

9.9 Transformări de calibrare pentru câmpul electromagnetic

- In expresia (8.35) a câmpului \vec{B} prin potențial: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$
 și în expresia (8.36) a câmpului \vec{E} prin potențiale: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
 intervin doar derivatele acestor potențiale. De aceea, în determinarea funcțiilor de potențial $\phi(x, y, z, t)$ și $\vec{A}(x, y, z, t)$, pentru niște funcții de câmp $\vec{E}(x, y, z, t)$ și $\vec{B}(x, y, z, t)$ date, va trebui să alegem constantele de integrare potrivite.
 In acest fel obținem calibrarea valorilor de potențial.

- De exemplu, dacă luăm doar câmpul electrostatic $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, prin adăugarea la potențialul ϕ a unei mărimi C independentă de coordonate ($\vec{\nabla}C = 0$), se obține calibrarea potențialului scalar ϕ

$$\left. \begin{array}{l} \text{nu modifică } \vec{E}, \\ \vec{E}' = -\vec{\nabla}(\phi + C) = -\vec{\nabla}\phi = \vec{E} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \phi' = \phi + C \quad (9.46) \\ \vec{E}' = -\vec{\nabla}(\phi + C) = -\vec{\nabla}\phi = \vec{E} \end{array}$$

9.9.1 Transformări de calibrare pentru potențialele ϕ și \vec{A}

- Pentru a păstra invariant câmpul magnetic (8.35): $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$
 putem face o transformare generală a potențialului vector \vec{A} , prin adăugarea gradientului (derivata spațială a) unei funcții scalare χ , deoarece rotor de gradient este zero: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi = 0$.
 In acest fel realizăm calibrarea potențialului \vec{A} . Ca urmare,

- Potențialul vector \vec{A} , după transformarea de calibrare, va fi,

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi} \quad (9.47)$$

cu derivata spațială

Intr-adevăr, $\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$

- Transformarea $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ (9.47) asigură invarianța \vec{B} , dar nu și invarianța \vec{E} :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ = -\vec{\nabla}\left(\phi + \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{array} \right\}$$

- Pentru a asigura și invarianța câmpului electric (8.36) $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

după cum în transformarea de calibrare (9.47) la potențialul vector \vec{A} am adăugat derivata spațială $\vec{\nabla}\chi$, aici, la potențialul scalar ϕ adăugăm derivata temporală $-\partial\chi/\partial t$, care anulează noul termen apărut $\partial\chi/\partial t$ mai sus, restabilind și invarianța \vec{E} .

- Astfel, transformarea de calibrare a potențialului scalar ϕ este

$$\boxed{\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}} \quad (9.48)$$

cu derivata temporală

- Intr-adevăr, acum avem invarianța atât a câmpului electric \vec{E} (8.36) cât și a câmpului magnetic \vec{B} (8.35):

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}\chi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}\chi = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \quad (9.49)$$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

- In concluzie, transformarea câmpului electric, dată de variația $\partial\chi/\partial t$ a potențialului scalar (9.48), este compensată de variația $\Delta\chi$ a potențialului vector (9.47) (vezi termenii ce se anulează reciproc în expresia E' (9.49)). \vec{B} și \vec{E} rămân neschimbate dacă folosim o funcție scalară de calibrare (gauge) $\chi(\vec{r}, t)$ și transformăm simultan atât \vec{A} (adunând derivata spațială) (9.47), cât și ϕ (adunând derivata temporală) (9.48). De aceea, câmpurile de calibrare de tip $\chi(\vec{x}, t)$ se mai numesc și câmpuri de compensare.

- **Nota importantă:** Când se va trece la cuantificarea câmpurilor, potențialele joacă rolul funcțiilor de undă din mecanica cuantică.

9.9.2 Ecuția câmpului χ de calibrare Lorenz

- Transformările de calibrare pentru potențialul vector \vec{A} (9.47) și potențialul scalar ϕ (9.48), am văzut sunt:

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \\ \phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \end{cases} \quad (9.50)$$

- Transformările de calibrare (9.50) se pot scrie sub formă covariantă (4-dimensională)

$$(A^\mu)' = A^\mu - \partial^\mu\chi \quad (9.51)$$
 unde $A^\mu = (\phi, \vec{A})$; $A_\mu = (\phi, -\vec{A})$

- Calibrarea Lorenz (8.42) exprimă o relație între potențialele ϕ și \vec{A} ,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (9.52)$$

- Inlocuind (9.50) în calibrarea Lorenz (9.52) pentru \vec{A}' și ϕ' , avem,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi'}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2\chi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0$$

sau

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t}}_{=0 \text{ (9.52)}} = \boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} - \nabla^2\chi = 0} \quad \text{ecuația undelor} \quad (9.53)$$

- Rezultă că atât \vec{A}' și ϕ' cât și \vec{A} și ϕ satisfac (pentru orice undă scalară χ) transformarea de calibrare Lorenz (9.52).
- Observație. În calibrarea Lorenz toate mărimile au comportament ondulator: potențialul scalar ϕ , potențialul vector \vec{A} , câmpul electric \vec{E} , câmpul magnetic \vec{B} și câmpul scalar de calibrare χ .

Exemplu de câmp de calibrare χ pentru potențialul \vec{A}

- Fie un câmp magnetic \vec{B} de componente $B_x=0$, $B_y=0$ și $B_z=b$. Conform definiției (2.6), componenta $B_z = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z$ este:

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \xrightarrow{\text{transf. (9.47)}} B_z = \frac{\partial A'_y}{\partial x} - \frac{\partial A'_x}{\partial y}$$

- O reprezentare posibilă a câmpului \vec{B} cu ajutorul potențialului vector \vec{A} poate fi cea de componente:

$$A_x=0, \quad A_y=bx, \quad A_z=0$$
- Această reprezentare nu este unică. Dacă facem o transformare de calibrare $\chi = cxy$ (c se va determina imediat)

$$\text{adică } \nabla_x \chi = cy \quad \text{și} \quad \nabla_y \chi = cx$$
- Ca urmare a transformării de calibrare (9.47), noul potențial vector \vec{A}' va fi:

$$\begin{cases} \vec{A}'_x = \vec{A}_x + \nabla_x \chi = 0 + cy \\ \vec{A}'_y = \vec{A}_y + \nabla_y \chi = bx + cx \\ \vec{A}'_z = \vec{A}_z + \nabla_z \chi = 0 + 0 \end{cases}$$
- dacă alegem calibrarea $c = -b$, noile componente de potențial vector devin

$$\Rightarrow \vec{A}'_x = -by, \quad \vec{A}'_y = 0, \quad \vec{A}'_z = 0$$

- O altă reprezentare posibilă a aceluiași câmp \vec{B} cu ajutorul potențialului vector \vec{A} , poate fi:

$$A_x = -\frac{b}{2}y, \quad A_y = \frac{b}{2}x, \quad A_z = 0$$
- Pentru aceeași transformarea de calibrare, $\chi = cxy$ (c se va determina imediat)

$$\begin{cases} \vec{A}'_x = \vec{A}_x + \nabla_x \chi = -\frac{b}{2}y + cy \\ \vec{A}'_y = \vec{A}_y + \nabla_y \chi = \frac{b}{2}x + cx \\ \vec{A}'_z = \vec{A}_z + \nabla_z \chi = 0 + 0 \end{cases}$$
- dacă alegem calibrarea $c = \frac{b}{2}$, noile componente de potențial vector devin

$$\Rightarrow \vec{A}'_x = 0, \quad \vec{A}'_y = bx, \quad \vec{A}'_z = 0$$

9.10 Invarianța de calibrare în electrodinamica clasică (Rezumat)

Am văzut

- Ecuația Maxwell (??c) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (??c)
 sugerează existența unui potențial vector \vec{A} pentru câmpul magnetic \vec{B} (8.35) (divergență de rotor = 0) $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ (8.35)
 Calibrarea potențialului vector \vec{A} permite adăugarea derivatei spațiale (gradientul) unui câmp scalar arbitrar χ la potențialul vector \vec{A} (rotor de gradient = 0) (9.47) $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ (9.47)
 această transformare nu modifică câmpul magnetic \vec{B} \longrightarrow invarianța câmpului \vec{B} .

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$
 (9.54)

- Similar, ecuația Maxwell (??b) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (??b)
 sugerează existența unui potențial scalar ϕ pentru câmpul electric \vec{E} (8.36) (rotor de gradient = 0) $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ (8.36)
 Calibrarea potențialului scalar ϕ permite adăugarea derivatei temporale a unui câmp scalar arbitrar χ la potențialul scalar ϕ (9.48) $\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$ (9.48)
 această transformare nu modifică câmpul electric \vec{E} \longrightarrow invarianța câmpului \vec{E} .

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\chi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\chi = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$
 (9.55)

- Calibrarea Lorenz (8.42) exprimă o relație între potențialele ϕ și \vec{A} , $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$ (8.42)
 Pentru transformările de calibrare \vec{A}' (9.47) și ϕ' (9.48) obținem ecuația câmpului de calibrare χ $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \nabla^2 \chi = 0$ (9.53)

- In notații covariante, folosind expresia 4-dimensională a câmpului electromagnetic prin tensorul $F^{\mu\nu}$ (9.36) $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ (9.36)
 $A^\mu = (\phi, \vec{A})$
 Calibrarea 4-potențialului A^μ , conform (9.47) și (9.48) $(A^\mu)' = A^\mu - \partial^\mu \chi$ (9.56)
 aceasta nu modifică câmpul electromagnetic $F^{\mu\nu}$ \longrightarrow invarianța câmpului $F^{\mu\nu}$
In concluzie: Folosind diverse 4-potențiale $(A^\mu)'$, ce diferă prin derivatele unui câmp scalar arbitrar χ , putem descrie aceeași electrodinamică (câmpuri electromagnetice).

- Cele două ecuații Maxwell de mai sus (??c) și (??b) se pot scrie sub forma identității Bianchi (9.45) $\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0$ (9.45)
 Celelalte două ecuații Maxwell (??a) și (??d) de asemenea se pot scrie sub forma compactă $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu$ (9.42)

9.11 Rezumat

Ecuțiile Maxwell pentru câmpuri	Legătura între câmp și potențial	Calibrare potențiale	Ecuția potențialelor	Ecuție propagare potențiale ($\rho = 0, \vec{j} = 0$)
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ <p>(1)</p>	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ $\Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ <p>(5)</p>	<p>Calibrare potențial \vec{A} (invarianța \vec{B})</p> $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \quad (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi = 0)$ $\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ <p>(11)</p>		
$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ <p>(2)</p>	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$ $\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi$ <p>(6)</p>	<p>Calibrare potențiale \vec{A} și ϕ (invarianța \vec{E})</p> $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \quad \left(\begin{matrix} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}\chi \\ - \vec{\nabla}\phi \end{matrix} \right) \text{ sau 4-dimensional}$ $\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad \left(\begin{matrix} - \vec{\nabla}\phi \\ + \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{matrix} \right) \quad (A^\mu)' = A^\mu - \partial^\mu \chi$ $\vec{E}' = -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi' = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}\chi - \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\frac{\partial \chi}{\partial t}$ $= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi = \vec{E}$ <p>(12)</p>	<p>Ecuție câmp de calibrare χ</p> <p>Fie calibrarea Lorenz pentru \vec{A}' și ϕ'</p> $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla^2 \chi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$ <p>(Lorenz)</p> <p>(13)</p>	$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \nabla^2 \chi = 0$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ <p>(3)</p>	$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi$	<p>Calibrarea Coulomb: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$</p> <p>Calibrarea Lorenz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$</p> $-\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \text{ (Lorenz)}$ <p>(7)</p>	<p>Sursa de potențial \vec{A} divergent este $\frac{\partial \phi}{\partial t}$</p> $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ <p>(9)</p>	$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$ <p>(4)</p>	$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (*)$ $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi$	$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \mu_0 \vec{j}$ <p>(Lorenz)</p> <p>(8)</p>	$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$ <p>(10)</p>	$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = 0$

*) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$

Capitol 10

Câmpuri de calibrare (gauge)

10.1 Transformări de calibrare pentru câmpul electromagnetic

- Am văzut, cu ajutorul transformărilor de calibrare (9.50) (pag.156), am obținut un câmp scalar χ care modifică potențialele scalar ϕ și vector \vec{A} , fără a modifica însă și câmpurile \vec{E} și \vec{B} ce derivă din aceste potențiale.
- Deci, transformările de calibrare (9.50) pentru potențialele scalar ϕ și vector \vec{A} sunt

$$\begin{cases} \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \end{cases} \quad (9.50)$$
- sau în notații 4-dimensionale

$$\begin{cases} A^\mu = (\phi, \vec{A}) \\ \partial^\mu = (\partial^t, -\vec{\nabla}) \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} (A^\mu)' = A^\mu - \partial^\mu \chi \end{cases} \quad (9.51)$$
- Aceste transformări păstrează invariante:
 - componentele de câmp \vec{E} (9.55) și \vec{B} (9.54)
 - elementele tensorului de câmp EM $F^{\mu\nu}$ (9.36)
 - ecuațiile Maxwell omogene $\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$ (9.45)
 - ecuațiile Maxwell neomogene $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$ (9.42)
 - în plus, indică existența unui câmp de calibrare $\chi(\vec{x}, t)$ ce satisface aceeași ecuație de propagare a undelor (9.53)
- O *transformare de calibrare globală* (independentă de coordonate) cum ar fi translație cu o valoare constantă a potențialului scalar $\phi' = \phi + C$ (9.46) implică o lege de conservare. În acest caz avem de a face cu conservarea sarcinii electrice (vezi teorema Noether), prin ecuația de continuitate (conservarea curentului) (9.25).
- Dacă extindem transformarea de calibrare a potențialului electrostatic (scalar) ϕ (9.50), la o *transformare de calibrare locală*, dependentă de coordonate, cu mărimea $-\partial\chi/\partial t$, aceasta implică invarianța ecuațiilor Maxwell printr-o schimbare simultană a potențialului vector \vec{A} cu $\vec{\nabla}\chi$, prin apariția unui câmp de calibrare χ .
- Putem generaliza: când o invarianță globală este extinsă la una locală, aceasta atrage existența unui câmp de calibrare (compensare) ce asigură invarianța locală a ecuațiilor de mișcare.

10.1.1 Particula încărcată în câmp electric și magnetic (tratate clasică)

Forța Lorentz

- Asupra unei particule, cu sarcină electrică q ce se mișcă cu viteza \vec{v} în câmp electric \vec{E} și câmp magnetic \vec{B} , acționează forța Lorentz:
$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (10.1)$$

- Exprimarea \vec{E} și \vec{B} prin potențialele scalar ϕ și vector \vec{A} este: (vezi 8.4, pag. 132)
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (10.2)$$

- Inlocuind (10.2) în (10.1), obținem:
$$\vec{F} = q \left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right)$$

- Dezvoltarea dublului produs vectorial
$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

conduce la expresia forței Lorentz:
$$\vec{F} = q \left(-\vec{\nabla}\phi - \underbrace{\left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \right]}_{\text{derivata totală}} + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) \right)$$

$$\text{dar } \frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial x_i} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

- In final, expresia forței Lorentz este:
$$\vec{F} = q \left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) \right) \quad (10.3)$$

- Pentru a scrie ecuația de mișcare a unei particule de sarcină q aflată în câmp electric și magnetic staționar, avem nevoie de Lagrangian-ul (3.17) și Hamiltonian-ul (3.20) corespunzător.

- Pentru mișcarea unidimensională: $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ iar $V = -\int F(x) dx$

- Forța Lorentz (10.3) $F(x)$, independentă de timp ($\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$):
$$\vec{F} = q \left(-\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) \right)$$

Lucrul mecanic elementar efectuat de această forță este:

$$dL_{mec} = F \cdot dx = -q \frac{d\phi}{dx} dx + q \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{A})}{dx} dx = -q d\phi + q d(\vec{v} \cdot \vec{A})$$

Deci, în final, energia potențială este:
$$V = -\int F(x) dx = q\phi - q\dot{x}A \quad (10.4)$$

- Lagrangian-ul:
$$L = T - V = \frac{m\dot{x}^2}{2} - q\phi + \underbrace{q\dot{x}A}_j \quad \text{iar} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA \quad (10.5)$$

unde $j = q\dot{x}$ este curentul sarcinii q .

- Hamiltonian-ul:
$$H = p\dot{x} - L = (m\dot{x} + qA)\dot{x} - \frac{m\dot{x}^2}{2} + q\phi - q\dot{x}A = \frac{m\dot{x}^2}{2} + q\phi$$

- Inlocuind $\dot{x} \rightarrow p$ din (10.5) $\dot{x} = \frac{p - qA}{m}$ obținem
$$H = \frac{(p - qA)^2}{2m} + q\phi \quad (10.6)$$

Deoarece $H = E$ energia totală, atunci
$$\frac{(p - qA)^2}{2m} = E - q\phi$$

- In absența câmpului electromagnetic ($\phi = 0, A = 0$),
energia totală a particulei este doar energia ei cinetică:
$$E = \frac{p^2}{2m}$$
- Deci, contribuția câmpului electro-
magnetic se traduce prin înlocuirile:
$$\begin{cases} p \rightarrow (p - qA) \\ E \rightarrow (E - q\phi) \end{cases} \quad \text{sau} \quad p_\mu \rightarrow p_\mu - qA_\mu \quad (10.7)$$

10.2 Transformări de calibrare în mecanica cuantică

10.2.1 Ecuația Schrödinger pentru particula în câmp electromagnetic

- Hamiltonian-ul, ca energia totală E a particulei în câmp electric și magnetic, exprimat prin operatori, este dat de (10.6)
$$\frac{(\hat{p} - qA)^2}{2m} + q\phi = \hat{E} \quad (10.8)$$

- Ecuația Schrödinger se obține prin înlocuirile cu operatorii diferențiali (4.26)
$$p \rightarrow \hat{p} = -i\hbar\nabla \quad ; \quad E \rightarrow \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad (4.26)$$

adică
$$\left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla - qA \right)^2 + q\phi \right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad (10.9)$$

sau
$$\frac{1}{2m} \left[-i\hbar \underbrace{\left(\nabla - \frac{i}{\hbar} qA \right)}_{\hat{D}} \right]^2 \psi(x, t) = i\hbar \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} q\phi \right)}_{\hat{D}^0} \psi(x, t) \quad (10.10)$$

sau
$$\boxed{\frac{1}{2m} \left(-i\hbar\hat{D} \right)^2 \psi(x, t) = i\hbar\hat{D}^0 \psi(x, t)} \quad (10.11)$$

- A se remarca introducerea în ecuația Schrödinger pentru particula încărcată aflată în câmp electromagnetic, a noilor operatori diferențiali \hat{D} și \hat{D}^0 în locul ∇ și $\partial/\partial t$.
$$\begin{cases} \hat{D} = \nabla - \frac{i}{\hbar} qA \\ \hat{D}^0 = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} q\phi \end{cases} \quad (10.12)$$

corespunzători mărimilor p și E , similar (4.26):
$$\hat{p} \rightarrow -i\hbar\hat{D} \quad ; \quad \hat{E} \rightarrow i\hbar\hat{D}^0 \quad (10.13)$$

10.2.2 Transformarea de calibrare a ecuației Schrödinger

- Am văzut pag.160, că potențiale nu sunt unice, ele pot fi alese diferit, printr-o transformare de calibrare (9.50). In urma acestor transformări însă, componentele \vec{B} (9.54) și \vec{E} (9.55) ale unui câmp electromagnetic, rămân neschimbate. La fel rămân neschimbate și ecuațiile Maxwell (7.13)
$$\begin{cases} \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \\ \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \end{cases} \quad (9.50)$$

- Soluția $\psi(x, t)$ a ecuației Schrödinger (10.11) descrie complet starea cuantică de mișcare a particulei încărcate în potențialele ϕ și \vec{A} .
- Dacă facem aceleași transformări (9.50) ale potențialelor și în ecuația Schrödinger (10.10), soluțiile vor descrie oare aceeași stare fizică ca soluțiile $\psi(x, t)$ ale ecuației inițiale (10.10) ?
- Să facem deci transformările de calibrare (9.50) în ecuația Schrödinger (10.10) pentru particula în câmp electromagnetic. Obținem ecuația Schrödinger pentru noua funcție $\psi'(x, t)$:

$$\frac{1}{2m} \left[-i\hbar \underbrace{\left(\nabla - \frac{i}{\hbar} q \mathbf{A}' \right)}_{\hat{D}'} \right]^2 \psi'(x, t) = i\hbar \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} q \phi' \right)}_{\hat{D}^{0'}} \psi'(x, t) \quad (10.14)$$

sau

$$\boxed{\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \hat{D}' \right)^2 \psi'(x, t) = i\hbar \left(\hat{D}^{0'} \right) \psi'(x, t)} \quad (10.15)$$

- Să vedem acum care este legătura între ψ' (soluția ecuației (10.15) după transformarea de calibrare a potențialelor electromagnetice) și ψ (soluția ecuației inițiale (10.11)). În acest fel vom determina condițiile cerute ca ψ' să descrie aceeași stare fizică ψ , deci ca transformarea de calibrare pentru ecuațiile Maxwell să păstreze simetria (invarianța) și pentru ecuațiile Schrödinger.
- Folosind relațiile de calibrare (9.50) ce leagă potențialele \vec{A} și ϕ de \vec{A}' și ϕ' , căutăm relațiile între stările $\psi(x, t)$ și $\psi'(x, t)$ ce satisfac ecuațiile Schrödinger (10.11) și respectiv (10.15).
- Să căutăm legătura între starea inițială $\psi(x, t)$ și cea finală $\psi'(x, t)$, sub forma înmulțirii cu un factor de fază $e^{iq\chi/\hbar}$, care nu modifică starea cuantică. Această legătură conține același câmp de calibrare $\chi(x, t)$, folosit în (9.50), ce va trebui determinat. Apoi să stabilim condițiile în care această legătură este asigurată.
- Transformarea de calibrare (gauge) a stării Schrödinger $\psi(x, t)$ este realizată printr-o deplasare de fază $q\chi(x, t)$ locală, la noua stare $\psi'(x, t)$

$$\boxed{\psi'(x, t) = e^{iq\chi/\hbar} \psi(x, t)} \quad (10.16)$$

- ψ și ψ' descriu aceeași stare fizică. Într-adevăr, densitatea de probabilitate a stării fizice respective este $|\psi|^2 = |\psi'|^2$. Conform (10.16) ele se deosebesc printr-un factor de fază, care în modul la pătrat se anulează: $|\psi'|^2 = \psi'^* \psi' = \psi^* \psi$.

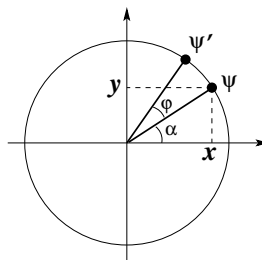
Deci, această transformare de calibrare, sub forma (10.16), nu modifică mărimile observabile fizic. Este echivalentă cu o rotație (6.19) de unghi $q\chi(x, t)$ ¹, unde $\chi(x, t)$ este aceeași funcție de calibrare din cazul (9.50) al transformării potențialelor ϕ și \vec{A} .

¹Fie starea ψ de forma

$$\psi = e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$\psi' = e^{i\varphi} \psi = e^{i(\alpha+\varphi)}$$

ψ' este ψ rotit cu unghiul φ .



- Să trecem acum să verificăm că, la fel cum transformarea de calibrare (9.50) a potențialelor ϕ și \vec{A} nu modifică ecuațiile Maxwell, nici transformarea de calibrare (10.16) a funcțiilor de stare $\psi(\mathbf{x}, t)$, nu modifică ecuația Schrödinger.
- Pentru aceasta vom înlocui funcția transformată $\psi'(\mathbf{x}, t)$ (10.16) în ecuația Schrödinger transformată (10.15).

→ Intâi determinăm acțiunea operatorului \hat{D}' din (10.15) la puterea întâi, cu transformarea de calibrare (9.50) pentru $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$ și (10.16) pentru $\psi' = e^{iq\chi/\hbar}\psi$:

$$\begin{aligned}\hat{D}'\psi' &\equiv \overbrace{\left(\nabla - \frac{i}{\hbar}q\mathbf{A}'\right)}^{\hat{D}'}\psi' = \left[\nabla - \frac{i}{\hbar}q\mathbf{A} - \frac{i}{\hbar}q(\nabla\chi)\right] \left[e^{iq\chi/\hbar}\psi\right] \quad \left| \text{calculăm derivata } \nabla\right. \\ &= \frac{i}{\hbar}q(\nabla\chi)e^{iq\chi/\hbar}\psi + e^{iq\chi/\hbar}(\nabla\psi) - \frac{i}{\hbar}q\mathbf{A}e^{iq\chi/\hbar}\psi - \frac{i}{\hbar}q(\nabla\chi)e^{iq\chi/\hbar}\psi \\ &= e^{iq\chi/\hbar}\underbrace{\left(\nabla - \frac{i}{\hbar}q\mathbf{A}\right)}_{\hat{D}}\psi = e^{iq\chi/\hbar}\hat{D}\psi\end{aligned}\quad (10.17)$$

sau

$$\hat{D}'\psi' = e^{iq\chi/\hbar}\hat{D}\psi \quad (10.18)$$

- Deși factorul de fază $\chi(\mathbf{x}, t)$ este afectat de operatorul gradient ∇ el trece mai departe de operatorul \hat{D}' pe care îl schimbă în operatorul \hat{D} . Transformarea de calibrare (10.18) a derivatei covariante $\hat{D}\psi$ se face la fel ca transformarea (10.16) $\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{x}, t)$.
- Similar (10.18), acțiunea operatorului $(\hat{D}^0)'$ din (10.15), folosind transformarea de calibrare (9.50) pentru $\phi' = \phi - \partial\chi/\partial t$, va da: $(\hat{D}^0)'\psi' = e^{iq\chi/\hbar}(\hat{D}^0\psi)$ (10.19)

- Să trecem acum la ecuația Schrödinger cu transformarea de calibrare (10.15), adică → repetăm aceleași operații ce ne-au condus la $\hat{D}'\psi' = e^{iq\chi/\hbar}\hat{D}\psi$ (10.18) de data asta pentru pătratul operatorului din această ecuație,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m}(-i\hbar\hat{D}')^2\psi' &= e^{iq\chi/\hbar}\underbrace{\frac{1}{2m}(-i\hbar\hat{D})^2}_{\text{folosim (10.11)}}\psi \quad \left| \text{folosim (10.11)}\right. \\ &= e^{iq\chi/\hbar}(i\hbar\hat{D}^0\psi) \quad \left| \text{folosim (10.19)}\right. \\ &= i\hbar\hat{D}^0'\psi'\end{aligned}\quad (10.20)$$

- Ecuația Schrödinger pentru ψ' , după transformarea de calibrare (10.15), este identică cu ecuația Schrödinger (10.11) inițială pentru ψ .

Astfel am verificat că transformarea (10.16) de calibrare a funcției de stare $\psi \rightarrow \psi'$, asigură invarianța ecuațiilor Schrödinger pentru o particulă încărcată aflată în câmp electromagnetic (10.11), folosind același câmp local de calibrare $\chi(\mathbf{x}, t)$.

Invarianța observabilelor la transformarea de calibrare electromagnetică

- Să arătăm acum că ψ și ψ' descriu și aceleași observabile.
Aceasta este clar pentru *densitatea de probabilitate* $|\psi|^2 = |\psi'|^2$, deoarece conform (10.16) ele se deosebesc printr-un factor de fază, care în modul la pătrat este unitar: $|\psi'|^2 = \psi'^* \psi' = \psi^* \psi$.
- Totuși, unele observabile ce conțin operatori derivate ca ∇ sau $\partial/\partial t$, de exemplu curentul (4.48): $\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi$, nu sunt invariante.
- Se poate verifica că acest curent nu este invariant la transformarea de calibrare (10.16) $\psi \rightarrow \psi'$, deoarece faza $\chi(x, t)$ depinde de x . Totuși putem obține un *curent invariant de calibrare (gauge)* dacă înlocuim în expresia curentului $\nabla \rightarrow \hat{D}$ (și $\partial/\partial t \rightarrow \hat{D}^0$), atunci

$$\psi^{*'}(\hat{D}'\psi') = \psi^* e^{-iq\chi}(\hat{D}\psi) = \psi^* \hat{D}\psi \quad (10.21)$$

- În acest fel identitatea stărilor fizice descrise prin ψ și ψ' se restabilește, inclusiv curentul sau chiar observabilele exprimate cu aceste funcții de stare. De altfel, egalitatea dintre primul și ultimul termen din (10.21) reprezintă *invarianța de calibrare*.

- În notații 4-dimensionale, sub formă Lorentz covariantă, *transformarea de calibrare electromagnetică*, simultan a 4-potențialului A^μ (9.50) și a funcțiilor de stare ψ , se poate scrie:

$$\begin{aligned} A^\mu &\longrightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi \\ \psi &\longrightarrow \psi' = e^{iq\chi/\hbar} \psi \end{aligned} \quad (10.22)$$

- La fel, derivatele (10.12) și acțiunea lor (10.18) și (10.19) asupra funcțiilor de stare ψ , ce asigură invarianța la *transformarea de calibrare* (10.22), definesc *derivatele covariante de calibrare*:

$$\begin{aligned} \partial^\mu &\longrightarrow \hat{D}^\mu \equiv \partial^\mu + \frac{i}{\hbar} q A^\mu \\ \hat{D}'^\mu \psi' &= e^{iq\chi/\hbar} \hat{D}^\mu \psi \end{aligned} \quad (10.23)$$

- În concluzie, orice ecuație cuantică ce conține operatorul ∂^μ poate fi făcută invariantă la o *transformarea de calibrare* (10.22). În particular, invarianța ecuațiilor Maxwell și a ecuației Schrödinger pentru particula liberă, după conectarea interacției electromagnetice, se asigură prin includerea unui potențial de compensare $\chi(x, t)$. Aceasta presupune *transformarea de calibrare* (a potențialelor electromagnetice și a funcțiilor de stare ψ) conform (10.22), și înlocuirea derivatelor cu *derivatele covariante* (10.23).

- In rezumat: Am plecat de la transformările de calibrare (9.50) ale potențialelor electromagnetice $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$, care păstrează invariante ecuațiile Maxwell.
- Pentru o particulă încărcată q în câmp electromagnetic, asigurarea invarianței ecuației cuantice de mișcare (ecuația Schrödinger) implică includerea unei deplasări de fază pentru starea de particulă liberă: $\psi(x, t) \longrightarrow \psi'(x, t) = e^{iq\chi/\hbar} \psi(x, t)$.

- În acest fel *transformarea de calibrare electromagnetică*, ce asigură invarianța ecuației de mișcare (Schrödinger) cu ajutorul câmpului scalar $\chi(x, t)$, este dată de:

$$\begin{aligned} \phi &\longrightarrow \phi' = \phi - \partial\chi/\partial t \\ \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \\ \psi &\longrightarrow \psi'(x, t) = e^{iq\chi/\hbar} \psi(x, t) \end{aligned} \quad (10.24)$$

- Deci, noi am plecat de la ecuația Schrödinger de mișcare a unei particule încărcate în câmp electromagnetic (10.9), ca fiind cunoscută:

$$\left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\phi \right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad (10.9)$$

apoi am aplicat transformarea de calibrare (10.24) a potențialelor și a funcției de stare și am obținut invarianța de calibrare a ecuației Schrödinger.

A se remarca faptul că nu avem o invarianță în cazul ecuației Schrödinger de particulă liberă (sau a oricărei ecuații cuantice de particulă liberă). Adică, dacă $\psi(x, t)$ este soluția ecuației Schrödinger de particulă liberă, $\psi'(x, t)$ nu mai este soluție a aceleiași ecuații Schrödinger, deoarece acum ∇ și $\partial/\partial t$ acționează și asupra $\chi(x, t)$. Ecuația Schrödinger trebuie modificată prin înlocuirea derivatelor cu derivatele covariante (10.23). Dar noua ecuație Schrödinger nu mai descrie mișcarea unei particule libere. Adică apare un câmp de forțe în care se mișcă particula noastră. Acest câmp este, în acest caz, câmpul de potențiale electromagnetice A^μ .

Procedura inversă. Introducere câmpuri de calibrare.

Putem introduce un câmp de calibrare (în cazul de față câmpul electromagnetic A^μ) în urma unor transformări locale de fază prin cerința de invarianță de calibrare (gauge) a ecuațiilor de mișcare.

În cazul nostru, impunem modificarea ecuației de mișcare Schrödinger pentru particula liberă:

$$\frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla)^2 \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (10.25)$$

prin transformarea locală de fază $\psi \longrightarrow \psi'(x, t) = e^{i\alpha(x, t)} \psi(x, t) \quad (10.26)$

dar această transformare nu asigură invarianța ecuației Schrödinger de particulă liberă.

Pentru a satisface invarianța la o transformare locală de fază (10.26), trebuie să modificăm ecuația Schrödinger de particulă liberă, prin includerea unor termeni care să compenseze apariția termenilor în urma derivatelor ∇ și $\partial/\partial t$ asupra factorului de fază $\alpha(x, t)$.

Deci, pentru a face o transformare locală de fază, trebuie să introducem un câmp de forțe anume, care să modifice în sens invers starea particulei încărcate. De fapt noi știm ca acest câmp este cel electromagnetic $A^\mu \equiv (\phi, \mathbf{A})$, care trebuie inclus cu ajutorul factorului de fază $\alpha(x, t) = q\chi(x, t)$. Astfel ecuația Schrödinger (10.25) pentru particula liberă, se modifică la forma (10.10)

$$\frac{1}{2m} \left[-i\hbar \underbrace{\left(\nabla - \frac{i}{\hbar} q\mathbf{A} \right)}_{\hat{D}} \right]^2 \psi(x, t) = i\hbar \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} q\phi \right)}_{\hat{D}^0} \psi(x, t) \quad (10.10)$$

cu condiția ca \mathbf{A} și ϕ să satisfacă transformarea de calibrare

$$\begin{cases} \phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{q} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \\ \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \frac{1}{q} \nabla \alpha \end{cases} \quad (10.27)$$

În acest fel ecuația Schrödinger descrie interacția unei particule încărcate cu un câmp electromagnetic \mathbf{A}, ϕ .