9.9 Transformări de calibrare pentru câmpul electromagnetic

- In expresia (8.35) a câmpului $\vec{B}$ prin potenţial: $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$

  şi în expresia (8.36) a câmpului $\vec{E}$ prin potenţiale: $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

  intervin doar derivatele acestor potenţiale. De aceea, în determinarea funcţiilor de potenţial $\phi(x,y,z,t)$ şi $\vec{A}(x,y,z,t)$, pentru nişte funcţii de câmp $\vec{E}(x,y,z,t)$ şi $\vec{B}(x,y,z,t)$ date, va trebui să alegem constantele de integrare potrivite.
  In acest fel obţinem calibrarea valorilor de potenţial.

- De exemplu, dacă luăm doar câmpul electrostatic $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi$, prin adăugarea la potenţialul ϕ a unei mărimi C independentă de coordonate ($\vec{\nabla}C=0$), se obţine calibrarea potenţialului scalar ϕ

$$\phi'=\phi+C \tag{9.46}$$

nu modifică $\vec{E}$,

$$\vec{E}'=-\vec{\nabla}\,\overbrace{(\phi+C)}^{\phi'}=-\vec{\nabla}\phi=\vec{E}$$

9.9.1 Transformări de calibrare pentru potenţialele ϕ şi $\vec{A}$

- Pentru a păstra invariant câmpul magnetic (8.35): $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$

  putem face o transformare generală a potenţialului vector $\vec{A}$, prin adăugarea gradientului (derivata spaţială a) unei funcţii scalare χ, deoarece rotor de gradient este zero: $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\chi=0$.
  In acest fel realizăm calibrarea potenţialului $\vec{A}$. Ca urmare,

- Potenţialul vector $\vec{A}$, după transformarea de calibrare, va fi,

$$\boxed{\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\chi} \tag{9.47}$$

cu derivata spaţială

Intr-adevăr, $\vec{B}'=\vec{\nabla}\times\vec{A}'=\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{\nabla}\chi)=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}$

- Transformarea $\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\chi$ (9.47) asigură invarianţa $\vec{B}$, dar nu şi invarianţa $\vec{E}$:

$$\vec{E}'=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}\frac{\partial\chi}{\partial t}$$
$$=-\vec{\nabla}\Big(\phi+\frac{\partial\chi}{\partial t}\Big)-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

- Pentru a asigura şi invarianţa câmpului electric (8.36) $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

  după cum în transformarea de calibrare (9.47) la potenţialul vector $\vec{A}$ am adăugat derivata spaţială $\vec{\nabla}\chi$, aici, la potenţialul scalar ϕ adăugăm derivata temporală $-\partial\chi/\partial t$, care anulează noul termen apărut $\partial\chi/\partial t$ mai sus, restabilind şi invarianţa $\vec{E}$.

  Astfel, *transformarea de calibrare a potenţialului scalar* ϕ este

$$\boxed{\phi'=\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t}} \tag{9.48}$$

cu derivata temporală

- Intr-adevăr, acum avem invarianţa atât a câmpului electric $\vec{E}$ (8.36) cât şi a câmpului magnetic $\vec{B}$ (8.35):

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi + \cancel{\vec{\nabla}\frac{\partial \chi}{\partial t}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\chi} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \\ \vec{B}' &= \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \vec{\nabla}\times\left(\vec{A}+\vec{\nabla}\chi\right) = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B} \end{aligned} \tag{9.49}$$

- In concluzie, transformarea câmpului $\vec{E}$ prin variaţia spaţială a componentei $\partial\chi/\partial t$ a potenţialului scalar (9.48), este compensată de variaţia temporală a componentei $\vec{\nabla}\chi$ a potenţialului vector (9.47) (vezi termenii ce se anulează reciproc in expresia E' (9.49)).
La fel, câmpul $\vec{B}$ este invariant la transformarea potenţialului vector cu gradientul $\vec{\nabla}\chi$. Deci, $\vec{E}$ şi $\vec{B}$, la fel şi ecuaţiile Maxwell, rămân neschimbate (invarianţă) dacă facem simultan transformările de calibrare (9.47) şi (9.48) ale potenţialelor electromagnetice. De aceea, câmpurile de calibrare de tip $\chi(\vec{x}, t)$ se mai numesc şi câmpuri de compensare.

- **Nota importantă:** Când se va trece la cuantificarea câmpurilor, potenţialele joacă rolul *funcţiilor de undă* din mecanica cuantică.

9.9.2 Ecuaţia câmpului χ de calibrare Lorenz

- Transformările de calibrare pentru potenţialul scalar ϕ (9.48) şi potenţialul vector $\vec{A}$ (9.47), am văzut sunt:

$$\begin{cases} \phi' = \phi - \dfrac{\partial \chi}{\partial t} \\ \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \end{cases} \tag{9.50}$$

sau sub formă 4-dimensională

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi \quad \text{sau} \quad A^{\mu\prime} = A^\mu - \partial^\mu \chi \tag{9.51}$$

unde componentele şi operatorii 4-dimensionali sunt

$$A_\mu = \begin{pmatrix} \phi/c & -\vec{A} \end{pmatrix} \quad ; \quad A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \vec{A} \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t & \nabla \end{pmatrix} \quad ; \quad \partial^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ -\nabla \end{pmatrix}$$

- Calibrarea Lorenz (8.42) exprimă o relaţie între potenţialele ϕ şi $\vec{A}$: variaţia spaţială a potenţialului vector este compensată de variaţia temporală a potenţialului scalar.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \tag{9.52}$$

- Inlocuind (9.50) în calibrarea Lorenz (9.52) pentru $\vec{A}'$ şi ϕ', avem,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \nabla^2\chi = 0$$

sau

$$\underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}}_{=0\ (9.52)} = \boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \nabla^2\chi = 0} \quad \text{ecuaţia undelor} \tag{9.53}$$

- Rezultă că atât $\vec{A}'$ şi ϕ' cât şi $\vec{A}$ şi ϕ satisfac (pentru orice undă scalară χ) transformarea de calibrare Lorenz (9.52).

- Observaţie. In calibrarea Lorenz toate mărimile au comportament ondulator: potenţialul scalar ϕ şi vector $\vec{A}$, câmpul electric $\vec{E}$ şi magnetic $\vec{B}$, şi câmpul scalar de calibrare χ.

Exemplu de câmp de calibrare χ pentru potenţialul $\vec{A}$

- Fie un câmp magnetic $\vec{B}$ de componente $B_x = 0$, $B_y = 0$ şi $B_z = b$. Conform definiţiei (2.6), componenta $B_z = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z$ este:

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \xrightarrow{\text{transf. (9.47)}} B_z = \frac{\partial A'_y}{\partial x} - \frac{\partial A'_x}{\partial y}$$

- O reprezentare posibilă a câmpului $\vec{B}$ cu ajutorul potenţialului vector $\vec{A}$ poate fi cea de componente:

$$A_x = 0, \quad A_y = b\,x, \quad A_z = 0$$

- Această reprezentare nu este unică. Dacă facem o transformare de calibrare $\boxed{\chi = c\,xy}$ (c se va determina imediat) adică $\nabla_x \chi = c\,y$ şi $\nabla_y \chi = c\,x$

- Ca urmare a transformării de calibrare (9.47) $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$, noul potenţial vector $\vec{A}'$ va fi:

$$\begin{cases} \vec{A}'_x = \vec{A}_x + \nabla_x \chi = 0 + c\,y \\ \vec{A}'_y = \vec{A}_y + \nabla_y \chi = b\,x + c\,x \\ \vec{A}'_z = \vec{A}_z + \nabla_z \chi = 0 + 0 \end{cases}$$

dacă alegem calibrarea $c = -b$, noile componente de potenţial vector devin $\Longrightarrow \vec{A}'_x = -b\,y, \quad \vec{A}'_y = 0, \quad \vec{A}'_z = 0$

- O altă reprezentare posibilă a aceluiaşi câmp $\vec{B}$ cu ajutorul potenţialului vector $\vec{A}$, poate fi:

$$A_x = -\frac{b}{2}\,y, \quad A_y = \frac{b}{2}\,x, \quad A_z = 0$$

- Pentru aceeaşi transformarea de calibrare, $\boxed{\chi = c\,xy}$ (c se va determina imediat)

$$\begin{cases} \vec{A}'_x = \vec{A}_x + \nabla_x \chi = -\dfrac{b}{2}\,y + c\,y \\ \vec{A}'_y = \vec{A}_y + \nabla_y \chi = \dfrac{b}{2}\,x + c\,x \\ \vec{A}'_z = \vec{A}_z + \nabla_z \chi = 0 + 0 \end{cases}$$

dacă alegem calibrarea $c = \frac{b}{2}$, noile componente de potenţial vector devin $\Longrightarrow \vec{A}'_x = 0, \quad \vec{A}'_y = b\,x, \quad \vec{A}'_z = 0$

9.10 Invarianţa de calibrare în electrodinamica clasică (Rezumat)

- Ecuaţia Maxwell (7.13.c) $$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad (7.13.c)$$

  sugerează existenţa unui potenţial vector $\vec{A}$ pentru câmpul magnetic $\vec{B}$ (8.35) (divergenţă de rotor = 0) $$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad (8.35)$$

  Calibrarea potenţialului vector $\vec{A}$ permite adăugarea derivatei spaţiale (gradientul) unui câmp scalar arbitrar χ la potenţialul vector $\vec{A}$ (rotor de gradient = 0) (9.47) $$\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\chi \qquad (9.47)$$

  această transformare nu modifică câmpul magnetic $\vec{B}$ | $\longrightarrow$ invarianţa câmpului $\vec{B}$.

$$\vec{B}'=\vec{\nabla}\times\vec{A}'=\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{\nabla}\chi)=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B} \qquad (9.54)$$

- Similar, ecuaţia Maxwell (7.13.b) $$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (7.13.b)$$

  sugerează existenţa unui potenţial scalar ϕ pentru câmpul electric $\vec{E}$ (8.36) (rotor de gradient = 0) $$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad (8.36)$$

  Calibrarea potenţialului scalar ϕ permite adăugarea derivatei temporale a unui câmp scalar arbitrar χ la potenţialul scalar ϕ (9.48) $$\phi'=\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t} \qquad (9.48)$$

  această transformare nu modifică câmpul electric $\vec{E}$ | $\longrightarrow$ invarianţa câmpului $\vec{E}$.

$$\vec{E}'=-\vec{\nabla}\phi'-\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}=-\vec{\nabla}\phi+\cancel{\vec{\nabla}\frac{\partial\chi}{\partial t}}-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\chi}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\vec{E} \qquad (9.55)$$

- Calibrarea Lorenz (8.42) exprimă o relaţie între potenţialele ϕ şi $\vec{A}$, variaţia spaţială a potenţialului vector este egală cu variaţia temporală de sens invers a potenţialului scalar. $$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad (8.42)$$

  Pentru transformările de calibrare $\vec{A}'$ (9.47) şi ϕ' (9.48) obţinem ecuaţia câmpului de calibrare χ $$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}-\nabla^2\chi=0 \qquad (9.53)$$

$$F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu \qquad (9.36)$$

- In notaţii covariante, folosind expresia 4-dimensională a câmpului electromagnetic prin tensorul $F^{\mu\nu}$ (9.36) $$A^\mu=\begin{pmatrix}\phi/c\\ \vec{A}\end{pmatrix}$$

  Calibrarea 4-potenţialului A^μ, conform (9.47) şi (9.48) $$A^{\mu\prime}=A^\mu-\partial^\mu\chi \qquad (9.56)$$

  aceasta nu modifică câmpul electromagnetic $F^{\mu\nu}$ | $\longrightarrow$ invarianţa câmpului $F^{\mu\nu}$

  <u>In concluzie:</u> Folosind diverse 4-potenţiale $A^{\mu\prime}$, ce diferă prin derivatele unui câmp scalar χ, putem descrie aceeaşi electrodinamică (câmpuri electromagnetice).

- Cele două ecuaţii Maxwell de mai sus (7.13.c) şi (7.13.b) se pot scrie sub forma identităţii Bianchi (9.45) $$\partial^\lambda F^{\mu\nu}+\partial^\mu F^{\nu\lambda}+\partial^\nu F^{\lambda\mu}=0 \qquad (9.45)$$

  Celelalte două ecuaţii Maxwell (7.13.a) şi (7.13.d) de asemenea se pot scrie sub forma compactă $$\partial_\mu F^{\mu\nu}=-\mu_0 j^\nu \qquad (9.42)$$

9.11 Rezumat

Ecuațiile Maxwell pentru câmpuri	Legătura între câmp și potențial	Calibrare potențiale	Ecuația potențialelor	Ecuație propagare potențiale ($\rho = 0, \vec{j} = 0$)
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (1)	$\vec{\nabla} \cdot (\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}}_{\vec{B}}) = 0$ $\Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$ (5)	Calibrare potențial $\vec{A}$ (invarianța $\vec{B}$) $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \qquad (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\chi = 0)$ $\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ (11)		
$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ (2)	$\vec{\nabla} \times \underbrace{\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)}_{-\vec{\nabla}\phi} = 0$ $\Longrightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi$ (6)	Calibrare potențiale $\vec{A}$ și ϕ (invarianța $\vec{E}$) $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$ $\left(+\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\chi\right)$ $\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$ $\left(-\vec{\nabla}\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)$ sau 4-dimensional $\boxed{(A^\mu)' = A^\mu - \partial^\mu \chi}$ $\vec{E}' = -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi' = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\chi} - \vec{\nabla}\phi + \cancel{\vec{\nabla}\frac{\partial \chi}{\partial t}}$ $= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi = \vec{E}$ (12)	Ecuație câmp de calibrare χ Fie calibrarea Lorenz pentru $\boxed{\vec{A}' \text{ și } \phi'}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0$ $\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}}_{= 0 \text{ (Lorenz)}} + \nabla^2\chi - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$ (13)	$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \nabla^2\chi = 0$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (3)	$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi$	Calibrarea Coulomb: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ Calibrarea Lorenz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$ $\longrightarrow$ $-\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right)}_{= -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \text{ (Lorenz)}} - \nabla^2\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (7)	Sursa de potențial $\vec{A}$ divergent este $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ $\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (9)	$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{j}$ (4)	$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ *) $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi$	$\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{A} + \vec{\nabla}\underbrace{\left(\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right)}_{= 0 \text{ (Lorenz)}} = \mu_0\vec{j}$ (8)	$\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{j}$ (10)	$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{A} = 0$

*) $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$

Capitol 10

Câmpuri de calibrare (gauge)

10.1 Transformări de calibrare pentru câmpul electromagnetic

- Am văzut, cu ajutorul transformărilor de calibrare (9.50) (pag.156), am obţinut un câmp scalar χ care modifică potenţialele scalar ϕ şi vector $\vec{A}$, fără a modifica însă şi câmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ ce derivă din aceste potenţiale.
- Deci, transformările de calibrare (9.50) pentru potenţialele scalar ϕ şi vector $\vec{A}$ sunt

$$\begin{cases} \phi' = \phi - \dfrac{\partial \chi}{\partial t} \\ \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \end{cases} \tag{9.50}$$

sau în notaţii 4-dimensionale $\begin{cases} A^\mu = \begin{pmatrix} \dfrac{\phi}{c} \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad \partial^\mu = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{c}\partial_t \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix} \end{cases}$

$$A'^{\,\mu} = A^\mu - \partial^\mu \chi \tag{9.51}$$

- Aceste transformări păstrează invariante:
  - componentele de câmp $\vec{E}$ (9.55) şi $\vec{B}$ (9.54)
  - elementele tensorului de câmp EM $F^{\mu\nu}$ (9.36)
  - ecuaţiile Maxwell omogene $\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$ (9.45)
  - ecuaţiile Maxwell neomogene $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$ (9.42)
  - în plus, indică existenţa unui câmp de calibrare $\chi(\vec{x}, t)$ ce satisface aceeaşi ecuaţie de propagare a undelor (9.53)
- O *transformare de calibrare globală* (independentă de coordonate) cum ar fi translaţie cu o valoare constantă a potenţialului scalar $\phi' = \phi + C$ (9.46) implică o lege de conservare. In acest caz avem de a face cu conservarea sarcinii electrice (vezi teorema Noether), prin ecuaţia de continuitate (conservarea curentului) (9.25).
- Dacă extindem transformarea de calibrare a potenţialului scalar ϕ (9.50), la o *transformare de calibrare locală* (dependentă de coordonate) cu mărimea $-\partial\chi/\partial t$, aceasta asigură invarianţa ecuaţiilor Maxwell doar printr-o schimbare simultană şi a potenţialului vector $\vec{A}$ cu $\vec{\nabla}\chi$. In acest fel invarianţa este asigurată prin apariţia acestui câmp de calibrare χ.
- Transformările locale de calibrare (9.50), atrag existenţa unui câmp de calibrare (compensare) $\chi(x, t)$ ce asigură invarianţa observabilelor $\vec{B}$ şi $\vec{E}$ şi implicit a ecuaţiilor Maxwell (ecuaţii de "mişcare" pentru câmpul electromagnetic).

10.1.1 Particula încărcată în câmp electric şi magnetic (tratare clasică)

Forţa Lorentz

- Asupra unei particule, cu sarcină electrică q ce se mişcă cu viteza $\vec{v}$ în câmp electric $\vec{E}$ şi câmp magnetic $\vec{B}$, acţionează *forţa Lorentz*:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) \tag{10.1}$$

- Exprimarea $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ prin potenţialele scalar ϕ şi vector $\vec{A}$ este: (vezi 8.4, pag. 132)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{10.2}$$

- Inlocuind (10.2) în (10.1), obţinem:

$$\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})\right)$$

- Dezvoltarea dublului produs vectorial

$$\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$$

conduce la expresia forţei Lorentz: $\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\phi - \underbrace{\left[\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right]} + \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right)$

dar $\quad \dfrac{d}{dt}\vec{A}(\vec{x},t) = \dfrac{\partial\vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial\vec{A}(\vec{x},t)}{\partial x_i} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$

- In final, expresia forţei Lorentz este:

$$\boxed{\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right)} \tag{10.3}$$

- Pentru a scrie ecuaţia de mişcare a unei particule de sarcină q aflată în câmp electric şi magnetic staţionar, avem nevoie de Lagrangian-ul (3.17) şi Hamiltonian-ul (3.20) corespunzător.

- Pentru mişcarea unidimensională: $\quad T = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} \quad$ iar $\quad V = -\displaystyle\int F(x)\,dx$

- Forţa Lorentz (10.3) $F(x)$, independentă de timp $\left(\dfrac{d\vec{A}}{dt} = 0\right)$:

$$\vec{F} = q\left(-\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A})\right)$$

Lucrul mecanic elementar efectuat de această forţă este:

$$dL_{mec} = F\cdot dx = -q\,\frac{d\phi}{dx}\,dx + q\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{A})}{dx}\,dx = -q\,d\phi + q\,d(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

Deci, în final, energia potenţială este:

$$V = -\int F(x)\,dx = q\,\phi - q\,\dot{x}A \tag{10.4}$$

- Lagrangian-ul: $\boxed{L = T - V = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} - q\,\phi + \underbrace{q\dot{x}}_{j}A}$ $\quad$ iar $\quad p = \dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}} = m\dot{x} + qA \qquad (10.5)$

unde $j = q\dot{x}$ este curentul sarcinii q.

- Hamiltonian-ul: $\quad H = p\dot{x} - L = (m\dot{x} + \cancel{qA})\,\dot{x} - \dfrac{m\dot{x}^2}{2} + q\phi - \cancel{q\dot{x}A} \; = \; \dfrac{m\dot{x}^2}{2} + q\phi$

- Inlocuind $\dot{x} \to p$ din (10.5) $\dot{x} = \dfrac{p - qA}{m}$ obţinem $\boxed{H = \dfrac{(p-qA)^2}{2m} + q\phi}$ (10.6)

  Deoarece $H = E$ energia totală, atunci $\dfrac{(p - qA)^2}{2m} = E - q\phi$

- In absenţa câmpului electromagnetic ($\phi = 0, A = 0$), energia totală a particulei este doar energia ei cinetică: $E = \dfrac{p^2}{2m}$

- Deci, contribuţia câmpului electromagnetic se traduce prin înlocuirile: $\begin{cases} p \to (p - qA) \\ E \to (E - q\phi) \end{cases}$ sau $p_\mu \to p_\mu - qA_\mu$ (10.7)

10.2 Transformări de calibrare în mecanica cuantică

10.2.1 Ecuaţia Schrödinger pentru particula în câmp electromagnetic

- Hamiltonian-ul, ca energia totală E a particulei în câmp electric şi magnetic, exprimat prin operatori, este dat de (10.6)

$$\frac{(\hat{p} - qA)^2}{2m} + q\phi = \hat{E} \tag{10.8}$$

- Ecuaţia Schrödinger se obţine prin înlocuirile cu operatorii diferenţiali (4.26)

$$p \to \hat{p} = -i\hbar\nabla \quad ; \quad E \to \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{4.26}$$

adică
$$\left[\frac{1}{2m}\Big(-i\hbar\nabla - qA\Big)^2 + q\phi\right]\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} \tag{10.9}$$

sau
$$\frac{1}{2m}\left[-i\hbar\underbrace{\left(\nabla - \frac{i}{\hbar}qA\right)}_{D}\right]^2\psi(x,t) = i\hbar\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}q\phi\right)}_{D_0}\psi(x,t) \tag{10.10}$$

sau
$$\boxed{\frac{1}{2m}\Big(-i\hbar D\Big)^2\psi(x,t) = i\hbar\, D_0\, \psi(x,t)} \tag{10.11}$$

- A se remarca introducerea în ecuaţia Schrödinger pentru particula încărcată aflată în câmp electromagnetic, a noilor operatori diferenţiali D_0 şi D în locul $\partial/\partial t$ şi ∇

$$\begin{cases} D_0 = \dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{i}{\hbar}q\phi \\[2ex] D_k = \nabla_k - \dfrac{i}{\hbar}qA_k \quad (k = 1,2,3) \end{cases} \tag{10.12}$$

  definiţi ca derivatele covariante de calibrare D_μ pentru câmpul electromagnetic:

sau
$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{\hbar}qA_\mu \quad (\mu = 0,1,2,3) \tag{10.13}$$

corespunzători mărimilor p şi E, similar (4.26): $\hat{p}_k \to -i\hbar D_k \quad ; \quad \hat{E} \to i\hbar D_0$ (10.14)

10.2.2 Transformarea de calibrare a ecuaţiei Schrödinger

- Am văzut pag.155, că potenţiale nu sunt unice, ele pot fi alese diferit cu transformările de calibrare (9.50). In urma acestora, componentele $\vec{B}$ (9.54) şi $\vec{E}$ (9.55) ale câmpului EM rămân neschimbate. La fel rămân şi ecuaţiile Maxwell (7.13).

$$\begin{cases} \phi \to \phi' = \phi - \dfrac{\partial\chi}{\partial t} \\[2ex] \vec{A} \to \vec{A'} = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \end{cases} \tag{9.50}$$

- Soluţia $\psi(x,t)$ a ecuaţiei Schrödinger (10.11) descrie complet starea cuantică de mişcare a particulei încărcate în potenţialele ϕ şi $\vec{A}$.
- Dacă facem aceleaşi transformări (9.50) ale potenţialelor şi în ecuaţia Schrödinger (10.10), soluţiile vor descrie oare aceeaşi stare fizică ca soluţiile $\psi(x,t)$ ale ecuaţiei iniţiele (10.10) ?
- Să facem deci transformările de calibrare (9.50) în ecuaţia Schrödinger (10.10) pentru particula în câmp electromagnetic. Obţinem ecuaţia Schrödinger pentru noua funcţie $\psi'(x,t)$:

$$\frac{1}{2m}\Big[-i\hbar\underbrace{\Big(\nabla-\frac{i}{\hbar}q\,A'\Big)}_{D'}\Big]^2\psi'(x,t)=i\hbar\underbrace{\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{i}{\hbar}q\,\phi'\Big)}_{D_0{}'}\psi'(x,t) \tag{10.15}$$

sau

$$\boxed{\frac{1}{2m}\Big(-i\hbar D'\Big)^2\psi'(x,t)=i\hbar\Big(D_0{}'\Big)\,\psi'(x,t)} \tag{10.16}$$

- Să vedem acum care este legătura între ψ' (soluţia ecuaţiei (10.16) după transformarea de calibrare a potenţialelor electromagnetice) şi ψ (soluţia ecuaţiei iniţiale (10.11)). In acest fel vom determina condiţiile cerute ca ψ' să descrie aceeaşi stare fizică ψ, deci ca transformarea de calibrare pentru ecuaţiile Maxwell să păstreze simetria (invarianţa) şi pentru ecuaţiile Schrödinger.
- Folosind relaţiile de calibrare (9.50) ce leagă potenţialele $\vec{A}$ şi ϕ de $\vec{A}'$ şi ϕ', căutăm relaţiile între stările $\psi(x,t)$ şi $\psi'(x,t)$ ce satisfac ecuaţiile Schrödinger (10.11) şi respectiv (10.16).
- Să căutăm legătura între starea iniţială $\psi(x,t)$ şi cea finală $\psi'(x,t)$, sub forma înmulţirii cu un factor de fază $e^{i\,q\,\chi/\hbar}$, care nu modifică starea cuantică. Această legătură conţine acelaşi câmp de calibrare $\chi(x,t)$, folosit în (9.50), ce va trebui determinat. Apoi să stabilim condiţiile în care această legătură este asigurată.
- Transformarea de calibrare (gauge) a stării Schrödinger $\psi(x,t)$ este realizată printr-o deplasare de fază $q\chi(x,t)$ locală, la noua stare $\psi'(x,t)$

$$\boxed{\psi'(x,t)=e^{i\,q\,\chi/\hbar}\,\psi(x,t)} \tag{10.17}$$

- ψ şi ψ' descriu aceeaşi stare fizică. Intr-adevăr, *densitatea de probabilitate* a stării fizice respective este $|\psi|^2=|\psi'|^2$. Conform (10.17) ele se deosebesc printr-un factor de fază, care în modul la pătrat se anulează: $|\psi'|^2=\psi'^*\psi'=\psi^*\psi$.

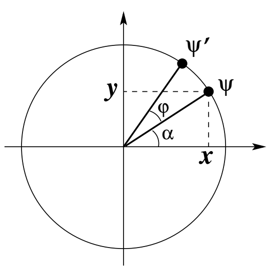
Deci, această transformare de calibrare, sub forma (10.17), nu modifică mărimile observabile fizic. Este echivalentă cu o rotaţie (6.19) de unghi $q\,\chi(x,t)$ [1], unde $\chi(x,t)$ este aceeaşi *funcţie de calibrare* din cazul (9.50) al transformării potenţialelor ϕ şi $\vec{A}$.

[1] Fie starea ψ de forma

$\psi\ =\ e^{i\alpha}\ =\cos\alpha+i\sin\alpha$

$\psi'=\ e^{i\varphi}\psi\ =\ e^{i(\alpha+\varphi)}$

ψ' este ψ rotit cu unghiul φ.



- Să trecem acum să verificăm că, la fel cum transformarea de calibrare (9.50) a potenţialelor ϕ şi $\vec{A}$ nu modifică ecuaţiile Maxwell, nici transformarea de calibrare (10.17) a funcţiilor de stare $\psi(x,t)$, nu modifică ecuaţia Schrödinger.
- Pentru aceasta vom înlocui funcţia transformată $\psi'(x,t)$ (10.17) în ecuaţia Schrödinger transformată (10.16).

  $\longrightarrow$ Intâi determinăm acţiunea operatorului D' din (10.16) la puterea întâi, cu transformarea de calibrare (9.50) pentru $A' = A + \nabla\chi$ şi (10.17) pentru $\psi' = e^{iq\chi/\hbar}\psi$:

$$
\begin{aligned}
D'\psi' \equiv \overbrace{\left(\nabla - \frac{i}{\hbar}qA'\right)}^{D'}\psi' &= \left[\nabla - \frac{i}{\hbar}qA - \frac{i}{\hbar}q(\nabla\chi)\right]\left[e^{iq\chi/\hbar}\,\psi\right] \quad \Big| \text{ calculăm derivata } \nabla \\
&= \cancel{\frac{i}{\hbar}q\Big(\nabla\chi\Big)e^{iq\chi/\hbar}\,\psi} + e^{iq\chi/\hbar}\Big(\nabla\psi\Big) - \frac{i}{\hbar}qAe^{iq\chi/\hbar}\,\psi - \cancel{\frac{i}{\hbar}q\Big(\nabla\chi\Big)e^{iq\chi/\hbar}\,\psi} \\
&= e^{iq\chi/\hbar}\underbrace{\left(\nabla - \frac{i}{\hbar}qA\right)}_{D}\psi = e^{iq\chi/\hbar}D\psi
\end{aligned}
\tag{10.18}
$$

sau

$$
D'\psi' = e^{iq\chi/\hbar}\,D\psi \tag{10.19}
$$

- Deşi factorul de fază $\chi(x,t)$ este afectat de operatorul gradient ∇ el trece mai departe de operatorul D' pe care îl schimbă în operatorul D. Transformarea de calibrare (10.19) a derivatei covariante $D\psi$ se face la fel ca tansformarea (10.17) $\psi'(x,t) = e^{iq\chi/\hbar}\psi$.
- Similar (10.19), acţiunea operatorului $\big(D_0\big)'$ din (10.16), folosind transformarea de calibrare (9.50) pentru $\phi' = \phi - \partial\chi/\partial t$, va da:

$$
\big(D_0\big)'\psi' = e^{iq\chi/\hbar}\Big(D_0\psi\Big) \tag{10.20}
$$

- Să trecem acuma la ecuaţia Schrödinger cu transformarea de calibrare (10.16), adică

  $\longrightarrow$ Căutăm şi acţiunea derivatei covariante de ordin doi $\big(D'\big)^2\psi'$. Pentru aceasta, repetăm operaţiile (10.18) ce ne-au dat rezultatul acţiunii derivatei covariante de ordin întâi (10.19):

$$
\begin{aligned}
(D')^2\psi' = D'\,(D'\psi') = D'\left(e^{iq\chi/\hbar}D\psi\right) &= \left[\nabla - \frac{i}{\hbar}qA - \frac{i}{\hbar}q(\nabla\chi)\right]\left[e^{iq\chi/\hbar}D\psi\right] \\
&= \cancel{\frac{i}{\hbar}q\Big(\nabla\chi\Big)e^{iq\chi/\hbar}D\psi} + e^{iq\chi/\hbar}\nabla\Big(D\psi\Big) - \frac{i}{\hbar}qA\,e^{iq\chi/\hbar}\Big(D\psi\Big) - \cancel{\frac{i}{\hbar}q\Big(\nabla\chi\Big)e^{iq\chi/\hbar}D\psi} \\
&= e^{iq\chi/\hbar}\underbrace{\left(\nabla - \frac{i}{\hbar}qA\right)}_{D}D\psi = e^{iq\chi/\hbar}D^2\psi
\end{aligned}
\tag{10.21}
$$

- Intr-adevăr, ecuaţia Schrödinger (10.16) este invariantă la calibrarea (10.17). Folosind (10.21),

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2m}\Big(-i\hbar D'\Big)^2\psi' &= e^{iq\chi/\hbar}\underbrace{\frac{1}{2m}\Big(-i\hbar D\Big)^2\psi} \quad \Big| \text{ folosim (10.11)} \\
&= e^{iq\chi/\hbar}\Big(i\hbar D_0\psi\Big) \quad \Big| \text{ folosim (10.20)} \\
&= i\hbar\,D_0{}'\,\psi'
\end{aligned}
\tag{10.22}
$$

Astfel am verificat că transformarea (10.17) de calibrare a funcţiei de stare $\psi \longrightarrow \psi'$, asigură invarianţa ecuaţiei Schrödinger (10.16) pentru o particulă încărcată aflată în câmp electromagnetic (10.11), folosind acelaşi câmp local de calibrare $\chi(x,t)$.

Invarianţa observabilelor la transformarea de calibrare electromagnetică

- Să arătăm acum că ψ şi ψ' descriu şi aceleaşi observabile.
  Aceasta este clar pentru *densitatea de probabilitate* $|\psi|^2 = |\psi'|^2$, deoarece conform (10.17) ele se deosebesc printr-un factor de fază, care în modul la pătrat este unitar: $|\psi'|^2 = \psi'^*\psi' = \psi^*\psi$.

- Totuşi, unele observabile ce conţin operatori derivate ca ∇ sau $\partial/\partial t$, de exemplu curentul (4.48): $\psi^*\big(\nabla\psi\big) - \big(\nabla\psi^*\big)\psi$, nu sunt invariante.

- Se poate verifica că acest curent nu este invariant la transformarea de calibrare (10.17) $\psi \to \psi'$, deoarece faza $\chi(x,t)$ depinde de x. Totuşi putem obţine un *curent invariant de calibrare (gauge)* dacă înlocuim în expresia curentului $\nabla \to D$ (şi $\partial/\partial t \to D_0$), atunci ţinând cont şi de (10.19), avem

$$\psi^{*\prime}\Big(D'\psi'\Big) = \psi^* e^{-iq\chi}\Big(e^{iq\chi} D\,\psi\Big) = \psi^* D\,\psi \tag{10.23}$$

- In acest fel identitatea stărilor fizice descrise prin ψ şi ψ' se restabileşte, inclusiv curentul sau chiar observabilele exprimate cu aceste funcţii de stare. De altfel, egalitatea dintre primul şi ultimul termen din (10.23) reprezintă *invarianţa de calibrare*.

- In notaţii 4-dimensionale, sub formă Lorentz covariantă, *transformarea de calibrare electromagnetică*, simultan a 4-potenţialului A_μ (9.50) şi a funcţiilor de stare ψ, se poate scrie:

$$\boxed{\begin{aligned} &A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi \\ &\psi \longrightarrow \psi' = e^{iq\chi/\hbar}\,\psi \end{aligned}} \tag{10.24}$$

- La fel, ţinând cont de
  $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\partial_t \quad \vec{\nabla}\right) \qquad A_\mu = \left(\frac{\phi}{c} \quad -\vec{A}\right)$
  derivatele (10.12) şi acţiunea lor (10.19) şi (10.20) asupra funcţiilor de stare ψ, definesc *derivatele covariante de calibrare*:

$$\boxed{\begin{aligned} &\partial_\mu \to D_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{i}{\hbar}\,q\,A_\mu \\ &D'_\mu\psi' = e^{iq\chi/\hbar}\,D_\mu\psi \end{aligned}} \tag{10.25}$$

- In concluzie, orice ecuaţie cuantică ce conţine operatorul ∂^μ poate fi făcută invariantă la o *transformarea de calibrare* (10.24). In particular, invarianţa ecuaţiilor Maxwell şi a ecuaţiei Schrödinger pentru particula liberă, după conectarea interacţiei electromagnetice, se asigură prin includerea unui potenţial de compensare $\chi(x,t)$. Aceasta presupune *transformarea de calibrare* (a potenţialelor electromagnetice şi a funcţiilor de stare ψ) conform (10.24), şi înlocuirea derivatelor cu *derivatele covariante* (10.25).

- In rezumat: Am plecat de la transformările de calibrare (9.50) ale potenţialelor electromagnetice $A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi$, care păstrează invariante ecuaţiile Maxwell.

- Pentru o particulă încărcată q în câmp electromagnetic, asigurarea invarianţei ecuaţiei cuantice de mişcare (ecuaţia Schrödinder) implică includerea unei deplasări de fază pentru starea de particulă liberă: $\psi(x,t) \longrightarrow \psi'(x,t) = e^{iq\chi/\hbar}\psi(x,t)$.

- In acest fel *transformarea de calibrare electromagnetică*, asigură invarianţa ecuaţiei de mişcare (Schrödinger) cu ajutorul câmpului scalar $\chi(x,t)$, sub forma transformărilor:

$$\boxed{\begin{aligned} &\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \partial\chi/\partial t \\ &A \longrightarrow A' = A + \nabla\chi \\ &\psi \longrightarrow \psi'(x,t) = e^{iq\chi/\hbar}\,\psi(x,t) \end{aligned}} \tag{10.26}$$

Rezumat

- Deci, noi am plecat de la ecuaţia Schrödinger (10.9) de mişcare a unei particule încărcate în câmp electromagnetic, aici scrisă sub forma:

$$\left[\frac{1}{2m}\Big(-i\hbar\nabla -qA\Big)^2\right]\psi(x,t) = \left(i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} -q\phi\right)\psi(x,t) \tag{10.9}$$

- Am aplicat transformarea de calibrare (10.26) a potenţialelor electromagnetice (ϕ, A) şi a funcţiei de stare $\psi(x,t)$,

$$\begin{cases} \phi \longrightarrow \phi' = \phi - \partial\chi/\partial t \\ A \longrightarrow A' = A + \nabla\chi \\ \psi \longrightarrow \psi'(x,t) = e^{i\,q\,\chi/\hbar}\,\psi(x,t) \end{cases} \tag{10.26}$$

- Am obţinut noua formă (10.15) a ecuaţiei Schrödinger exprimată prin noile potenţiale (ϕ', A') şi noua funcţie de stare $\psi'(x,t)$.

$$\left[\frac{1}{2m}\Big(-i\hbar\nabla -qA'\Big)^2\right]\psi'(x,t) = \left(i\hbar\frac{\partial\psi'(x,t)}{\partial t} -q\phi'\right)\psi'(x,t) \tag{10.15}$$

  adică am obţinut aceeaşi formă (10.9) a ecuaţiei Schrödinger.

- Am demonstrat în acest fel, invarianţa de calibrare a ecuaţiei Schrödinger prin introducerea în ecuaţia Schrödinger de particulă liberă a unui câmp electromagnetic de compensare, cu ajutorul termenilor suplimentari qA şi $q\phi$ de potenţiale electromagnetice, care satisfac transformările de calibrare (10.26).

- A se remarca faptul că nu avem invarianţă de calibrare doar prin transformarea de fază a funcţiei de stare $\psi \longrightarrow \psi'$ (10.17), în cazul ecuaţiei Schrödinger de particulă liberă (sau a oricărei ecuaţii cuantice de particulă liberă).

  Adică, dacă $\psi(x,t)$ este soluţia ecuaţiei Schrödinger de particulă liberă, $\psi'(x,t)$ nu mai este soluţie a aceleiaşi ecuaţii Schrödinger, deoarece acum ∇ şi $\partial/\partial t$ acţionează şi asupra $\chi(x,t)$.

  De aceea, pentru a compensa noii termeni apăruţi, ecuaţia Schrödinger trebuie şi ea modificată, prin introducerea derivatele covariante (10.25), care să acţioneze în compensarea noilor termeni.

  Acum însă, noua ecuaţie Schrödinger (10.15) nu mai descrie mişcarea unei particule libere. Adică noii termeni incluşi: $-qA$ şi $+q\phi$, indică un câmp de forţe suplimentar, în care se mişcă acum particula noastră. Acest câmp de compensare (calibrare) este în cazul de faţă, câmpul electromagnetic, exprimat prin potenţiale electromagnetice ϕ şi A.

Procedura inversă. Introducere câmpuri de calibrare.

- In secţiunea anterioară am plecat de la transformarea de calibrare a potenţialelor A şi ϕ pentru a obţine invarianţa ecuaţiilor Maxwell.
- Am introdus o interacţie cu un câmp cuantic $\psi(x,t)$ de particule Schrödinger, care pentru a rămâne invariantă de calibrare am introdus o transformare de fază locală $e^{i\,q\,\chi(x,t)}$ a acestui câmp ψ.
- Invers, luăm un câmp cuantic Schrödinger, în interacţie cu un alt câmp necunoscut. In urma aplicării câmpului Schrödinger a unei transformari de fază locale $e^{i\alpha(x,t)}$, pentru a asigura invarianţa de calibrare a noii descrieri de interacţie, trebuie să îi aplicăm şi acestui nou câmp o transformare corespunzătoare de calibrare.
- Ca verificare, să vedem cum obţinem câmpul electromagnetic ca un câmp de calibrare.
  Reluăm procedura inversă pentru obţinerea câmpului de calibrare electromagnetic (a potenţialelor) A^μ pentru un câmp Schrödinger, nerelativist, prin cerinţa de invarianţă de calibrare (gauge) a ecuaţiei Schrödinger.

In cazul nostru, impunem modificarea ecuaţiei de mişcare Schrödinger pentru particula liberă:

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla\right)^2\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{10.27}$$

prin transformarea locală de fază

$$\psi \longrightarrow \psi'(x,t) = e^{i\,\alpha(x,t)}\,\psi(x,t) \tag{10.28}$$

dar această transforare nu asigură invarianţa ecuaţiei Schrödinger de particulă liberă.
Pentru a satisface invarianţa la o transformare locală de fază (10.28), trebuie să modificăm ecuaţia Schrödinger de particulă liberă, prin includerea unor termeni care să compenseze apariţia termenilor în urma derivatelor ∇ şi $\partial/\partial t$ asupra factorului de fază $\alpha(x,t)$.
Deci, pentru a face o transformare locală de fază, trebuie să introducem un câmp de forţe, care să modifice în sens invers starea particulei încărcate. De fapt noi ştim ca acest câmp este cel electromagnetic $A^\mu \equiv (\phi, A)$, care trebuie inclus cu ajutorul factorului de fază $\alpha(x,t) = q\,\chi(x,t)$.
Astfel ecuaţia Schrödinger (10.27) pentru particula în interacţie se modifică la forma (10.10):

$$\frac{1}{2m}\left[-i\hbar\left(\nabla - \frac{i}{\hbar}qA\right)\right]^2\psi(x,t) = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}q\phi\right)\psi(x,t) \tag{10.10}$$

cu condiţia ca A şi ϕ să satisfacă transformarea de calibrare

$$\boxed{\begin{aligned} \phi &\longrightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{q}\frac{\partial\alpha}{\partial t} \\ A &\longrightarrow A' = A + \frac{1}{q}\nabla\alpha \end{aligned}} \tag{10.29}$$

Cerinţa de a satisface aceste condiţii, impune forma interacţiilor, a ecuaţiei câmpurilor de calibrare. Acestea se pot afla direct din ecuaţia cuantică de particulă liberă, prin înlocuirea (10.25)

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{i}{\hbar}qA_\mu.$$

In acest fel am introdus câmpul electromagnetic, ca un câmp de calibrare (descris de potenţialele A şi ϕ) rezultat din interacţia cu particula Schrödinger încărcată. Aceste potenţiale satisfac transformările de calibrare (10.29).

10.2.3 Transformari de calibrare - grup de transformări unitare $U(1)$

- Funcţia de stare complexă ψ, scrisă pe componente ψ_R şi ψ_I: $\quad \psi = \psi_R + i\psi_I \quad (10.30)$

- Transformarea de calibrare electromagnetică locală (10.28) asupra funcţiei de stare complexă ψ, se poate scrie:

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha}\psi(x,t) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\psi_R + i\,\psi_I) = \psi'_R + i\,\psi'_I \tag{10.31}$$

de unde
$$\begin{cases} \psi'_R = \psi_R\cos\alpha - \psi_I\sin\alpha \\ \\ \psi'_I = \psi_R\sin\alpha + \psi_I\cos\alpha \end{cases} \tag{10.32}$$

- Relaţia (10.32) exprimă o ”rotaţie activă” (vezi (6.3) pag.80) în spaţiul intern al componentelor reale şi imaginare ale funcţiei de stare ψ.

- Să luăm două asemenea transformări succesive
$$\psi \longrightarrow \psi' \longrightarrow \psi'' \tag{10.33}$$
unde
$$\psi'' = e^{i\beta}\,\psi' \tag{10.34}$$
folosind cele două rotaţii (10.31) şi (10.34):
$$\psi'' = e^{i\,(\alpha+\beta)}\,\psi = e^{i\delta}\psi \tag{10.35}$$
unde $\delta = \alpha + \beta$. Deci transformarea (10.35) este de aceeaşi formă ca transformarea iniţială.

- Setul de asemenea transformări având aceeaşi formă (10.31), alcătuieşte un *grup de transformări*, în cazul de faţă $U(1)$, grupul transformărilor unitare de matrici uni-dimensionale (număr real), aici parametrul de fază α.
  Setul de factori de fază de forma $e^{i\,\alpha}$, cu α număr real, formează elementele grupului $U(1)$. Aceştia nu sunt altceva decât factorii transformărilor noastre de calibrare (gauge) pentru funcţiile de stare ψ.

- O matrice unitară U este cea care satisface:
$$UU^\dagger = U^\dagger U = I \tag{10.36}$$

- Transformările grupului $U(1)$ sunt comutative. Adică rotaţiile de unghi α şi apoi β sunt egale cu rotaţiile β şi apoi α, deoarece
$$e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\beta}\cdot e^{i\alpha} \tag{10.37}$$

Ecuaţia Dirac pentru particula liberă (reluare secţiunea 5.2.4 pag.74)

- Reamintim metoda de cuantificare pentru ecuaţia Dirac. Plecăm de la exprimarea lineară a energiei (5.29):

$$\begin{cases} \dfrac{E}{c} = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc \qquad \text{sau} \\ p_0 - \vec{\alpha}\cdot\vec{p} - \beta mc = 0 \end{cases} \tag{10.38}$$

Ecuaţia de stare cuantică se obţine prin trecerea la operatori diferenţiali (vezi pag.76)

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{E}{c} \longrightarrow i\dfrac{\hbar}{c}\dfrac{\partial}{\partial t} = i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x^0} \equiv i\hbar\partial_0 \\ \vec{p} \longrightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \quad \text{sau} \quad p_k \longrightarrow -i\hbar\partial_k \end{cases} \quad \text{sau } p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu \tag{10.39}$$

In acest fel, cu (10.38) obţinem **ecuaţia Dirac** pentru particula liberă:

$$\Big[\overbrace{i\hbar\partial_0}^{p_0} - \alpha^k\cdot\overbrace{(-i\hbar\partial_k)}^{p_k} - \beta mc\Big]\psi = 0$$

$\times$ la stânga cu β, şi notăm: $\gamma^0 = \beta \quad ; \quad \gamma^k = \beta\alpha^k$, $\beta^2 = 1$

sau

$$\left(i\hbar\gamma^0\partial_0 + i\hbar\gamma^k\partial_k - mc\right)\psi = 0 \tag{10.40}$$

sau

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\,\psi = 0 \quad \longrightarrow \quad \textbf{Ecuaţia Dirac} \tag{5.34}$$

10.2.4 Ecuaţia Dirac pentru particula încărcată în câmp electromagnetic

Am văzut (10.7) că descrierea mişcării unei particule încărcate în câmp electromagnetic se face prin înlocuirea, în expresia Hamiltonian-ului (energiei totale) (10.6), $p_\mu \rightarrow p_\mu - qA_\mu$. Reluăm procedura de mai sus de la deducerea ecuaţiei Dirac de mişcare a particulei libere, de data asta pentru obţinerea ecuaţiei de mişcare a unei particule (Dirac) în câmp electromagnetic, prin înlocuirea (10.7) în expresia energiei.

- Intâi, pentru o particulă încărcată aflată în câmp electromagnetic, avem expresia (lineară a) energiei (10.38):

$$(\overbrace{p_0 - q\underbrace{A_0}_{\phi/c}}^{p_0}) - \alpha^k\cdot(\overbrace{p_k - qA_k}^{p_k}) - \beta mc = 0 \tag{10.41}$$

- Prin trecerea la operatori diferenţiali (vezi pag.76)

$$\begin{cases} p_0 \longrightarrow i\hbar\partial_0 \\ p_k \longrightarrow -i\hbar\partial_k \end{cases} \qquad \text{sau} \qquad p_\mu \longrightarrow i\hbar\partial_\mu$$

- Rezultă ecuaţia de stare cuantică pentru particula Dirac în câmp electromagnetic

$$\Bigg[\underbrace{\left(i\hbar\partial_0 - q\frac{\phi}{c}\right)}_{p_0} - \alpha^k\underbrace{(-i\hbar\partial_k - qA_k)}_{p_k} - \beta mc\Bigg]\psi = 0 \tag{10.42}$$

Deci (10.42) arată că în ecuaţia (10.38) s-a făcut trecerea:

$$\begin{cases} p_0 \quad\rightarrow\quad i\hbar\partial_0 - q\dfrac{\phi}{c} \\ p_k \quad\rightarrow\quad -i\hbar\partial_\mu - qA_\mu \end{cases} \tag{10.43}$$

sau în loc de (10.39) avem

$$p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu - qA_\mu \tag{10.44}$$

Rescriem ecuaţia (10.42) cu ajutorul matricilor γ (5.15):

$$\left[i\hbar\partial_0 - q\frac{\phi}{c} - \alpha^k\left(-i\hbar\partial_k - qA_k\right) - \beta mc\right]\psi = 0$$

× la stânga cu β, şi notăm:
$\gamma^0 = \beta \quad ; \quad \gamma^k = \beta\alpha^k$
$\beta^2 = 1$

obţinem

$$\left[i\hbar\gamma^0\partial_0 - \gamma^0 q\frac{\phi}{c} + i\hbar\gamma^k\partial_k + \gamma^k qA_k - mc\right]\psi = 0$$

folosind (9.31) şi (9.22)
$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_0 & \partial_k \end{pmatrix}$
$A_\mu = \begin{pmatrix} \frac{\phi}{c} & -A_k \end{pmatrix}$

sau

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - \gamma^\mu qA_\mu - mc\right)\psi = 0 \tag{10.45}$$

sau

$$\left[i\hbar\gamma^\mu\underbrace{\left(\partial_\mu + \frac{i}{\hbar}qA_\mu\right)}_{D_\mu} - mc\right]\psi = 0 \tag{10.46}$$

sau

$$\boxed{\left(i\hbar\gamma^\mu D_\mu - mc\right)\psi = 0} \tag{10.47}$$

pe componente

$$\Big(\underbrace{i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc}_{\text{ecuaţia Dirac pt. particula liberă}} - \underbrace{q\gamma^\mu A_\mu}_{\text{interacţie în câmp EM}}\Big)\psi = 0 \quad \longrightarrow \tag{10.48}$$

Ecuaţia de mişcare pentru particula Dirac în câmp EM