11.3 Mecanica Câmpurilor Clasice

- Sistemele mecanice sunt caracterizate printr-un număr de *grade de libertate*. De exemplu, un pendul uni-dimensional are un singur grad de libertate, exprimat prin unghiul de oscilaţie. Două pendule legate între ele prezintă două grade de libertate (vezi secţiunea 3.3, pag.31).

  Un câmp scalar $\phi(\vec{x}, t)$ corespunde unui sistem cu un numar infinit de grade de libertate, având o valoare oscilantă atât în timp $\phi(\vec{x}, t)$ (ca abatere faţă de valoarea de echilibru), în fiecare punct $\vec{x} = const$, cât şi în spaţiu, la un moment dat $t = const$.

  Astfel, teoria cuantică a câmpurilor implică doi paşi esenţiali matematici, prin care se face:

- Descrierea sistemelor continui (câmpuri), cu un număr infinit de grade de libertate, prin:
  - descrierea unui sistem mecanic cu număr finit de grade de libertate
  - trecerea la un număr infinit de grade de libertate, dar tot în descrierea clasică - câmp clasic
- Aplicarea metodelor de cuantificare a acestor sisteme.
  - trecerea la cuanticarea sistemului mecanic finit
  - trecerea la cuantificarea câmpului

11.3.1 Sistem mecanic oscilator continuu (coardă oscilantă)

- Vom începe cu tratarea clasică a unui sistem cu un număr finit de grade de libertate, şi vom trece la cuantificarea acestuia. Apoi revenim la cazul clasic şi facem trecerea la un număr infinit de grade de libertate, adică facem descrierea unui câmp clasic. In final, vom trece la cuantificarea şi a acestui sistem cu număr infinit de grade de libertate.
- Modelul unidimensional al unui sistem oscilant de n mase fixate pe o coardă elastică, cu n grade de libertate, dezvoltat în secţiunea 11.2.4, poate fi extins prin creşterea gradelor de libertate n odată cu descreşterea distanţei $\Delta x \equiv a$ dintre componente (Figura 11.13), astfel încât lungimea coardei $L = (n+1)\,a$ să rămână constantă.
- Generalizând cazul a trei oscilatori transversali din secţiunea 11.2.3, expresiile energiei cinetice (11.94) şi a energiei potenţiale (11.98), avem:
- Energia cinetică a n-mase oscilante, similar (11.94)

$$T = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{y}_i^2 \longrightarrow \frac{\rho}{2}\int_0^L dx\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \tag{11.131}$$

- Energia potenţială a n-mase oscilante (folosim $\Delta x \equiv a$), similar (11.98)

$$V = \frac{\tau}{2a}\sum_{i=0}^{n}(y_{i+1}-y_i)^2 = \frac{\tau}{2}\sum_{i=0}^{n}\Delta x\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)^2 \longrightarrow \frac{\tau}{2}\int_0^L dx\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \tag{11.132}$$

  cu condiţiile la margine (11.113): $y_0 = y_{n+1} = 0$

  Expresiile (11.131) şi (11.132) ne dau lagrangian-ul sistemului discret de n-mase legate elastic:

$$L = T - V = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{y}_i^2 - \frac{\tau}{2a}\sum_{i=0}^{n}(y_{i+1}-y_i)^2 \tag{11.133}$$

- Ecuaţiile Euler-Lagrange (3.10) sunt:

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\right) = 0 \tag{3.10}$$

- Folosind lagrangianul (11.133) şi derivatele cerute în (3.10), obţinem ecuaţiile de mişcare

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial y_i} = -\dfrac{\partial V}{\partial y_i} = \dfrac{\tau}{a}\Big[(y_{i+1}-y_i)-(y_i-y_{i-1})\Big] \\ \dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = m\dot{y}_i \quad \underbrace{\Longrightarrow}^{(3.10)} \quad \boxed{\dfrac{\tau}{a}\Big[\Big(y_{i+1}-y_i\Big)-\Big(y_i-y_{i-1}\Big)\Big] = m\ddot{y}_i} \end{cases} \tag{11.134}$$

- Trecând la o distribuţie continuă, ecuaţiile de mişcare (11.134) se pot scrie:

$$\frac{\tau}{a}\Big[\Big(y(x+a)-y(x)\Big)-\Big(y(x)-y(x-a)\Big)\Big] = \overbrace{\rho\, a}^{m}\,\ddot{y}(x) \tag{11.135}$$

- la limita $\Delta x \equiv a \longrightarrow 0$, avem $\dfrac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} \longrightarrow \left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\frac{\Delta x}{2}}$

  trecând $a \equiv \Delta x$ din membrul drept (11.135), în membrul stâng la numitor, acesta devine:

$$\frac{\tau}{\Delta x}\left[\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}-\frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}\right] \approx \frac{\tau}{\Delta x}\left[\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\frac{\Delta x}{2}}-\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x-\frac{\Delta x}{2}}\right] \longrightarrow \tau\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Atunci ecuaţia de mişcare pentru o distribuţie continuă de mase (11.135) se poate scrie:

$$\boxed{\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\tau\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0}$$

Comparând cu ecuaţia undelor:

$$\left.\begin{aligned} &\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\tau\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0 \\ &\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad v^2=\frac{\tau}{\rho} \tag{11.136}$$

- Folosind expresiile (11.131) şi (11.132) pentru o distribuţie lineară continuă de mase, cu densitatea ρ şi din (11.136) $\tau = \rho v^2$, putem scrie lagrangianul pentru o coardă oscilantă (sistem continuu cu număr infinit de grade de libertate), prin densitatea de lagrangian $\mathcal{L}$,

$$L = T - V = \int_0^L \mathcal{L}(x)\,dx \quad \text{cu} \quad \mathcal{L}(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\rho\,\dot{y}^2(x,t)}_{T} - \underbrace{\frac{1}{2}\rho\,v^2\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)^2}_{V} \tag{11.137}$$

- Oscilaţiile transversale ale coardei continui de mase vor putea fi folosite la descrierea oscilaţiilor, prin amplitudinea $\phi(x,t)$ de deplasare faţă de poziţia de echilibru a oricărui element dl de coardă din jurul punctului de coordonată x la momentul t. In acest fel am trecut de la un sistem discret, cu număr finit de grade de libertate, deplasările $y_i(t)$, la unul cu număr infinit de grade de libertate, câmpul de deplasări $\phi(x,t)$ (vezi Figura 11.16).

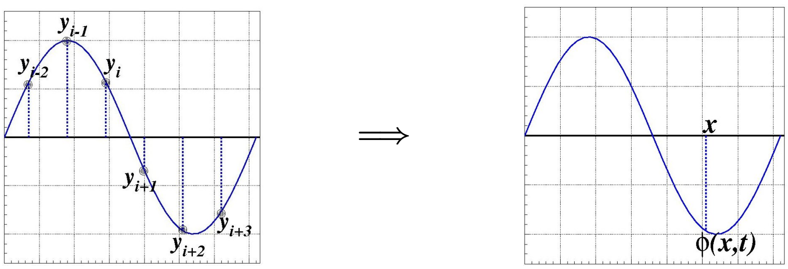

Figura 11.16: Trecerea de la un şir discret de n-mase legate elastic, cu număr finit de grade de libertate, la o coardă continuă, cu număr infinit de grade de libertate (câmp).

11.3.2 Descrierea mecanic lagrangiană a câmpurilor clasice

- Să încercăm să folosim descrierea lagrangiană a ecuţiilor de mişcare din mecanică clasică la ecuaţiile corespunzătoare de evoluţie pentru câmpuri. In acest scop va trebui să trecem de la un sistem mecanic cu un număr finit n de grade de libertate la unul infinit $n \to \infty$. Pentru claritate, vom considera la început un sistem unidimensional (mişcarea pe verticală) descris prin evoluţia în timp a coordonatei $y_i(t)$ pentru cele $i = 1, 2, \ldots, n$ componente. In acest fel în locul ecuaţiei de mişcare din mecanică cu soluţia $y_i(t)$ (11.127), vom căuta soluţia $\phi(x, t)$ de evoluţie a câmpului (amplitudinii de câmp).
- In fiecare punct x avem câte un element (un grad de libertate) $\phi(x, t)$, astfel că sistemul de câmp prezintă a infinitate continuă de grade de libertate.
- In cazul câmpurilor apare o particularitate legată de faptul că ϕ este o funcţie continuă de x, astfel că lagrangianul $\mathcal{L}$ depinde de ϕ şi $\dot{\phi} \equiv \partial\phi/\partial t$, dar şi de $\partial\phi/\partial x$ (nu doar de ϕ şi $\dot{\phi}$ echivalentele pentru x şi $\dot{x}$ din mecanică), adică: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_x\phi, \partial_t\phi)$
- Energia totală a sistemului de câmp unidimensional, este exprimată atât prin $\partial_t\phi$ în termenul de energie cinetică (11.131), cât şi $\partial_x\phi$ în termenul de energie potenţială (11.132), ca o sumă (integrală) de aceste energii, cu $m = \rho dx$:

$$E = \int_0^L \left[\frac{\rho}{2}\Big(\partial_t\phi\Big)^2 + \frac{\rho v^2}{2}\Big(\partial_x\phi\Big)^2\right] dx \tag{11.138}$$

- La fel, densitatea de lagrangian de câmp (11.137) (ce depinde atât de $\partial_x\phi$ cât şi de $\partial_t\phi$) este:

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2}\Big(\partial_t\phi\Big)^2 - \frac{\rho v^2}{2}\Big(\partial_x\phi\Big)^2 \tag{11.139}$$

- Să trecem la formularea lagrangiană cu ajutorul densităţii de lagrangian $\mathcal{L}$

$$L(\phi, \partial_x\phi, \partial_t\phi) = \int dx\, \mathcal{L}(\phi, \partial_x\phi, \partial_t\phi) \tag{11.140}$$

- Acţiunea este definită (11.5) prin integrala temporală din Lagrangian

$$S = \int dt\, L(\phi, \partial_x\phi, \partial_t\phi) \tag{11.141}$$

- Conform principiului minimei acţiuni, ecuaţia de evoluţie a câmpului ϕ este stabilită de anularea variaţiei acţiunii (vezi (C.2) Anexa C, pag.272):

$$\delta S = \int dt\ \delta L(\phi, \partial_x\phi, \partial_t\phi) = 0 \tag{11.142}$$

$$\delta S = \int dt \int dx \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\phi)}\delta(\partial_x\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)}\delta(\partial_t\phi)\right] \tag{11.143}$$

- Integrând prin părţi termenii cu $\delta(\partial_x\phi)$ şi $\delta(\partial_t\phi)$ la fel ca în mecanică (pag.30) obţinem

$$\delta S = \int dt \int dx \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\phi)}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)}\right)\right]\delta\phi = 0 \tag{11.144}$$

- $\delta S = 0$ pentru orice $\delta\phi$ dacă integrantul este zero. Astfel obţinem *ecuaţia Euler-Lagrange pentru câmpuri* (similar cu cazul din mecanica clasică (3.10) pag.30):

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\phi)}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)}\right) = 0 \tag{11.145}$$

- Generalizarea la un câmp 3-dimensional conduce la *ecuaţia Euler-Lagrange pentru câmp*:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} \phi)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} \right) = 0} \qquad (11.146)$$

- Inlocuind $\mathcal{L}$ (11.139) în ecuaţia Euler-Lagrange pentru câmp (11.145) obţinem,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \qquad (11.147)$$

adică am obţinut ecuaţia de propagare a undelor, de data asta plecând de la ecuaţia Euler-Lagrange pentru câmp.

11.3.3 Ecuaţiile Euler-Lagrange pentru câmpuri clasice

- Dacă avem de a face cu mai multe câmpuri în interacţie, câmpurile au un indice suplimentar i desemnând diferitele câmpuri φ_i avute în vedere.

- Funcţia Lagrange $L(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i, t)$ este exprimată ca o integrală spaţială după *densitatea de Lagrangian*, adică

$$L(t) = \int d^3x \ \mathcal{L}(\varphi_i(x,t), \partial_\mu \varphi_i(x,t), t) \quad \text{iar } \textit{acţiunea} \text{ (3.8) este} \quad S = \int_{t_1}^{t_2} dt \ L(t)$$

sau
$$L(t) = \int d^3\vec{x} \, \mathcal{L}\Big[\varphi_i(\vec{x},t), \nabla\varphi_i(\vec{x},t), \dot{\varphi}_i(\vec{x},t)\Big] \qquad (11.148)$$

- L nu depinde explicit de $\vec{x}$ (e integrală după $d^3\vec{x}$), însă prin $\mathcal{L}$ e funcţie locală de $\vec{x}$.

- Pentru a obţine ecuaţiile câmpurilor clasice φ_i, folosim acţiunea (11.5) la fel ca în mecanica clasică

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \ L(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i, t) = \int d^4x \ \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i, t) \qquad (11.5)$$

- Evaluăm variaţia δS,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)}}_{u} \underbrace{\delta(\partial_\mu \varphi_i)}_{\partial_\mu(\delta\varphi_i) = dv} \right) \qquad (11.149)$$

Obs: Sumarea după i din mecanică (vezi (3.9)), s-a înlocuit cu integrala după d^3x.
In plus, se cere anularea câmpurilor şi a derivatelor la infinit.

- Cu integrarea prin părţi $\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$ în ultimul termen din (11.149), folosind condiţia de minim $\delta S = 0$ şi $\delta(\partial_\mu \varphi_i) = \partial_\mu(\delta \varphi_i)$,

$$\text{avem,} \qquad 0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} \right) \right] \delta \varphi_i \qquad (11.150)$$

- La variaţii $\delta \varphi_i$ arbitrare $\Rightarrow$ *ecuaţiile Euler-Lagrange pentru câmpuri* (similar cu ecuaţiile (3.10) din mecanică)

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} \right) = 0} \ \text{sau} \ \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi_i / \partial t)} \right) - \nabla \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi_i)} \right) = 0} \qquad (11.151)$$

11.4 Câmpuri scalare

11.4.1 Lagrangian şi ecuaţiile de câmp scalar clasic

- Atunci, Lagrangianul invariant Lorentz, pt. un *câmp scalar* φ va fi, (similar cu (3.3))

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right]} \qquad (11.152)$$

unde $(\partial_\mu\varphi)^2 = \partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi = \partial_\mu\varphi\,g^{\mu\nu}\,\partial_\nu\varphi$

- Pentru scrierea ecuaţiei de mişcare (11.151)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right) = 0 \qquad (11.151)$$

avem

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = -m^2\varphi \quad ; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = \partial^\mu\varphi \qquad (11.153)$$

- Adică, ecuaţia de mişcare (11.151) pentru acest câmp va fi

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\varphi(x) = 0 \qquad (11.154)$$

care este *ecuaţia Klein-Gordon* pentru particule scalare de masă m (vezi secţiunea 5.3, pag.75).

11.5 Câmpul Electromagnetic (Maxwell)

11.5.1 Lagrangian şi ecuaţiile de câmp electromagnetic (Maxwell)

- Ecuaţiile Maxwell sunt (vezi (7.13)):

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\epsilon_0} \quad (a) \quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (c) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad (b) \quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (d) \end{cases} \tag{11.155}$$

- Câmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ sunt date de potenţialele scalar φ si vector $\vec{A}$:

$$\begin{cases} \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases} \tag{11.156}$$

- De data asta căutăm ecuaţiile de câmp EM (Maxwell) (11.155) cu ajutorul ecuaţiilor Euler-Lagrange (11.151). Pentru aceasta avem nevoie de

- Densitatea de Lagrangian pentru câmpul electromagnetic este:

$$\boxed{\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\epsilon_0E^2-\frac{1}{\mu_0}B^2\right)-\rho\varphi+\vec{J}\cdot\vec{A}} \tag{11.157}$$

- $\mathcal{L}$ conţine termenii: (1) - *densitatea de energie* din câmpul EM (8.19) pag.128, (2) - densitatea de energia dată de interacţia *sarcinii* ρ cu *potenţial scalar* φ şi (3) - densitatea de energie dată de interacţia *curentului* $\vec{J}$ cu *potenţial vector* $\vec{A}$ (a se compara cu expresia Lagrangian-ului (10.5) din tratarea clasică pag.161).

Ecuaţiile de câmp electromagnetic (Maxwell (a))

Variabilele independente (coordonatele) de câmp de data asta sunt potenţialul scalar φ şi componentele de potenţial vector A_x, A_y, A_z.

- Ecuaţiile de câmp (ecuaţiile de mişcare Euler-Lagrange (11.151)) pentru $\varphi_i=\varphi$ sunt,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}-\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}\right)=0 \tag{11.151}$$

adică: $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}=-\rho$; $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=0$; pentru $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}$ avem $\vec{\nabla}\varphi=-\vec{E}$,

iar $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)_x}=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial E_x}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\epsilon_0E^2\right)}{\partial E_x}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\epsilon_0(E_x^2+E_y^2+E_z^2)\right)}{\partial E_x}=-\epsilon_0E_x$$

şi similar componentele după y şi z. Atunci:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}\right)=-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial E_x}\right)-\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial E_y}\right)-\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial E_z}\right)=-\epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

- Inlocuind în (11.151), avem: $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}-\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}\right)=-\rho+\epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$$

sau $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\epsilon_0}}$ adică am obţinut I-a ecuaţie Maxwell (11.155)-(a).

Ecuaţiile de câmp electromagnetic (Maxwell (d)

- Ecuaţiile Euler-Lagrange (11.151) pentru $\varphi_i = A_i \ (i = x, y, z)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla} A_i)}\right) = 0 \qquad (11.151)$$

- Densitatea de Lagrangian (11.157) pentru câmpul electromagnetic este:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 - \frac{1}{\mu_0} B^2\right) - \rho\varphi + \vec{J}\cdot\vec{A} \qquad (11.157)$$

- Explicit, câmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ sunt legate de potenţialele φ şi $\vec{A}$ prin (11.156):

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \dot{A}_x\right)\vec{i} + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \dot{A}_y\right)\vec{j} + \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \dot{A}_z\right)\vec{k}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = \left(\partial_y A_z - \partial_z A_y\right)\vec{i} + \left(\partial_z A_x - \partial_x A_z\right)\vec{j} + \left(\partial_x A_y - \partial_y A_x\right)\vec{k}$$

- Pentru $A_i = A_x$, termenul din $\mathcal{L}$ (11.157) ce depinde de A_x este $\vec{J}\cdot\vec{A}$, cel ce depinde de $\dot{A}_x$ este $\epsilon_0 E^2/2$, iar cel ce depinde de $\partial_j A_x$ este $-B^2/2\mu_0$. Atunci (11.151) devine:

$$\frac{\partial(\vec{J}\cdot\vec{A})}{\partial A_x} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial(\epsilon_0 E^2/2)}{\partial \dot{A}_x} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial(-B^2/2\mu_0)}{\partial(\partial_j A_x)}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial A_x}(J_x A_x + J_y A_y + J_z A_z) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial E^2}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial \dot{A}_x} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial(\partial_j A_x)} = 0$$

$$J_x + \epsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\underbrace{\left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\right)}_{-(\vec{\nabla}\times\vec{B})_x} = 0$$

la fel pentru proiecţiile pe y şi z.

Atunci $\Longrightarrow$ $$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

Ecuaţiile de câmp electromagnetic (Maxwell (b)-(c))

- Celelalte două ecuaţii Maxwell (11.155) (b)-(c) se obţin imediat din expresiile (11.156) ale câmpurilor prin potenţiale.

  Pentru $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, deoarece divergenţă de rotor este zero, avem imediat:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = div(\vec{B}) = div(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = div\, rot(\vec{A}) = 0 \qquad \text{(b)}$$

- Pentru $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \partial\vec{A}/\partial t$, deoarece rotor din gradient este zero, avem,

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = rot(\vec{E}) = -rot\, grad(\varphi) - \frac{\partial}{\partial t}rot(\vec{A}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(c)}$$

11.5.2 Ecuaţiile de câmp electromagnetic (Maxwell) covariante

- Lagrangianul de câmp electromagnetic (similar (11.157)) este:

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \mu_0 j^\mu A_\mu} \tag{11.158}$$

I-ul termen este expresia 4-dim a primului termen (din paranteze) din Lagrangian-ul (11.157), iar al II-lea este cea a celor doi termeni următori din (11.157).

- Tensorul de câmp (9.36)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \quad ; \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \equiv \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \tag{11.159}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1/c & E^2/c & E^3/c \\ -E^1/c & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2/c & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3/c & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1/c & -E^2/c & -E^3/c \\ E^1/c & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2/c & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3/c & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{11.160}$$

Unde, ridicarea perechilor de indici spaţiali (i,j) nu schimbă de semn, în timp ce ridicarea indicilor time-space (0,j), (i,0) schimbă de semn.

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\overbrace{2\left(E_1^2 + E_2^2 + E_3^2\right)/c^2}^{F_{0i}F^{0i} + F_{i0}F^{i0}} + \overbrace{2\left(B_3^2 + B_2^2 + B_1^2\right)}^{F_{ij}F^{ij} + F_{ji}F^{ji}} = 2\left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right)$$

Explicit

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= \left(F_{12}F^{12} + F_{21}F^{21}\right) + \left(F_{23}F^{23} + F_{32}F^{32}\right) + \left(F_{31}F^{31} + F_{13}F^{13}\right) \\ &+ \left(F_{01}F^{01} + F_{10}F^{10}\right) + \left(F_{02}F^{02} + F_{20}F^{20}\right) + \left(F_{03}F^{03} + F_{30}F^{30}\right) \\ &= \left(F_{12}F_{12} + F_{12}F_{12}\right) + \left(F_{23}F_{23} + F_{23}F_{23}\right) + \left(F_{31}F_{31} + F_{31}F_{31}\right) \\ &- \left(F_{01}F_{01} + F_{01}F_{01}\right) - \left(F_{02}F_{02} + F_{02}F_{02}\right) - \left(F_{03}F_{03} + F_{03}F_{03}\right) \\ &= 2\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1}\right)^2 \\ &- 2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^2}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^3}\right)^2 \end{aligned}$$

- Vom deduce ecuaţiile de câmp (Maxwell) din ecuaţiile Euler-Lagrange (11.151):

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) = 0} \tag{11.161}$$

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_1 A_2)} = -\dfrac{4}{4}\left(\dfrac{\partial A_2}{\partial x^1} - \dfrac{\partial A_1}{\partial x^2}\right) = -\underbrace{(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)}_{F_{12}} = -F_{12} = F_{21} = F^{21} = -F^{12}$

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_1)} = +\dfrac{4}{4}\left(\dfrac{\partial A_1}{\partial x^0} - \dfrac{\partial A_0}{\partial x^1}\right) = +\underbrace{(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0)}_{F_{01}} = F_{01} = -F_{10} = F^{10} = -F^{01}$

- deci $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\mu_0 j^\nu$; $\partial_\mu\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) = -\partial_\mu F^{\mu\nu} \Longrightarrow$

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu} \tag{11.162}$$

Am regăsit ecuaţiile neomogene covariante (9.42).
Cele omogene se pot scrie sub forma identităţii Bianchi (9.45).

11.5.3 Ecuaţia de continuitate (conservare curent electromagnetic)

- Am văzut, ecuaţia de continuitate atât în mecanica fluidelor (pag.27), cât şi în mecanica cuantică nerelativistă (pag.75) sau în cea relativistă (pag.76), este:

$$\partial_\mu j^\mu \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Folosind ecuaţiie Maxwell neomogene (9.42) $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$, ecuaţia de continuitate devine

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \left(\frac{1}{\mu_0} \partial_\nu F^{\nu\mu} \right) = \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0$$

folosind definiţia $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ (9.36) avem,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \right) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \left(\partial_\mu A^\mu \right) = \mu_0 j^\mu$$

Folosind calibrarea Lorenz (8.42): $\partial_\mu A^\mu = 0$, rămâne,

ecuaţia de continuitate pentru potenţialul electromagnetic A^μ

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu} \tag{11.163}$$

In absenţa curenţilor $j^\nu = 0$ obţinem ecuaţia Klein-Gordon pentru particule de masă nulă $m = 0$ (fotoni) $\partial_\mu \partial^\mu \psi = 0$ (pag.75), adică ecuaţia de propagare a undelor electromagnetice. A^ν joacă rolul funcţiei de undă ψ din ecuaţiile cuantice.

11.6 Câmpul Schrödinger

11.6.1 Lagrangian şi ecuaţiile de câmp Schrödinger clasic

- Pentru a explicita ecuaţia Euler-Lagrange de mişcare (11.6) (*ecuaţia de câmp*)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\,(\nabla\varphi)}\right) = 0 \qquad (11.6)$$

- Avem Lagrangian-ul $\mathcal{L}$ de câmp Schrödinger de forma

$$\boxed{\mathcal{L} = i\hbar\psi^*\dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi - V\psi^*\psi} \qquad (11.164)$$

- Prin variaţia $\delta\psi^*$ avem: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = i\hbar\dot{\psi} - V\psi$; $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = 0$; $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial\,(\nabla\psi^*)} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi$
- Ecuaţia (11.6) de câmp Schrödinger real ψ $\boxed{i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\,\psi}$ cu soluţia reală: $\psi(x,t) = \alpha\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$ (11.165)

identică cu ecuaţia de stare Schrödinger din Mecanica Cuantică (4.37).

- Prin variaţia $\delta\psi$ avem: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -V\psi^*$; $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\hbar\psi^*$; $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial\,(\nabla\psi)} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*$
- Ecuaţia (11.6) de câmp Schrödinger complex ψ^* $\boxed{-i\hbar\dfrac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + V\psi^*}$ cu soluţia complexă: $\psi^*(x,t) = \alpha^*\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$

- In Mecanica Cuantică e utilizată doar soluţia Schrödinger reală $\psi(\vec{x},t)$.

11.7 Câmpuri Klein-Gordon

11.7.1 Lagrangian şi ecuaţiile de câmp Klein-Gordon real şi complex

- Ecuaţia Euler-Lagrange de mişcare (11.151) (*ecuaţia de câmp*)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\,(\nabla\varphi)}\right) = 0 \qquad (11.151)$$

- Lagrangian-ul de câmp Klein-Gordon real

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}^2 - (\nabla\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right]} \text{ sau } \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right)} \qquad (11.166)$$

- Prin variaţia $\delta\varphi$ avem: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2\varphi$; $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}$; $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi)} = -\nabla\varphi$
- Adică, ecuaţia (11.151) de câmp K-G real este

$$\boxed{(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\varphi = 0} \text{ sau } \boxed{(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\varphi = 0} \qquad (11.167)$$

identică cu *ecuaţia de stare* Klein-Gordon din Mecanica Cuantică (5.3).

- Lagrangian-ul Klein-Gordon complex, transcris după cel real (11.166):

$$\boxed{\mathcal{L}=\dot{\varphi}^*\dot{\varphi}-\nabla\varphi^*\cdot\nabla\varphi-m^2\varphi^*\varphi\equiv\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi-m^2\varphi^*\varphi} \tag{11.168}$$

- Ecuaţia Euler-Lagrange (11.151) pentru cele două câmpuri este:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_i}-\nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\varphi_i\right)}=0 \tag{11.169}$$

- Atunci, $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}=-m^2\varphi^*$; $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=\dot{\varphi}^*$; $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi)}=-\nabla\varphi^* \implies \boxed{\left(\partial_t^2-\nabla^2+m^2\right)\varphi^*=0}$

Ecuaţia K-G pt. câmp complex

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*}=-m^2\varphi \;;\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}^*}=\dot{\varphi} \;;\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi^*)}=-\nabla\varphi \implies \boxed{\left(\partial_t^2-\nabla^2+m^2\right)\varphi=0}$$

Ecuaţia K-G pt. câmp real

- Soluţiile de *câmp (scalar) Klein-Gordon* real $\varphi(\vec{x},t)$ şi complex $\varphi^*(\vec{x},t)$ sunt:

$$\begin{cases}\varphi(\vec{x},t)\;=\;\alpha(\vec{k})e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\\ \varphi^*(\vec{x},t)\;=\;\alpha^*(\vec{k})e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\end{cases} \tag{11.170}$$

- \- soluţia pentru $E=\hbar\omega>0$ (particule) este: $\varphi(\vec{x},t)=\alpha(\vec{k})e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$

  \- soluţia pentru $E<0$ (antiparticule) este: $\varphi^*(\vec{x},t)=\alpha^*(\vec{k})e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$

  Pauli şi Weisskopf (Helv.Phys.Acta 7,709 (1934)) au arătat că ecuaţia Klein-Gordon descrie particule de spin 0. Ecuaţiile Dirac şi Proca descriu particule de spin $1/2$ respectiv spin 1.

- Dacă avem de a face cu mai multe câmpuri în interacţie, ecuaţiile de mişcare au aceeaşi formă (11.151) doar că de data asta câmpurile au un indice suplimentar desemnând diferitele câmpuri avute în vedere

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)}\right)=0 \quad \text{sau} \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\varphi_i/\partial t)}\right)-\nabla\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi_i)}\right)=0$$

11.7.2 Soluţia generală de câmp Klein-Gordon (unităţi $\hbar=c=1$)

- Soluţia generală K-G este o superpoziţie de φ şi φ^*. Cu $k\cdot x=\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x}$,

$$\varphi(\vec{x},t)=\int d^4k\left(\alpha_{\vec{k}}e^{-ik\cdot x}+\alpha^*_{\vec{k}}e^{ik\cdot x}\right) \tag{11.171}$$

- Folosim relaţiile de bază: $E=\hbar\omega,\quad \vec{p}=\hbar\vec{k},\quad x^0=ct,\quad k^0=\omega/c=E/\hbar c$

$$k^\mu=\begin{pmatrix}\omega/c\\ \vec{k}\end{pmatrix} \;;\; p^\mu=\begin{pmatrix}E/c\\ \vec{p}\end{pmatrix} \;;\; x^\mu=\begin{pmatrix}ct\\ \vec{x}\end{pmatrix} \;;\; \begin{cases}k\cdot x=\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x}\\ p\cdot x=Et-\vec{p}\cdot\vec{x}\end{cases}$$

Pentru $\hbar=c=1$ avem $d^4k=dk^0\,d^3\vec{k}=dE\,d^3\vec{p}=d^4p$

- Cu <u>legătura între $\vec{p}$ şi E</u> (conservare energie): $\delta\left(p^2-m^2\right)=\delta(E^2-|\vec{p}|^2-m^2)$

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x},t)&=\int d^4p\left[\alpha\,e^{-ip\cdot x}+\alpha^*e^{ip\cdot x}\right]\delta\left(p^2-m^2\right) \qquad (11.172)\\ &=\int d^3\vec{p}\;\underbrace{dE\,\delta(E^2-|\vec{p}|^2-m^2)}\left[\alpha\,e^{-i(E(\vec{p})t-\vec{p}\cdot\vec{x})}+\alpha^*e^{i(E(\vec{p})t-\vec{p}\cdot\vec{x})}\right]\end{aligned}$$

- Cum E nu mai este variabilă independentă, efectuăm integrala după dE cu funcţia $\delta[f(x)] = \frac{1}{|df/dx|_{x_0}}\delta(x-x_0)$, unde $f(E) = E^2 - |\vec{p}|^2 - m^2$ (vezi (11.178))

  cu soluţia pozitivă de energie $E_0(\vec{p}) = +\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$

  $\Rightarrow$ în variabilele$(E_0, \vec{p})$ $\quad \varphi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_0(\vec{p})}\left[\alpha\, e^{-i(E_0 t - \vec{p}\cdot\vec{x})} + \alpha^* e^{i(E_0 t - \vec{p}\cdot\vec{x})}\right]$ (11.173)

unde am introdus constanta $(2\pi)^3$ pentru utilizare ulterioară în integrala Fourier.

$\Rightarrow$ în variabilele$(\omega_0, \vec{k})$ $\quad \varphi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_0(\vec{k})}\left[\alpha\, e^{-i(\omega_0 t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \alpha^* e^{i(\omega_0 t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\right]$ (11.174)

- Soluţia generală este o superpoziţie de φ şi φ^*. Notăm $k\cdot x = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}$, avem

Soluţii discrete de undă plană

$$\varphi(x) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{V 2\omega_{\vec{k}}}}\left(\alpha_{\vec{k}} e^{-ik\cdot x} + \beta^*_{\vec{k}} e^{ik\cdot x}\right) \tag{11.175}$$

Soluţii continui de undă plană

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}}\left(\alpha_{\vec{k}} e^{-ik\cdot x} + \beta^*_{\vec{k}} e^{ik\cdot x}\right) \tag{11.176}$$

Verificare soluţie generală de câmp Klein-Gordon

- Ecuaţia Klein-Gordon (11.167): $\boxed{(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\varphi = 0}$ cu soluţia (11.172), unde am înlocuit $p\cdot x = Et - \vec{p}\cdot\vec{x}$

$$\varphi(t, \vec{x}) = \int d^3\vec{p}\, dE \left[\alpha\, e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})} + \alpha^* e^{i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}\right]\delta\left(E^2 - \vec{p}^2 - m^2\right)$$

$$\partial_t^2\varphi(t, \vec{x}) = \int d^3\vec{p}\, dE \left[(-iE)^2\alpha\, e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})} + (iE)^2\alpha^* e^{i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}\right]\delta\left(E^2 - \vec{p}^2 - m^2\right)$$

$$-\nabla^2\varphi(t, \vec{x}) = -\int d^3\vec{p}\, dE \left[(-i\vec{p})^2\alpha\, e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})} + (i\vec{p})^2\alpha^* e^{i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}\right]\delta\left(E^2 - \vec{p}^2 - m^2\right)$$

- Inlocuind în Ecuaţia Klein-Gordon,

$$\int d^3\vec{p}\, dE \left[\left(-E^2 + \vec{p}^2 + m^2\right)\alpha\, e^{-ip\cdot x} + \left(-E^2 + \vec{p}^2 + m^2\right)\alpha^* e^{ip\cdot x}\right]\delta\left(E^2 - \vec{p}^2 - m^2\right)$$

$$= \int d^3\vec{p} \underbrace{\int dE\, \left(-E^2 + \vec{p}^2 + m^2\right)\delta\left(E^2 - \vec{p}^2 - m^2\right)}_{=0} \left[\alpha\, e^{-ip\cdot x} + \alpha^* e^{ip\cdot x}\right] = 0$$

deoarece $\delta\left(E^2 - \vec{p}^2 - m^2\right) = \frac{1}{2E_0}\delta(E - E_0)$ $\quad$ cu $\quad E = E_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

Ecuaţia Klein-Gordon este verificată pentru $E = E_0(\vec{p})$

Elementul invariant 4-dim de sp. fazelor (unităţi $\hbar = c = 1$)

- Fie elementul 4-dim $d^4p = dE \cdot d^3\vec{p}$. 4-impulsul $p = (E, \vec{p})$ se transf. ca si 4-vectorul $x = (t, \vec{x})$. In transf. Lorentz, variaţia dE este o "dilatare" cu factorul γ la fel ca dt, iar variaţia d^3p este o "contracţie" pe direcţia de mişcare cu factorul $1/\gamma$ la fel ca d^3x. Deci $d^4p = dE \cdot d^3p$ este invariant.
- La integrarea după 4-impuls d^4p a unei funcţii invariante Lorentz $f(p)$ ţinem cont de legătura între cele 4 componente p_μ, prin conservarea energiei $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$, legătură ce se exprimă prin funcţia delta $\delta(p^2 - m^2)$, cu $p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2$. Atunci integrala căutată este

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi)\, f(p)\, \delta(p^2 - m^2)\bigg|_{E>0} \tag{11.177}$$

Constanta 2π a fost introdusă pt. uz ulterior. Condiţia $E > 0$ de integrare reaminteşte faptul că energia relativistă este întotdeauna pozitivă. Folosind relaţia pt. funcţia $\delta[f(x)] = \frac{1}{|df/dx|_{x_0}} \delta(x - x_0)$ cu x_0 soluţia pt. $f(x) = 0$, avem

$$\delta\Big[E^2 - |\vec{p}|^2 - m^2\Big] = \frac{1}{|2E|_{E_0}} \delta(E - E_0) = \frac{1}{2E_0} \delta(E - E_0) \tag{11.178}$$

cu soluţia > 0: $E_0(\vec{p}) = +\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$. Integrând (11.177) după dE, folosind (11.178)

$$\int \frac{d^3p\, dE}{(2\pi)^3}\, f(E, \vec{p})\, \delta\Big(E^2 - |\vec{p}|^2 - m^2\Big)\bigg|_{E>0} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_0(\vec{p})} f(E_0(\vec{p}), \vec{p}) \tag{11.179}$$

11.7.3 Densitatea şi curentul de particule Schrödinger şi Klein-Gordon

(reluare 5.3 pag.75)

	Ecuaţia Nerelativistă (Schrödinger)	Ecuaţia Relativistă (Klein-Gordon)	
Relaţia energie-impuls	1-dimensional $E=\dfrac{p^2}{2m}$	1-dimensional $\dfrac{E^2}{c^2}=p^2+m^2c^2$	4-dimensional $p^2=m^2c^2$
Trecerea la operatori diferenţiali:	$E\to i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$;	$p\to -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}\equiv -i\hbar\nabla$	$p^\mu\to i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}\equiv i\hbar\,\partial^\mu$
Ec. de câmp pt. particula liberă	$i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0$	$\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi=0$	$\left(\partial_\mu\partial^\mu+\dfrac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi=0$
Ec. complex conjugată	$-i\hbar\dfrac{\partial\psi^*}{\partial t}+\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}=0$	$\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}+\dfrac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi^*=0$	$\left(\partial_\mu\partial^\mu+\dfrac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi^*=0$
Inmulţim la stânga ec. de bază cu $-i\psi^*$ iar ec. c.c. la dreapta cu $i\psi$ apoi adunarea lor	$\underbrace{\left(\psi^*\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+\dfrac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right)}_{\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi)=\frac{\partial\rho}{\partial t}}+$ $\underbrace{-\dfrac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\psi\right)}_{-\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right)=\frac{\partial j}{\partial x}}=0$	$\underbrace{\dfrac{i}{c^2}\left(\psi^*\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}\psi\right)}_{\frac{i}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right)=\frac{\partial\rho}{\partial(ct)}}+$ $\underbrace{-i\left(\psi^*\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\psi\right)}_{-i\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right)=+\frac{\partial j}{\partial x}}=0$	$\begin{cases}x^\mu\equiv(ct,\vec{x})\ ;\ x_\mu\equiv(ct,-\vec{x})\\ \partial^\mu\equiv\left(\dfrac{\partial}{\partial(ct)},-\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\ ;\\ \partial_\mu\equiv\left(\dfrac{\partial}{\partial(ct)},\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\end{cases}$ $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\underbrace{\left[i\left(\psi^*\dfrac{\partial\psi}{\partial x_\mu}-\dfrac{\partial\psi^*}{\partial x_\mu}\psi\right)\right]}_{j^\mu}=0$
Ecuaţia de continuitate	$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial j}{\partial x}=0$	$\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial j}{\partial x}=0$	$\partial_\mu j^\mu=0$
Unde avem Densitatea ρ şi Curentul j de particule	$\begin{cases}\rho=\psi^*\psi=\lvert\psi\rvert^2\\ j=-\dfrac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\dfrac{\partial\psi}{\partial x}-\dfrac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right)\end{cases}$	$\begin{cases}\rho=\dfrac{i}{c}\left(\psi^*\dfrac{\partial\psi}{\partial t}-\dfrac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right)\\ j=-i\left(\psi^*\dfrac{\partial\psi}{\partial x}-\dfrac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right)\end{cases}$	$j^0\equiv c\rho\quad;\quad j^{1,2,3}\equiv\vec{j}$ $j^\mu=i\,(\psi^*\partial^\mu\psi-\partial^\mu\psi^*\,\psi)$
Folosind soluţia de undă plană (D.7) a ecuaţiei de bază de mai sus, cu înlocuirile:	$\begin{cases}p\cdot x=p_\mu x^\mu=Et-\vec{p}\cdot\vec{x}\\ k\cdot x=k_\mu x^\mu=\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x}=\frac{E}{\hbar}t-\frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{x}\end{cases}\ \longrightarrow$	$\begin{aligned}\psi&=N\,e^{-i\,(E\cdot t-\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}\\ &\equiv N\,e^{-i\,(\omega\cdot t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\\ \psi^*&=N^*\,e^{i\,(E\cdot t-\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}\\ &\equiv N^*\,e^{i\,(\omega\cdot t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\end{aligned}$	$\begin{aligned}\psi&=N\,e^{-i\,p\cdot x/\hbar}\\ &\equiv N\,e^{-i\,k\cdot x}\\ \psi^*&=N^*\,e^{i\,p\cdot x/\hbar}\\ &\equiv N^*\,e^{i\,k\cdot x}\end{aligned}$
Densitatea şi curentul pentru unda plană	$\begin{cases}\rho=\lvert N\rvert^2\\ \vec{j}=\dfrac{\vec{p}}{m}\lvert N\rvert^2\end{cases}$	$\begin{cases}c\rho=i\ (-2\,i\,\omega)\ \lvert N\rvert^2=2\omega\,\lvert N\rvert^2\\ \vec{j}=-i\ \left(2\,i\,\vec{k}\right)\ \lvert N\rvert^2=2\vec{k}\lvert N\rvert^2\end{cases}$	$j^\mu=2\,p^\mu\lvert N\rvert^2/\hbar$

- Norma $|N|$ a stărilor K-G de undă plană $\psi=N\,e^{-i(\omega\cdot t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$ se obţine prin integrarea *densităţii de câmp* $\rho=const.$, pe un volum cutie L^3:

$$\int_{L^3}c\rho\,d^3x=1\quad\text{sau}\quad 2\,\omega\,|N|^2L^3=1\qquad\text{astfel}\qquad |N|^2=\frac{1}{2\,\omega\,L^3}\tag{11.180}$$

$$\left.\begin{aligned}c\rho=j^0&-\text{time-like}\\ \vec{j}&-\text{space-like}\end{aligned}\right\}\text{4-vector } j^\mu\quad\left\{\begin{aligned}&\text{cu expresiile din tabel,}\\ &\text{şi } |N|^2 \text{ din (11.180),}\\ &\text{devin:}\end{aligned}\right.\qquad \boxed{c\rho=\frac{1}{L^3}}\ \text{şi}\ \boxed{\vec{j}=\frac{\vec{k}}{\omega L^3}}\tag{11.181}$$

- *Normarea invariantă* se obţine excluzând factorul $1/(2\omega)$ în (11.180), adică

$$|N|^2=\frac{1}{L^3}\tag{11.182}$$

- densitatea $c\rho$ şi curentul $\vec{j}$, invariante, sunt: $\left\{\begin{aligned}&\text{cu expresiile din tabel,}\\ &\text{şi } |N|^2 \text{ din (11.182),}\\ &\text{devin:}\end{aligned}\right.$

$$\boxed{c\rho=\frac{2\omega}{L^3}}\ \text{şi}\ \boxed{\vec{j}=\frac{2\vec{k}}{L^3}}\tag{11.183}$$

- Acum $c\rho$ şi $\vec{j}$ sunt invariante. $c\rho$ este proportional cu ω.
  La o transf. Lorentz, elem. de volum suferă o contracţie Lorentz: $d^3x \to d^3x\,\sqrt{1-\beta^2}$
  iar termenul $c\rho$ se dilată Lorentz ca şi componenta time-like: $c\rho \to c\rho/\sqrt{1-\beta^2}$,
  astfel că la o transformare Lorentz produsul $c\rho\, d^3x$ rămâne invariant, $\int_{L^3} c\rho\, d^3\vec{x} = 2\,\omega$

11.8 Câmpuri Dirac

11.8.1 Lagrangian şi ecuaţiile de câmp Dirac clasic (spin 1/2)

- Lagrangian-ul pentru un *câmp spinorial* ψ: $$\boxed{\mathcal{L} = i\,\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi} \qquad (11.184)$$

- Ecuaţia de mişcare Euler-Lagrange (11.151) este $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right) = 0 \qquad (11.151)$$

  ψ şi $\bar{\psi}$ sunt variabile dinamice independente, iar ec. Euler-Lagrange (11.151) pentru $\delta\bar{\psi}$ este: $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right) = 0 \qquad (11.185)$$

  avem $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi \quad ; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = 0 \qquad (11.186)$$

- Din ec. Euler-Lagrange (11.151) pentru $\delta\bar{\phi}$ obţinem ecuaţia Dirac pentru ψ: $$\boxed{i\,\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0} \qquad (11.187)$$

- Din ec. Euler-Lagrange (11.151) pentru $\delta\psi$ obţinem ec. Dirac adjunctă pt. $\bar{\psi}$: $$\boxed{i\,\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0} \qquad (11.188)$$

- Soluţia pentru $E > 0$ (particule) este: $\psi(\vec{x},t) = u(\vec{p})\,e^{-i\,p\cdot x}$
  Soluţia pentru $E < 0$ (antiparticule) e: $\bar{\psi}(\vec{x},t) = v(\vec{p})\,e^{+i\,p\cdot x}$

- Spinorii: $$u^{(1,2)} = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\sigma\cdot p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dfrac{\sigma\cdot p}{E+m} \end{pmatrix} \quad ; \quad v^{(1,2)} = N\begin{pmatrix} \dfrac{-\sigma\cdot p}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{-\sigma\cdot p}{|E|+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

11.8.2 Densitatea şi curentul de particule Dirac

(reluare 5.4 pag.76)

	Ecuaţia Relativistă - Dirac		
Relaţia energie-impuls	$\frac{E}{c} = \alpha \cdot p + \beta mc$	In reprezentarea Dirac-Pauli $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$	In reprezentarea Weyl $\alpha = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$
Trecerea la operatori diferenţiali: $E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$; $p \to -i\hbar \nabla$ $\Longrightarrow\ i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial ct} + i\hbar \alpha \cdot \nabla \psi = \beta\, mc\, \psi$ înmulţim la stânga cu β şi notăm: $\gamma^0 = \beta, \gamma^k = \beta \alpha^k$			
Ecuaţia Dirac	3-dimensional $i\hbar \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial ct} + i\hbar \gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - mc\, \psi = 0$	4-dimensional $(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc)\, \psi = 0$	
Ecuaţia Dirac conjugată hermitic	$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial ct} \gamma^0 - i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} \left(-\gamma^k\right) - mc\, \psi^\dagger = 0$ $\psi^\dagger$ - conj.hermitic (transp.& c.c.) - linie	pentru a reface forma covariantă, înlăturăm minusul de la γ^k. De aceea, deoarece $\gamma^0 \gamma^k = -\gamma^k \gamma^0$, înmulţim ecuaţia la dreapta cu γ^0. notăm: $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ (spinor adjunct) - linie	
Ec. Dirac adjunctă	$i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial ct} \gamma^0 + i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^k} \gamma^k + mc\, \bar{\psi} = 0$	$i\hbar \partial_\mu \bar{\psi}\, \gamma^\mu + mc\, \bar{\psi} = 0$	
Inmulţim ecuaţia de bază cu $\bar{\psi}$ la stînga	$i\hbar \bar{\psi} \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial ct} + i\hbar \bar{\psi} \gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - mc\, \bar{\psi} \psi\ +$	$\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \left(\partial_\mu \bar{\psi}\right) \gamma^\mu \psi =$ $= \partial_\mu \underbrace{\left(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi\right)}_{j^\mu} = 0$	
apoi ecuaţia adjunctă cu ψ la dreapta	$i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial ct} \gamma^0 \psi + i\hbar \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^k} \gamma^k \psi + mc\, \bar{\psi} \psi = 0$		
şi le adunăm	$\frac{\partial}{\partial ct} \Big(\underbrace{\bar{\psi} \gamma^0 \psi}_{\rho} \Big) + \frac{\partial}{\partial x^k} \Big(\underbrace{\bar{\psi} \gamma^k \psi}_{j^k} \Big) = 0$		
$\Longrightarrow$ Ecuaţia de continuitate $\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial j^k}{\partial x^k}$		$\partial_\mu j^\mu = 0$	
Densitatea şi curentul de partic.	$\begin{cases} \rho \equiv j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^{3} \lvert \psi_i \rvert^2 > 0 \\ \vec{j} \equiv j^k = \bar{\psi} \gamma^k \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^k \psi \end{cases}$	$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ dacă j^μ e 4-curentul de ELECTRONI, se înmulţeşte cu sarcina $-e$: $j^\mu = -e\, \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$	