3(t) = -\omega E \sin \omega t + \omega F \cos \omega t
\end{array} \tag{11.102}$$

- Pentru determinarea constantelor de integrare folosim condițiile inițiale:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(0) = y_1^0 \quad \text{cu} \quad \dot{y}_1(0) = 0 \\ y_2(0) = y_2^0 \quad \text{cu} \quad \dot{y}_2(0) = 0 \\ y_3(0) = y_3^0 \quad \text{cu} \quad \dot{y}_3(0) = 0 \end{array} \right. \quad (11.103)$$

- Înlocuind condițiile inițiale în soluțiile generale (11.102), obținem constantele și soluțiile corespunzătoare (decuplate):

$$\left\{ \begin{array}{l} A = y_1^0 \quad B = 0 \\ C = y_2^0 \quad D = 0 \\ E = y_3^0 \quad F = 0 \end{array} \right. \quad \boxed{\begin{array}{l} y_1(t) = y_1^0 \cos \omega t \\ y_2(t) = y_2^0 \cos \omega t \\ y_3(t) = y_3^0 \cos \omega t \end{array}} \quad (11.104)$$

Amplitudinile și frecvențele modurilor independente de oscilație

- Înlocuind soluțiile (11.104) în ecuațiile inițiale (11.101) pentru y_1 , y_2 și y_3 , obținem:

$$\left\{ \begin{array}{l} -m\omega^2 y_1^0 = -2k_T y_1^0 + k_T y_2^0 \\ -m\omega^2 y_2^0 = k_T y_1^0 - 2k_T y_2^0 + k_T y_3^0 \\ -m\omega^2 y_3^0 = k_T y_2^0 - 2k_T y_3^0 \end{array} \right. \quad \text{sau} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu^2 \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (11.105)$$

unde am notat $\mu^2 = \frac{m\omega^2}{k_T}$

- Adică, am obținut un sistem de ecuații cu valori proprii:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} = \mu^2 \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{pmatrix} 2-\mu^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2-\mu^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2-\mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} = 0 \quad (11.106)$$

sistem identic cu cel din cazul oscilațiilor longitudinale (11.53), cu deosebire că acum $k \rightarrow k_T$.

- Acest sistem de ecuații omogen, are soluții diferite de zero dacă determinantul este zero:

$$\left| \begin{array}{ccc} 2-\mu^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2-\mu^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2-\mu^2 \end{array} \right| = 0 \quad \text{sau} \quad \left[(2-\mu^2)^2 - 2 \right] (2-\mu^2) = 0$$

- De aici avem valorile proprii μ^2 (11.105) (modurile de oscilație de frecvență ω_i) simultan pentru variabilele $y_1(t)$, $y_2(t)$ și $y_3(t)$ decuplate (11.104) ale celor trei oscilatori cuplați:

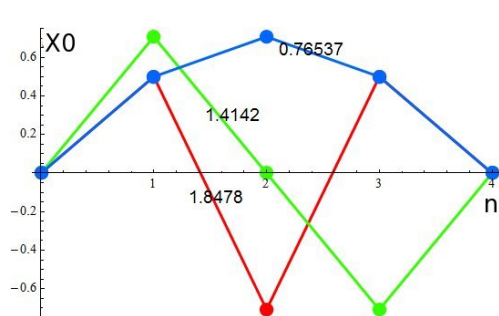
$$2 - \mu^2 = \pm\sqrt{2} \quad \text{adică} \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1^2 = \frac{(2 - \sqrt{2})k_T}{m} \\ \omega_2^2 = \frac{2k_T}{m} \\ \omega_3^2 = \frac{(2 + \sqrt{2})k_T}{m} \end{array} \right. \quad (11.107)$$

- Pentru aflarea vectorilor proprii (amplitudinile y_1^0 , y_2^0 și y_3^0 din (11.104)), înlocuim valorile proprii (11.107) în ecuația (11.106), care pentru fiecare valoare $\mu_i^2 = m\omega_i^2/k_T$, devine:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} = \mu_i^2 \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} \quad (11.108)$$

Ecuțiile matriceale (11.108), pentru fiecare din valorile proprii μ_i^2 , ne dau legătura între amplitudinile celor trei mase oscilante în cadrul fiecărui mod de oscilație:

$$\begin{aligned} \text{mod 1: } \mu_1^2 &= \frac{m\omega_1^2}{k_T} = 2 - \sqrt{2} \longrightarrow y_1^0 = y_3^0, \quad y_2^0 = \sqrt{2}y_1^0 \\ \text{mod 2: } \mu_2^2 &= \frac{m\omega_2^2}{k_T} = 2 \longrightarrow y_1^0 = -y_3^0, \quad y_2^0 = 0 \\ \text{mod 3: } \mu_3^2 &= \frac{m\omega_3^2}{k_T} = 2 + \sqrt{2} \longrightarrow y_1^0 = y_3^0, \quad y_2^0 = -\sqrt{2}y_1^0 \end{aligned} \quad (11.109)$$



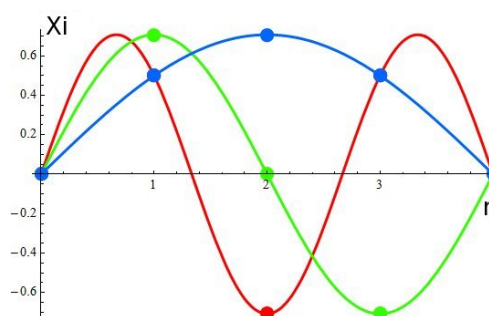
(a)

Amplitudinile y_1^0 , y_2^0 și y_3^0 (11.109) ale celor trei moduri de oscilație cu frecvențele (11.107).

$$\text{mod 1: } y_3^0 = y_1^0 \quad y_2^0 = \sqrt{2}y_1^0$$

$$\text{mod 2: } y_3^0 = -y_1^0 \quad y_2^0 = 0$$

$$\text{mod 3: } y_3^0 = y_1^0 \quad y_2^0 = -\sqrt{2}y_1^0$$



(b)

Mișcarea oscilatorie (11.104) a celor 3 mase, cu frecvențele (11.107) $\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})k_T/m$, $\omega_2^2 = 2k_T/m$, $\omega_3^2 = (2 + \sqrt{2})k_T/m$

$$\text{mod 1: } \omega_1 \sim \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 0.765$$

$$\text{mod 2: } \omega_2 \sim \sqrt{2} = 1.414$$

$$\text{mod 3: } \omega_3 \sim \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 1.848$$

(După M.S.Suzuki și I.S.Suzuki "Lecture Note on Oscillations and Waves")

https://www.researchgate.net/profile/Masatsugu_Suzuki

Figura 11.12: Cele trei moduri normale de oscilație transversală permise, corespunzător grade-ilor de libertate ale celor trei mase legate la distanțe egale pe o coardă elastică.

11.2.4 Sistem cuplat de n oscilatori transversali

- Considerăm o coardă elastică întinsă între două extremități fixe, de care sunt fixate n mase egale m , aflate la distanțe egale a în starea de echilibru (vezi Fig.11.13). Studiem oscilațiile transversale ale acestor mase legate elastic, pe direcția y .
- Pozițiile pe axa x a maselor oscilante sunt: $x_i = ia \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ (11.110)
- Condițiile la margine sunt: $y_0 = y_{n+1} = 0$ (11.111)

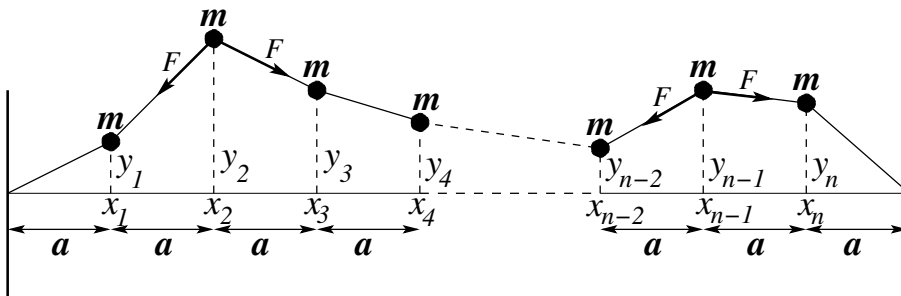


Figura 11.13: Un sistem oscilator transversal de n mase legate elastic.

- Căutăm ecuațiile de mișcare pentru acest sistem de oscilatori cuplați. Pentru acest lucru, considerăm o secțiune de coardă între elementele $i - 1$ și $i + 1$ (vezi Fig. 11.14). În procesul de oscilație deplasările față de pozițiile de echilibru sunt y_{i-1} , y_i și y_{i+1} . Cele două porțiuni de coardă din stânga și dreapta elementului i formează unghiurile θ_i respectiv θ_{i+1} cu orizontala.

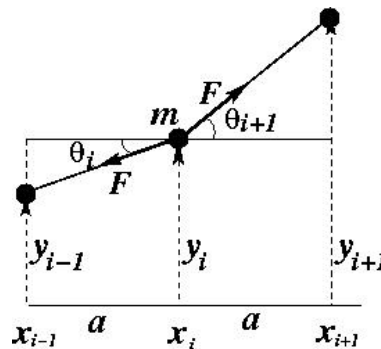


Figura 11.14: Segment de coardă dintr-un oscilator transversal cu n mase legate elastic.

- Pentru deplasări y mici $|\Delta y_i| \ll a$, avem $\theta \simeq \sin \theta \simeq \text{tg} \theta$:
$$\begin{cases} \sin \theta_i \approx \text{tg} \theta_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{a} \\ \sin \theta_{i+1} \approx \text{tg} \theta_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{a} \end{cases} \quad (11.112)$$

Ecuțiile de mișcare

- Să căutăm ecuația de mișcare pentru elementul i . Acesta este supus acțiunii a două forțe: tensiunea F din stânga și din dreapta lui.

• Ecuația de mișcare (Newton) este: $-F \sin \theta_i + F \sin \theta_{i+1} = m\ddot{y}_i$ (11.113)

• În aproximația unghiurilor mici (11.112) ecuația de mișcare se poate scrie: $\frac{F}{m} (\theta_{i+1} - \theta_i) = \ddot{y}_i$ (11.114)

• Folosind relația (11.112) pentru exprimarea unghiurilor prin coordonatele y_i , ecuația de mișcare devine: $\omega_0^2 (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = \ddot{y}_i$ (11.115)

unde am notat $\omega_0^2 = \frac{F}{ma} = \frac{k_T}{m}$

- Cum nu e nimic special în alegerea secvenței i , aceleași ecuații (11.115) sunt valabile pentru toate secvențele $i = 1, \dots, n$, adică pentru întregul șir de mase oscilante de-a lungul corzii. Excepție fac punctele de capăt $i = 0$ și $i = n + 1$. Cu toate acestea, ecuația de mișcare (11.115) poate include și aceste puncte, prin condițiile de margine $y_0 = 0$ și $y_{n+1} = 0$ cerute de orice ecuație diferențială de ordin doi. Acestea cer ca punctele extreme să aibe o deplasare transversală zero.

Soluțiile ca moduri independente de oscilație

• Căutăm soluțiile ecuației de mișcare (11.115), ca *moduri normale de oscilație*, la fel ca în cazul (11.67) al oscilațiilor longitudinale, sub forma de oscilații armonice:

$$y_i(t) = A \sin(k_T x_i) \cos(\omega t - \phi) \quad (11.116)$$

Amplitudine ce variază sinusoidal de-a lungul corzii

- Această soluție, sub formă factorizată ca produs de o componentă spațială și una temporală, descrie o mișcare oscilatorie armonică simplă (în fază, cu aceeași frecvență ω pentru toate elementele), specificată prin constantele $A > 0$, $k_T > 0$, $\omega > 0$, $\phi = \text{const.}$ Mai mult, oscilațiile au o amplitudine $A \sin(k_T x_i)$ care variază sinusoidal de-a lungul axei x a corzii, adică este periodică în spațiu, având lungimea de undă $\lambda = 2\pi/k_T$. Soluția (11.116) este o undă staționară, adică amplitudinile maxime și minime rămân în aceeași poziție x . Evoluția undei este periodică atât în spațiu cât și în timp.

Frecvențele modurilor independente de oscilație (componenta temporală)

- Pentru determinarea frecvențelor ω de mod de oscilație în timp, înlocuim (11.116) în (11.115):

$$\omega_0^2 A \left[\sin(k_T x_{i-1}) - 2 \sin(k_T x_i) + \sin(k_T x_{i+1}) \right] \cos(\omega t - \phi) = -\omega^2 A \sin(k_T x_i) \cos(\omega t - \phi)$$

$$\omega_0^2 \left[\sin\left(k_T \overbrace{(x_i - a)}^{x_{i-1}}\right) - 2 \sin(k_T x_i) + \sin\left(k_T \overbrace{(x_i + a)}^{x_{i+1}}\right) \right] = -\omega^2 \sin(k_T x_i)$$

$$\omega_0^2 \left[\cos k_T a - 2 + \cos k_T a \right] \sin(k_T x_i) = -\omega^2 \sin(k_T x_i)$$

unde am folosit $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$

$$\implies \omega = 2\omega_0 \sin\left(k_T \frac{a}{2}\right) \quad \text{am folosit } 1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2) \quad (11.117)$$

Deci frecvențele de mod normal ω sunt direct legate de valorile $k_T = \frac{F}{a}$ (vezi în continuare).

Lungimile de undă ale modurilor independente de oscilație (componenta spațială)

Folosind condiția la margine, $y_{n+1} = 0$ ($x_{n+1} = (n+1)a$), apoi din (11.116) avem: $\sin k_T x_{n+1} = \sin \underbrace{[k_T(n+1)a]}_{=j\pi} = 0$

- Adică valorile permise (cuantificate) pentru vectorul de undă $k_{Tj} = 2\pi/\lambda_j$ sunt date de:

$$k_{Tj} = \frac{j\pi}{a(n+1)} \quad (11.118)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

- j se numește *număr de mod de oscilație*. k_{Tj} specifică vectorul de undă $k = 2\pi/\lambda$ din componenta spațială a unei plane: $\sin(kx - \omega t)$. Un număr de mod j mic indică un număr de undă k_{Tj} mic, adică o lungime de undă λ_j mare (vezi Fig.11.15).

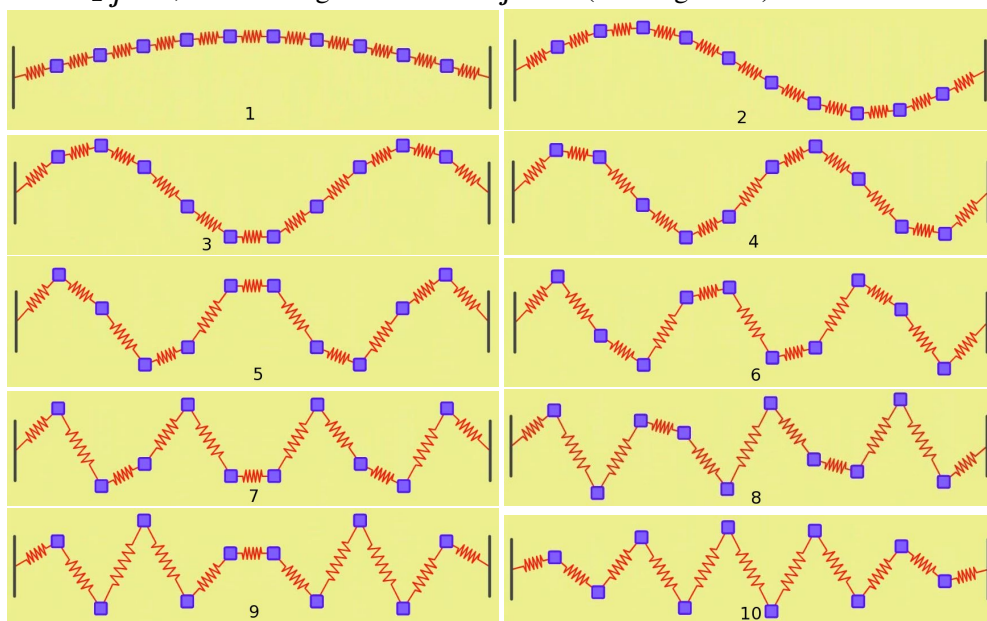


Figura 11.15: Componenta spațială $A \sin(k_{Tj}x)$ de unde staționare a unui sistem oscilator transversal de 10 mase legate elastic. Sunt figurate *modurile normale de oscilație* $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$, corespunzător fiecărui grad de libertate.

- Am văzut (11.117), componenta temporală specificată prin frecvența ω_j , este direct legată de cea spațială, specificată prin *vectorul de undă* k_{Tj} , astfel frecvențele cuantificate sunt:

$$\omega_j = 2\omega_0 \sin\left(k_{Tj} \frac{a}{2}\right) = 2\omega_0 \sin\left(\frac{j\pi}{2(n+1)}\right) \quad (11.119)$$

$(j = 1, 2, \dots, n)$ relație identică cu (11.69)

Fiecare grad de libertate prezintă caracteristici ondulatorii cuantificate, diferite în spațiu și timp. În spațiu, aceste *moduri normale de oscilație* se deosebesc prin lungimile de undă specificate de $k_{Tj} = 2\pi/\lambda_j$ prin relația (11.118), așa cum se vede în figura 11.15.

În timp, avem cuantificarea frecvențelor ω_j , specificate prin relația (11.119). Deci, numărul gradelor de libertate (10 în cazul din Figură) este egal cu numărul de mase oscilante legate elastic. Fiecare grad de libertate este o mărime cuantificată cu frecvențe (lungimi de undă) diferite în spațiu și în timp.

Tabel 11.3: Oscilații transversale cuplate - REZUMAT

Mărime fizică	1 particulă legată	2 - particule legate	3 - particule legate
Ecuții mișcare ($k_T = \frac{F}{a}$)	$-2k_T y = m\ddot{y}$	$-2k_T y_1 + k_T y_2 = m\ddot{y}_1$ $k_T y_1 - 2k_T y_2 = m\ddot{y}_2$	$-2k_T y_1 + k_T y_2 = m\ddot{y}_1$ $k_T y_1 - 2k_T y_2 + k_T y_3 = m\ddot{y}_2$ $k_T y_2 - 2k_T y_3 = m\ddot{y}_3$
Soluții mod de oscilație (decuplate)	$y(t) = y^0 \cos \omega t$	$y_1(t) = y_1^0 \cos \omega t$ $y_2(t) = y_2^0 \cos \omega t$	$y_1(t) = y_1^0 \cos \omega t$ $y_2(t) = y_2^0 \cos \omega t$ $y_3(t) = y_3^0 \cos \omega t$
Ecuția cu valori proprii $\mu^2 = \frac{m \omega^2}{k_T}$	$2y^0 = \mu^2 y^0$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} = \mu^2 \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} = \mu^2 \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix}$
Valori proprii μ_i (frecvența ω_i)	$\mu^2 = 2 \rightarrow \omega_1^2 = \frac{2k_T}{m}$	$\mu_1^2 = 3 \rightarrow \omega_1^2 = \frac{3k_T}{m}$ $\mu_2^2 = 1 \rightarrow \omega_2^2 = \frac{k_T}{m}$	$\mu_1^2 = 2 - \sqrt{2} \rightarrow \omega_1^2 = \frac{(2 - \sqrt{2})k_T}{m}$ $\mu_2^2 = 2 \rightarrow \omega_2^2 = \frac{k_T}{m}$ $\mu_3^2 = 2 + \sqrt{2} \rightarrow \omega_3^2 = \frac{(2 + \sqrt{2})k_T}{m}$
Vectori proprii (amplitudini y_i^0)	y^0	$y_2^0 = y_1^0$ $y_2^0 = -y_1^0$	$y_3^0 = y_1^0, y_2^0 = \sqrt{2}y_1^0$ $y_3^0 = -y_1^0, y_2^0 = 0$ $y_3^0 = y_1^0, y_2^0 = -\sqrt{2}y_1^0$

Tabel 11.4: Oscilații transversale de n particule legate elastic - REZUMAT

Mărime fizică	Expresia matematică
Ecuțiile mișcării (unde $k_T = \frac{F}{a}$)	$\frac{k_T}{m} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) = \ddot{y}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$
Soluții ca moduri independente de oscilație	$y_i(t) = A \sin(k_T x_i) \cos(\omega t - \phi) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$
Componenta spațială (lungimea de undă staționară) $k_{Tj} = 2\pi/\lambda_j$	$k_{Tj} = \frac{j\pi}{a(n+1)} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$
Componenta temporală (frecvența de oscilație ω_j)	$\omega_j = 2\omega_0 \sin\left(k_{Tj} \frac{a}{2}\right) = 2\omega_0 \sin\left(\frac{j\pi}{2(n+1)}\right) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$

Tabel 11.5: Oscilații transversale cuplate - REZUMAT

Sistem legat	Ecuatii mișcare $\left(k_T = \frac{F}{a}\right)$	Soluții mod de oscilație (decuplate)	Ecuatia cu valori proprii $\mu^2 = \frac{m \omega^2}{k_T}$	Valori proprii μ_i (frecvența ω_i)	Vectori proprii (amplitudini y_i^0)
1 particulă legată	$-2k_T y = m\ddot{y}$	$y(t) = y^0 \cos \omega t$	$2y^0 = \mu^2 y^0$	$\mu^2 = 2 \rightarrow \omega_1^2 = \frac{2k_T}{m}$	y^0
2 particule legate	$-2k_T y_1 + k_T y_2 = m\ddot{y}_1$ $k_T y_1 - 2k_T y_2 = m\ddot{y}_2$	$y_1(t) = y_1^0 \cos \omega t$ $y_2(t) = y_2^0 \cos \omega t$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} = \mu^2 \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$	$\mu_1^2 = 3 \rightarrow \omega_1^2 = \frac{3k_T}{m}$ $\mu_2^2 = 1 \rightarrow \omega_2^2 = \frac{k_T}{m}$	$y_2^0 = y_1^0$ $y_2^0 = -y_1^0$
3 particule legate	$-2k_T y_1 + k_T y_2 = m\ddot{y}_1$ $k_T y_1 - 2k_T y_2 + k_T y_3 = m\ddot{y}_2$ $k_T y_2 - 2k_T y_3 = m\ddot{y}_3$	$y_1(t) = y_1^0 \cos \omega t$ $y_2(t) = y_2^0 \cos \omega t$ $y_3(t) = y_3^0 \cos \omega t$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} = \mu^2 \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix}$	$\mu_1^2 = 2 - \sqrt{2} \rightarrow \omega_1^2 = \frac{(2 - \sqrt{2})k_T}{m}$ $\mu_2^2 = 2 \rightarrow \omega_2^2 = \frac{k_T}{m}$ $\mu_3^2 = 2 + \sqrt{2} \rightarrow \omega_3^2 = \frac{(2 + \sqrt{2})k_T}{m}$	$y_3^0 = y_1^0, \quad y_2^0 = \sqrt{2}y_1^0$ $y_3^0 = -y_1^0, \quad y_2^0 = 0$ $y_3^0 = y_1^0, \quad y_2^0 = -\sqrt{2}y_1^0$

11.3 Mecanica Câmpurilor Clasice

- Sistemele mecanice sunt caracterizate printr-un număr de *grade de libertate*. De exemplu, un pendul uni-dimensional are un singur grad de libertate, exprimat prin unghiul de oscilație. Două pendule legate între ele prezintă două grade de libertate (vezi secțiunea 3.3, pag.31).

Un câmp scalar $\phi(\vec{x}, t)$ corespunde unui sistem cu un număr infinit de grade de libertate, având în fiecare punct \vec{x} , valoarea $\phi(\vec{x}, t)$, variabilă și în timp.

- Descrierea cuantică a câmpurilor implică întâi descrierea mecanică a sistemelor continui (a câmpurilor) cu un număr infinit de grade de libertate și apoi cuantificarea acestora. Aceste două aspecte trebuiesc clar separate.

În acest sens am urmărit următoarea secvență:

1. descrierea unui sistem mecanic cu număr finit de grade de libertate
2. trecerea la un număr infinit de grade de libertate, dar tot în descrierea clasică - câmp clasic
3. trecerea la cuantificarea sistemului mecanic finit
4. trecerea la cuantificarea câmpului

11.3.1 Sistem mecanic oscilator transversal continuu (coardă oscilantă)

- Modelul unidimensional al unei coarde elastice de n mase oscilante, cu n grade de libertate, dezvoltat în secțiunea 11.2.4 poate fi extins prin creșterea gradelor de libertate n odată cu descreșterea distanței $\Delta x \equiv a$ dintre componente (Figura 11.13), astfel încât lungimea coardei $L = na$ să rămână constantă.
- Generalizând cazul a trei oscilatori transversali din secțiunea 11.2.3, expresiile energiei cinetice (11.92) și a energiei potențiale (11.96), avem:

- Energia cinetică a n -mase oscilante, similar (11.92)
$$T = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \dot{y}_i^2 \quad (11.120)$$

- Energia potențială a n -mase oscilante (folosim $\Delta x \equiv a$), similar (11.96)

$$V = \frac{F}{2a} \sum_{i=0}^n (y_{i+1} - y_i)^2 = \frac{F}{2} \sum_{i=0}^n \Delta x \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \right)^2 \longrightarrow \frac{F}{2} \int_0^L dx \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \quad (11.121)$$

cu condițiile la margine (11.111): $y_0 = y_{n+1} = 0$

(11.120) și (11.121) | ne dă lagrangian-ul
$$L = T - V = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \dot{y}_i^2 - \frac{F}{2a} \sum_{i=0}^n (y_{i+1} - y_i)^2 \quad (11.122)$$

- Ecuațiile Euler-Lagrange (3.4) sunt:
$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) = 0 \quad (3.4)$$

- Folosind lagrangianul (11.122) și derivatele cerute în (3.4), obținem ecuațiile de mișcare

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial y_i} = -\frac{\partial V}{\partial y_i} = \frac{F}{a} [(y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_{i-1})] \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = m\dot{y}_i \implies \frac{F}{a} [(y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_{i-1})] = m\ddot{y}_i \end{cases} \quad (11.123)$$

- Trecând la o distribuție continuă, ecuația de mișcare (11.123) se poate scrie:

$$\frac{F}{a} \left[\left(y(x+a) - y(x) \right) - \left(y(x) - y(x-a) \right) \right] = \overbrace{\rho a}^m \ddot{y}(x) \quad (11.124)$$

- la limita $\Delta x \equiv a \rightarrow 0$, avem $\frac{y(x+a) - y(x)}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+a/2}$

trecând $a \equiv \Delta x$ de lângă ρ , în membrul stâng la numitor, acesta devine:

$$\frac{F}{\Delta x} \left[\frac{y(x+a) - y(x)}{\Delta x} - \frac{y(x) - y(x-a)}{\Delta x} \right] \approx \frac{F}{\Delta x} \left[\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+a/2} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x-a/2} \right] \rightarrow F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Atunci (11.124) se poate scrie: $\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \\ \text{Comparând cu ecuația undelor: } \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v^2 = \frac{F}{\rho} \quad (11.125)$

- Lagrangianul pentru o coardă oscilantă (sistem cu număr infinit de grade de libertate, este:

$$L = T - V = \int_0^L \mathcal{L}(x) dx \quad \text{cu} \quad \mathcal{L}(x) = \underbrace{\frac{1}{2} \rho \dot{y}^2(x, t)}_T - \underbrace{\frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2}_V \quad (11.126)$$

- Oscilațiile transversale ale coardei continue de mase vor putea fi folosite la descrierea oscilațiilor, prin amplitudinea $\phi(x, t)$ de deplasare față de poziția de echilibru a fiecărui element dl de coardă din jurul punctului de coordonată x la momentul t . În acest fel am trecut de la un sistem discret, cu număr finit de grade de libertate, deplasările $y_i(t)$, la unul cu număr infinit de grade de libertate, câmpul de deplasări $\phi(x, t)$ (vezi Figura 11.16).

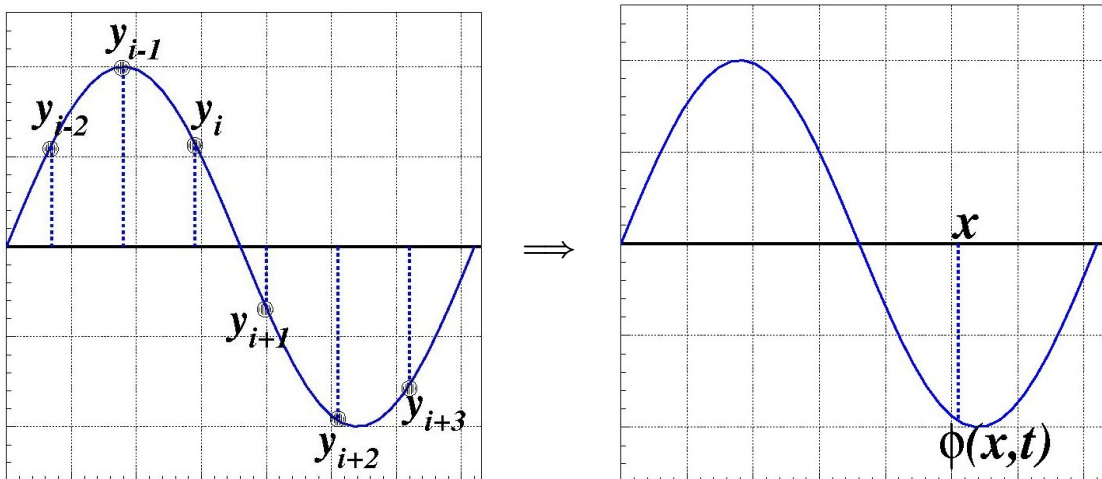


Figura 11.16: Trecerea de la un șir discret legat de n -mase oscilante cu număr finit de grade de libertate, la o coardă continuă cu un număr infinit de grade de libertate (câmp).

11.3.2 Descrierea mecanic lagrangiană a câmpurilor clasice

- Să încercăm să folosim descrierea lagrangiană a ecuațiilor de mișcare din mecanică clasică la ecuațiile corespunzătoare de evoluție pentru câmpuri. In acest scop va trebui să trecem de la un sistem mecanic cu un număr finit n de grade de libertate la unul infinit $n \rightarrow \infty$. Pentru claritate, vom considera la început un sistem unidimensional (mișcarea pe verticală) descris prin evoluția în timp a coordonatei $y_i(t)$ pentru cele $i = 1, 2, \dots, n$ componente. In acest fel în locul ecuației de mișcare din mecanică cu soluția $y_i(t)$ (11.116), vom căuta soluția $\phi(x, t)$ de evoluție a câmpului (amplitudinii de câmp).

- In fiecare punct x avem câte un element (un grad de libertate) $\phi(x, t)$, astfel că sistemul de câmp prezintă a infinitate continuă de grade de libertate.

- In cazul câmpurilor apare o particularitate legată de faptul că ϕ este o funcție continuă de x , astfel că lagrangianul \mathcal{L} depinde de ϕ și $\dot{\phi} \equiv \partial\phi/\partial t$, dar și de $\partial\phi/\partial x$ (nu doar de ϕ și $\dot{\phi}$ echivalentele pentru x și \dot{x} din mecanică), adică: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_x\phi, \partial_t\phi)$

- Energia totală a sistemului unidimensional de coardă oscilantă, este exprimată atât prin $\partial_t\phi$ (termen energie cinetică) cât și $\partial_x\phi$ (termen energie potențială) ca o sumă (integrală) de aceste energii, cu $m = \rho dx$:

$$E = \int_0^L \left[\frac{\rho}{2} (\partial_t\phi)^2 + \frac{\rho v^2}{2} (\partial_x\phi)^2 \right] dx \quad (11.127)$$

- Adică densitatea de lagrangian de câmp (ce depinde atât de $\partial_x\phi$ cât și de $\partial_t\phi$) este:

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} (\partial_t\phi)^2 - \frac{\rho v^2}{2} (\partial_x\phi)^2 \quad (11.128)$$

- Alegerea s-a făcut cu factorii ρ - densitate masică și v - viteză, din motive de dimensionalitate corectă pentru \mathcal{L} (energie/volum). Echivalentul mecanic cu $\phi \rightarrow x$, este $L = mv^2/2$.

- Să trecem la formularea lagrangiană cu ajutorul densității de lagrangian \mathcal{L}

$$L(\phi, \partial_x\phi, \partial_t\phi) = \int dx \mathcal{L}(\phi, \partial_x\phi, \partial_t\phi) \quad (11.129)$$

- Acțiunea este definită (11.5) prin integrala temporală din Lagrangian

$$S = \int dt L(\phi, \partial_x\phi, \partial_t\phi) \quad (11.130)$$

- Conform principiului minime acțiuni, ecuația de evoluție a câmpului ϕ este stabilită de anularea variației acțiunii (vezi (C.2) Anexa C, pag.266):

$$\delta S = \int dt \delta L(\phi, \partial_x\phi, \partial_t\phi) = 0 \quad (11.131)$$

$$\delta S = \int dt \int dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi)} \delta (\partial_x \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} \delta (\partial_t \phi) \right] dx \quad (11.132)$$

- Integrând prin părți termenii cu $\delta(\partial_x\phi)$ și $\delta(\partial_t\phi)$ la fel ca în mecanică (pag.30) obținem

$$\delta S = \int dt \int dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} \right) \right] \delta \phi = 0 \quad (11.133)$$

- $\delta S = 0$ pentru orice $\delta\phi$ dacă integrantul este zero. Astfel obținem *ecuația Euler-Lagrange pentru câmp* (similar cu cazul din mecanica clasică (3.10) pag.30):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} \right) = 0 \quad (11.134)$$

- Generalizarea la un câmp 3-dimensional conduce la *ecuația Euler-Lagrange pentru câmp*:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \phi)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} \right) = 0} \quad (11.135)$$

- Inlocuind \mathcal{L} (11.128) în ecuația Euler-Lagrange pentru câmp (11.134) obținem,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (11.136)$$

adică am obținut ecuația de propagare a undelor, de data asta plecând de la ecuația Euler-Lagrange pentru câmp.