Procese QED în câmpuri laser intense

M. Penţia

February 4, 2021

Cuprins

Partea I

Câmpuri scalare

Capitol 1

De la Mecanica Clasică la Mecanica Cuantică şi Câmpuri Cuantice

- Trecerea de la mecanica clasică la mecanica cuantică (cuantificarea I) s-a făcut prin înlocuirea mărimilor fizice cu operatori: $x \longrightarrow \hat{x} \qquad p \longrightarrow \hat{p}$

- Trecerea de la mecanica clasică la câmpuri clasice, s-a făcut prin înlocuirea variabilelor de coordonată şi derivata coordonatei (viteză sau impuls) cu cele de câmp şi derivata covariantă a câmpului: $x_i \longrightarrow \varphi_\mu \qquad \dot{x}_i \longrightarrow \partial_\mu \varphi$

- Trecerea de la câmpuri clasice la câmpuri cuantice (cuantificarea a II-a) se face prin înlocuirea câmpurilor şi a derivatelor de câmp cu operatorii corespunzători.

$$
\begin{array}{lll}
\varphi \longrightarrow \hat{\varphi} & \pi \longrightarrow \hat{\pi} & \mathcal{H}(\varphi, \pi) \longrightarrow \hat{\mathcal{H}}(\hat{\varphi}, \hat{\pi}) \\
\varphi^* \longrightarrow \hat{\varphi}^\dagger & \pi^* \longrightarrow \hat{\pi}^\dagger & \Big\{ \varphi, \pi \Big\} \longrightarrow \dfrac{1}{i\hbar} [\, \hat{\varphi}, \hat{\pi} \,]
\end{array}
\tag{1.1}
$$

1.1 Oscilatorul armonic

1.1.1 Oscilatorul armonic în mecanica clasică

- Conform Newton $F = m\ddot{x}$. Un corp de masă m, sub acţiunea forţei elastice $F(x) = -\kappa x$, are ec. de mişcare

$$\boxed{-\kappa\, x = m\ddot{x}} \tag{1.2}$$

- După cum am văzut, aceeaşi ecuaţie (1.2) se poate obţine şi cu ajutorul ecuaţiei Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0} \tag{1.3}$$

cu Lagrangian-ul: $L(x, \dot{x}) = T - V = \dfrac{m}{2}\dot{x}^2 - \dfrac{\kappa}{2}x^2 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial L}{\partial x} = -\kappa x \;\; ; \;\; \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

de unde $\quad m\ddot{x} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right),$ $\quad$ ecuaţia (1.3) conduce imediat la ecuaţia (1.2).

- De asemenea, aceeaşi ecuaţie (1.2) se poate obţine şi cu ajutorul ecuaţiilor Hamilton:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}} \qquad (1.4)$$

cu Hamiltonian-ul: $H(x,p)=T+V=\dfrac{p^2}{2m}+\dfrac{\kappa}{2}x^2 \implies \dfrac{\partial H}{\partial p}=\dfrac{p}{m} \;\; ; \; \dfrac{\partial H}{\partial x}=\kappa x$

de unde $\quad p=m\dfrac{\partial H}{\partial p}\overbrace{=}^{(1.4)}m\dot{x}$ $\qquad$ şi $\quad \kappa x=\dfrac{\partial H}{\partial x}\overbrace{=}^{(1.4)}-\dot{p}=-m\ddot{x}$ adică (1.2)

- Prin integrarea ecuaţiei de mişcare se obţine ”traiectoria” $x = x(t)$ a particulei.
  In cazul de faţă, *mişcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t)=x_0\cos(\omega t)=a\,e^{i\,\omega\,t}+a^*e^{-i\,\omega\,t} \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \qquad (1.5)$$

1.1.2 Oscilatorul armonic în mecanica cuantică armonic (formalism Dirac)

- Cuantificarea oricărui sistem mecanic se face prin schimbarea mărimilor fizice cu operatorii corespunzători:

$$x \to \hat{x} = x\, ;\; p \to \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\, ;\; E \to \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad \begin{cases} H(x,p) \to \hat{H}\left(\hat{x},\hat{p}\right) \\ \{x,p\} \to \dfrac{1}{i\hbar}[\hat{x},\hat{p}] \end{cases}$$

- Un oscilator armonic clasic, are energia totală exprimată prin Hamiltonian:

$$H(x,p) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{\kappa}{2}x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad \text{am folosit (1.5)} \quad \kappa = m\omega^2 \tag{1.6}$$

- **Cuantificarea oricărui sistem clasic** se face cu ajutorul Hamiltonian-ului, prin

- trecerea la operatori $\hat{H}(\hat{x},\hat{p}) = \hat{T} + \hat{V} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ cu operatorii corespunzători variabilelor conjugate canonic ce satisfac relaţia de comutare: $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$

- şi rezolvarea ecuaţiei de undă cu valori şi funcţii proprii de energie: $\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$ (1.7)

- De exemplu, în cazul oscilatorului armonic cuantic, folosim formalismul Dirac pentru aflarea valorilor E_n.

- Inlocuim $\hat{x}$ şi $\hat{p}$ cu operatorii hermitici reduşi $\hat{X}$ şi $\hat{P}$ (adimensionali):

$$\boxed{\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} \quad ; \; \hat{P} = \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}\hat{p} \quad \text{cu} \quad \left[\hat{X},\hat{P}\right] = i} \tag{1.8}$$

Intr-adevăr, $\left[\hat{X},\hat{P}\right] = \hat{X}\hat{P} - \hat{P}\hat{X} = \sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}}\sqrt{\dfrac{1}{m\omega\hbar}}\underbrace{[\hat{x},\,\hat{p}]}_{i\hbar} = i$

- Hamiltonian-ul devine:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 = \frac{m\omega\hbar}{2m}\hat{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\hat{X}^2 = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2\right) \tag{1.9}$$

Dacă X şi P ar fi numere reale, acesta este Hamiltonian-ul clasic (1.6)

Dacă $\hat{X}$ şi $\hat{P}$ sunt operatori, $\hat{H}$ se poate scrie:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\underbrace{\left(\hat{X} - i\hat{P}\right)}_{\hat{a}^\dagger}\underbrace{\left(\hat{X} + i\hat{P}\right)}_{\hat{a}} \tag{1.10}$$

- Astfel, Dirac trece la operatorii adimensionali $\hat{a}$ şi $\hat{a}^\dagger$:

$$\boxed{\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} + i\hat{P}\right) \; ; \; \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} - i\hat{P}\right) \; \text{cu} \; \left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] = 1} \tag{1.11}$$

Intr-adevăr,

$$\begin{aligned}\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] &= \frac{1}{2}\left[\hat{X} + i\hat{P}, \hat{X} - i\hat{P}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\left[\hat{X},\hat{X}\right]}_{=0} - i\underbrace{\left[\hat{X},\hat{P}\right]}_{=i} + i\underbrace{\left[\hat{P},\hat{X}\right]}_{=-i} + \underbrace{\left[\hat{P},\hat{P}\right]}_{=0}\right) = \frac{1}{2}\left(1+1\right) = 1\end{aligned}$$

deci $\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] = +1$ şi similar $\left[\hat{a}^\dagger,\hat{a}\right] = -1$ (1.12)

- Hamiltonian-ul (1.10) va fi: $\hat{H} = \hbar\omega\, \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ori $\hat{H} = \hbar\omega\, \hat{a}\hat{a}^\dagger$ (ambiguitate de ordonare).

- Putem exprima operatorii hermitici $\hat{X}$ şi $\hat{P}$ cu ajutorul $\hat{a}$ şi $\hat{a}^\dagger$:

$$\boxed{\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right) \; ; \; \hat{P} = \frac{-i}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right)} \tag{1.13}$$

- Am văzut (1.9) Hamiltonian-ul nostru este:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{X}^2+\hat{P}^2\right) \quad \begin{cases} \hat{X}^2 = \frac{1}{2}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{a}^2+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}+(\hat{a}^\dagger)^2\right) \\ \hat{P}^2 = -\frac{1}{2}(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)(\hat{a}-\hat{a}^\dagger) = -\frac{1}{2}\left(\hat{a}^2-\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}+(\hat{a}^\dagger)^2\right) \end{cases}$$

- Folosind relaţia de comutare $\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$, Hamiltonian-ul devine:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{X}^2+\hat{P}^2\right) = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\underbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger}_{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1} + \underbrace{\hat{a}^\dagger\hat{a}}_{\hat{a}\hat{a}^\dagger-1}\right) = \begin{cases} \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right) \\ \hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \tag{1.14}$$

- Evaluăm şi relaţiile de comutare $\left[\hat{H},\hat{a}\right]$, $\left[\hat{H},\hat{a}^\dagger\right]$ pentru Hamiltonianul $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\right)$

$$\left[\hat{H},\hat{a}\right] = \left[\hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \tfrac{1}{2}\right),\hat{a}\right] = \hbar\omega\left(\hat{a}\underbrace{\left[\hat{a}^\dagger,\hat{a}\right]}_{-1} + \underbrace{\left[\hat{a},\hat{a}\right]}_{0}\hat{a}^\dagger\right) = -\hbar\omega\hat{a}$$

deci $\left[\hat{H},\hat{a}\right] = -\hbar\omega\hat{a}$ şi similar $\left[\hat{H},\hat{a}^\dagger\right] = +\hbar\omega\hat{a}^\dagger$ (1.15)

Rezolvarea ecuaţiei cu valori proprii de energie

- Presupunem că ψ_n este stare proprie a hamiltonianului $\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$ (1.7), cu energia E_n.

  Să studiem acum acţiunea comutatorilor $\left[\hat{H}, \hat{a}\right]$ şi $\left[\hat{H}, \hat{a}^\dagger\right]$ asupra funcţiei de stare ψ_n.

$$\left[\hat{H}, \hat{a}\right]\psi_n = -\hbar\omega\hat{a}\psi_n$$

$$\hat{H}\hat{a}\psi_n - \hat{a}\underbrace{\hat{H}\psi_n}_{E_n\psi_n} = -\hbar\omega\hat{a}\psi_n$$

$$\hat{H}\left(\hat{a}\psi_n\right) - E_n\left(\hat{a}\psi_n\right) = -\hbar\omega\left(\hat{a}\psi_n\right)$$

$$\hat{H}\left(\hat{a}\psi_n\right) = \left(E_n - \hbar\omega\right)\left(\hat{a}\psi_n\right)$$

adică $\left(\hat{a}\psi_n\right) \sim \psi_{n-1}$ este funcţie proprie pentru Hamiltonianul $\hat{H}$, cu valoarea proprie $E_n - \hbar\omega$.

Deci, $\hat{a}\psi_n$ este starea cu energia coborâtă cu $\hbar\omega$.

$$\left[\hat{H}, \hat{a}^\dagger\right]\psi_n = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\psi_n$$

$$\hat{H}\hat{a}^\dagger\psi_n - \hat{a}^\dagger\underbrace{\hat{H}\psi_n}_{E_n\psi_n} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\psi_n$$

$$\hat{H}\left(\hat{a}^\dagger\psi_n\right) - E_n\left(\hat{a}^\dagger\psi_n\right) = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\psi_n\right)$$

$$\hat{H}\left(\hat{a}^\dagger\psi_n\right) = \left(E_n + \hbar\omega\right)\left(\hat{a}^\dagger\psi_n\right)$$

adică $\left(\hat{a}^\dagger\psi_n\right) \sim \psi_{n+1}$ este funcţie proprie pentru Hamiltonianul $\hat{H}$, cu valoarea proprie $E_n + \hbar\omega$.

Deci, $\hat{a}^\dagger\psi_n$ este starea cu energia ridicată cu $\hbar\omega$.

- Cu operatorii $\hat{a}^\dagger$ de creare şi $\hat{a}$ de anihilare stări se pot obţine toate stările de energie ale oscilatorului armonic. Totuşi, nu putem coborî sub zero energia oscilatorului armonic.

- Pentru a opri ca operatorul de coborâre $\hat{a}$ să ducă la stări de energie negativă, prin aplicarea succesivă asupra funcţiei de stare ψ_n, va trebui să facem ca funcţia proprie însăşi să devină zero, pentru energia minimă. Adică pentru starea fundamentală cerem ca: $\hat{a}\psi_0 = 0$

Deoarece $\hat{H}$ (1.14) conţine $\hat{a}$ pe poziţia necesară (”ordonarea normală”), putem scrie energia stării fundamentale:

$$\hat{H}\psi_0 = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\psi_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\underbrace{\hat{a}\psi_0}_{0} + \frac{\hbar\omega}{2}\psi_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\psi_0 \qquad (1.16)$$

- Deci energia stării fundamentale este: $$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \qquad (1.17)$$

- Identificăm operatorul *număr de stări*: $$\boxed{\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}} \qquad (1.18)$$

- Studiem acum acţiunea operatorului *număr de stări* asupra funcţiei $\psi_n \equiv |n\rangle$.

  Am văzut că $\hat{a}\psi_n$ este legat de $|n-1\rangle$ iar $\hat{a}^\dagger\psi_n$ este legat de $|n+1\rangle$.

- Separat, operatorii $\hat{a}$ de anihilare şi $\hat{a}^\dagger$ de creare stări, conduc la stările (normate):

$$\begin{cases} \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \quad \text{cu} \quad \hat{a}|0\rangle = 0 \quad \text{şi} \quad \||0\rangle\|^2 = 1 \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle} \end{cases} \tag{1.19}$$

- Operatorul $\hat{N}$ număr de stări

$$\begin{cases} \hat{N}|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \hat{a}^\dagger\sqrt{n}\,|n-1\rangle = \\ \quad = \sqrt{n}\sqrt{n}\,|n\rangle = n\,|n\rangle \end{cases} \quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{1.20}$$

- Setul complet de vectori de bază $|n\rangle$ sunt *funcţii proprii* din ecuaţia cu valori proprii $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$

$$\hat{H}\,|n\rangle = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = E_n\,|n\rangle \tag{1.21}$$

- Adică *valorile proprii* cuantificate de energie ale oscilatorului armonic sunt

$$\boxed{E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega} \quad (n=0,1,2...) \tag{1.22}$$

- In starea fundamentală $n=0$, $\quad E_0 = \dfrac{1}{2}\hbar\omega \neq 0$

1.2 Lagrangian şi ecuaţiile de câmp scalar real şi complex

- Ecuaţia Euler-Lagrange de mişcare (*ecuaţia de câmp*)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}-\nabla\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\varphi\right)}\right)=0 \qquad (1.23)$$

- Lagrangian-ul de câmp scalar real

$$\boxed{\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}^2-(\nabla\varphi)^2-m^2\varphi^2\right]}\ \text{sau}\ \boxed{\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi-m^2\varphi^2\right)} \qquad (1.24)$$

- Hamiltonian-ul de câmp scalar este

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\varphi,\pi)&=\pi\dot{\varphi}-\mathcal{L}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi}-\frac{1}{2}\left[(\dot{\varphi})^2-(\nabla\varphi)^2-m^2\varphi^2\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}^2+(\nabla\varphi)^2+m^2\varphi^2\right]\end{aligned} \qquad (1.25)$$

- Prin variaţia $\delta\varphi$ avem: $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}=-m^2\varphi$; $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=\dot{\varphi}$; $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi)}=-\nabla\varphi$

- Adică, ecuaţia (1.23) de câmp scalar real este

$$\boxed{(\partial_t^2-\nabla^2+m^2)\varphi=0} \quad \text{sau} \quad \boxed{(\partial_\mu\partial^\mu+m^2)\varphi=0} \qquad (1.26)$$

identică cu *ecuaţia de stare* Klein-Gordon din Mecanica Cuantică.

- Lagrangian-ul de câmp scalar complex, transcris după cel real (1.24):

$$\boxed{\mathcal{L}=\dot{\varphi}^*\dot{\varphi}-\nabla\varphi^*\cdot\nabla\varphi-m^2\varphi^*\varphi\equiv\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi-m^2\varphi^*\varphi} \qquad (1.27)$$

- Sistemul de ecuaţii Euler-Lagrange de tip (1.23) pentru cele două câmpuri este:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_i}-\nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\nabla\varphi_i\right)}=0 \quad \text{sau} \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)}\right)=0 \quad (i=1,2) \qquad (1.28)$$

- Atunci, $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}=-m^2\varphi^*$; $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=\dot{\varphi}^*$; $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi)}=-\nabla\varphi^*$ $\Longrightarrow$ $\boxed{(\partial_t^2-\nabla^2+m^2)\,\varphi^*=0}$

Ecuaţia de câmp scalar complex

$\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*}=-m^2\varphi$; $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}^*}=\dot{\varphi}$; $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi^*)}=-\nabla\varphi$ $\Longrightarrow$ $\boxed{(\partial_t^2-\nabla^2+m^2)\,\varphi=0}$

Ecuaţia de câmp scalar real

- Soluţiile de *câmp (scalar)* real $\varphi(\vec{x},t)$ şi complex $\varphi^*(\vec{x},t)$ sunt:

$$\begin{cases}\varphi(\vec{x},t)\;=\;\alpha(\vec{k})e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\\ \varphi^*(\vec{x},t)\;=\;\alpha^*(\vec{k})e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}\end{cases} \qquad (1.29)$$

- \- soluţia pentru $E=\hbar\omega>0$ (particule) este: $\varphi(\vec{x},t)=\alpha(\vec{k})e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$

  \- soluţia pentru $E<0$ (antiparticule) este: $\varphi^*(\vec{x},t)=\alpha^*(\vec{k})e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x})}$

  Pauli şi Weisskopf (1934) au arătat că ecuaţia Klein-Gordon (de câmp scalar) descrie particule de spin 0. Ecuaţiile Dirac şi Proca descriu particule de spin $1/2$ respectiv 1.

1.2.1 Soluţia generală de câmpuri scalare libere (unităţi $\hbar = c = 1$)

- Soluţia generală de câmp scalar este o superpoziţie de unde plane φ şi φ^*. Notăm $k\cdot x = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}$,

$$\varphi(\vec{x},t) = \int d^4k \left(\alpha_{\vec{k}} e^{-ik\cdot x} + \alpha^*_{\vec{k}} e^{ik\cdot x}\right) \tag{1.30}$$

- Folosim relaţiile de bază: $E = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, $x^0 = ct$, $k^0 = \omega/c = E/\hbar c$

$$k^\mu = \begin{pmatrix}\omega/c\\ \vec{k}\end{pmatrix} \quad ; \quad p^\mu = \begin{pmatrix}E/c\\ \vec{p}\end{pmatrix} \quad ; \quad x^\mu = \begin{pmatrix}ct\\ \vec{x}\end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{cases} k\cdot x = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} & \Big|\times\hbar \\ p\cdot x = Et - \vec{p}\cdot\vec{x} \end{cases}$$

Pentru $\hbar = c = 1$ avem $d^4k = dk^0\, d^3\vec{k} = dE\, d^3\vec{p} = d^4p$

- Cu legătura între $\vec{p}$ şi E (conservare energie): $\delta(p^2 - m^2) = \delta(E^2 - |\vec{p}|^2 - m^2)$,

  soluţia (1.30) devine

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x},t) &= \int d^4p \left[\alpha\, e^{-ip\cdot x} + \alpha^* e^{ip\cdot x}\right] \delta\left(p^2 - m^2\right) \\ &= \int d^3\vec{p}\ \underbrace{dE\, \delta(E^2 - |\vec{p}|^2 - m^2)}\left[\alpha\, e^{-i(E(\vec{p})t - \vec{p}\cdot\vec{x})} + \alpha^* e^{i(E(\vec{p})t - \vec{p}\cdot\vec{x})}\right]\end{aligned} \tag{1.31}$$

- Dacă efectuăm integrala (1.31) după dE cu funcţia δ [1]

obţinem:

$$\Rightarrow \text{în variabilele}(E_0,\vec{p}) \quad \varphi(\vec{x},t) = \int d^3\vec{p}\, \frac{1}{2E_0(\vec{p})} \left[\alpha\, e^{-i(E_0 t - \vec{p}\cdot\vec{x})} + \alpha^* e^{i(E_0 t - \vec{p}\cdot\vec{x})}\right] \tag{1.35}$$

$$\Rightarrow \text{în variabilele}(\omega_0,\vec{k}) \quad \varphi(\vec{x},t) = \int d^3\vec{k}\, \frac{1}{2\omega_0(\vec{k})} \left[\alpha\, e^{-i(\omega_0 t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \alpha^* e^{i(\omega_0 t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\right] \tag{1.36}$$

---

[1] Efectuăm integrarea (1.31) cu funcţia δ, $\int dE\, \delta(E^2 - |\vec{p}|^2 - m^2)$

- La integrarea după 4-impuls d^4p a unei funcţii invariante Lorentz $f(p)$ ţinem cont de legătura între cele 4 componente p_μ, prin conservarea energiei $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$, legătură ce se exprimă prin funcţia delta $\delta(p^2 - m^2)$, cu $p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2$. Atunci integrala căutată este

$$\int d^4p\, f(p)\, \delta(p^2 - m^2)\Big|_{E>0} \tag{1.32}$$

- Condiţia $E > 0$ de integrare reaminteşte faptul că energia relativistă este întotdeauna pozitivă. Folosind relaţia pentru funcţia $\delta[f(x)] = \frac{1}{|df/dx|_{x_0}}\delta(x - x_0)$ cu x_0 soluţia pentru $f(x) = 0$, avem

$$\delta\left[E^2 - |\vec{p}|^2 - m^2\right] = \frac{1}{|2E|_{E_0}}\delta(E - E_0) = \frac{1}{2E_0}\delta(E - E_0) \tag{1.33}$$

  cu soluţia $E > 0$: $E_0(\vec{p}) = +\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$. Integrând (1.32) după dE, folosind (1.33)

$$\int d^3p\, dE\, f(E,\vec{p})\, \delta\left(E^2 - |\vec{p}|^2 - m^2\right)\big|_{E>0} = \int d^3p \frac{1}{2E_0(\vec{p})} f(E_0(\vec{p}),\vec{p}) \tag{1.34}$$

- Soluţia generală este o superpoziţie de unde plane φ şi φ^*. Notăm $k\cdot x=\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x}$, atunci avem

Soluţii discrete de undă plană
$$\varphi(x)=\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{V2\omega_{\vec{k}}}}\left(\alpha_{\vec{k}}\,e^{-ik\cdot x}+\beta^*_{\vec{k}}\,e^{ik\cdot x}\right) \tag{1.37}$$

Soluţii continui de undă plană
$$\varphi(x)=\int\frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2\omega_{\vec{k}}}}\left(\alpha_{\vec{k}}\,e^{-ik\cdot x}+\beta^*_{\vec{k}}\,e^{ik\cdot x}\right) \tag{1.38}$$

unde am introdus constantele de normare $\sqrt{V}$ şi $\sqrt{(2\pi)^3}$ aceasta din urmă pentru utilizare ulterioară în dezvoltările Fourier.

Verificare soluţie generală de câmp scalar

- Ecuaţia de câmp scalar (1.26): $\boxed{(\partial_t^2-\nabla^2+m^2)\varphi=0}$ cu soluţia (1.31), unde am înlocuit $p\cdot x=Et-\vec{p}\cdot\vec{x}$, adică

$$\varphi(t,\vec{x})=\int d^3\vec{p}\,dE\left[\alpha\,e^{-i\,(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}+\alpha^*e^{i\,(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}\right]\delta\left(E^2-\vec{p}^2-m^2\right)$$

$$\partial_t^2\varphi(t,\vec{x})=\int d^3\vec{p}\,dE\left[(-iE)^2\alpha\,e^{-i\,(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}+(iE)^2\alpha^*e^{i\,(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}\right]\delta\left(E^2-\vec{p}^2-m^2\right)$$

$$-\nabla^2\varphi(t,\vec{x})=-\int d^3\vec{p}\,dE\left[(-i\vec{p})^2\alpha\,e^{-i\,(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}+(i\vec{p})^2\alpha^*e^{i\,(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}\right]\delta\left(E^2-\vec{p}^2-m^2\right)$$

- Inlocuind în Ecuaţia de câmp scalar (1.26),

$$\int d^3\vec{p}\,dE\left[\left(-E^2+\vec{p}^2+m^2\right)\alpha\,e^{-i\,p\cdot x}+\left(-E^2+\vec{p}^2+m^2\right)\alpha^*e^{i\,p\cdot x}\right]\delta\left(E^2-\vec{p}^2-m^2\right)$$

$$=\int d^3\vec{p}\underbrace{\int dE\,\left(-E^2+\vec{p}^2+m^2\right)\delta\left(E^2-\vec{p}^2-m^2\right)}_{=0}\left[\alpha\,e^{-i\,p\cdot x}+\alpha^*e^{i\,p\cdot x}\right]=0$$

deoarece $\delta\left(E^2-\vec{p}^2-m^2\right)=\dfrac{1}{2E_0}\delta(E-E_0)$ cu $E=E_0=+\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$

Ecuaţia de câmp scalar este verificată pentru $E=E_0(\vec{p})$

1.3 Câmpuri scalare cuantice

- Trecerea de la mecanica clasică la mecanica cuantică (cuantificarea I) s-a făcut prin înlocuirea mărimilor fizice cu operatori: $x \longrightarrow \hat{x} \qquad p \longrightarrow \hat{p}$
- Trecerea de la mecanica clasică la câmpuri clasice, s-a făcut prin înlocuirea variabilelor de coordonată şi derivata coordonatei (viteză sau impuls) cu cele de câmp şi derivata covariantă a câmpului: $x_i \longrightarrow \varphi_\mu \qquad \dot{x}_i \longrightarrow \partial_\mu \varphi$
- Trecerea de la câmpuri clasice la câmpuri cuantice (cuantificarea a II-a) se face prin înlocuirea câmpurilor şi a derivatelor de câmp cu operatorii corespunzători.

$$\begin{array}{lll} \varphi \longrightarrow \hat{\varphi} & \pi \longrightarrow \hat{\pi} & \mathcal{H}(\varphi,\pi) \longrightarrow \hat{\mathcal{H}}(\hat{\varphi},\hat{\pi}) \\ \varphi^* \longrightarrow \hat{\varphi}^\dagger & \pi^* \longrightarrow \hat{\pi}^\dagger & \left\{\varphi,\pi\right\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\varphi},\hat{\pi}\right] \end{array} \tag{1.39}$$

1.3.1 Cuantificarea câmpului scalar liber (operatori)

- Cuantificarea (câmpurilor) înseamnă trecerea la operatori (de câmp).
- Câmpul φ ca soluţia generală de undă plană (1.38), scrisă ca operator, este:

$$\boxed{\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\omega_k}} \left(\hat{\alpha}_k e^{-i\,k\cdot x} + \hat{\alpha}_k^\dagger e^{i\,k\cdot x}\right) \quad \text{unde: } k\cdot x = \omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{1.40}$$

- Pentru a găsi operatorii $\hat{\alpha}_k$ şi $\hat{\alpha}_k^\dagger$, folosim

  - operatorii de câmp $\hat{\varphi}(x)$ şi $\dot{\hat{\varphi}}(x)$ la acelaşi timp $t_0 = 0$:

$$\begin{cases} \hat{\varphi}(\vec{x},0) = \displaystyle\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\omega_k}} \left(\hat{\alpha}_k\, e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{\alpha}_k^\dagger\, e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}\right) \\ \dot{\hat{\varphi}}(\vec{x},0) = \displaystyle\int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\omega_k}} (-i\,\omega_k) \left(\hat{\alpha}_k\, e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{x}} - \hat{\alpha}_k^\dagger\, e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}\right) \end{cases} \tag{1.41}$$

  - şi funcţia δ exprimată ca

$$\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^3} e^{\mp i\,\vec{k}\cdot\vec{x}} = \delta^{(3)}(\vec{k}) \tag{1.42}$$

- Separăm operatorii din (1.41) cu $\delta^3(\vec{k})$ (1.42), prin integrarea $\int d^3\vec{k}\, f(\vec{k})\, \delta^3(\vec{k}) = f(0)$,

  deci înmulţim (1.41) cu $\delta^{(3)}(\vec{k})$ (1.42) rămâne $f(\vec{k}=0)$.

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^3} e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}\, \hat{\varphi}(\vec{x},0) = \frac{\hat{\alpha}_k + \hat{\alpha}^\dagger_{-k}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\omega_k}} \\ \displaystyle\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^3} e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}\, \dot{\hat{\varphi}}(\vec{x},0) = (-i\,\omega_k) \frac{\hat{\alpha}_k - \hat{\alpha}^\dagger_{-k}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\omega_k}} \end{cases} \tag{1.43}$$

- de unde

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_k = \dfrac{2\omega_k}{2} \displaystyle\int \frac{d^3\vec{x}}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{x}} \left(\hat{\varphi}(\vec{x},0) + \frac{i}{\omega_k}\dot{\hat{\varphi}}(\vec{x},0)\right) \\ \hat{\alpha}_k^\dagger = \dfrac{2\omega_k}{2} \displaystyle\int \frac{d^3\vec{x}}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{x}} \left(\hat{\varphi}(\vec{x},0) - \frac{i}{\omega_k}\dot{\hat{\varphi}}(\vec{x},0)\right) \end{cases} \tag{1.44}$$

1.3.2 Soluţii de câmp scalar cuantic liber $\hat{\varphi}$ şi $\hat{\pi}$

- Cu $\hat{\alpha}_k$ şi $\hat{\alpha}^\dagger_{k'}$ (1.44), ţinând cont că pentru un câmp scalar liber, $\hat{\pi} = \hat{\dot{\varphi}}$, calculăm relaţiile de comutare la acelaşi timp: $\left[\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}^\dagger_{k'}\right]$

(câmpurile sunt evaluate la poziţii $\vec{x}$ şi $\vec{x'}$ diferite, dar la acelaşi $t = t' = 0$),

$$\frac{\left[\hat{\alpha}_k, \hat{\alpha}^\dagger_{k'}\right]}{2\omega_k 2\omega_{k'}} = -\frac{1}{4}\int \frac{d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}'}{(2\pi)^3}\left\{\frac{i}{\omega_{k'}}\left[\hat{\varphi}(\vec{x},0), \hat{\dot{\varphi}}(\vec{x'},0)\right] + \frac{i}{\omega_k}\left[\hat{\varphi}(\vec{x'},0), \hat{\dot{\varphi}}(\vec{x},0)\right]\right\} e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{x} + i\,\vec{k}'\cdot\vec{x'}}$$
$$= -\frac{1}{4}\int \frac{d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}'}{(2\pi)^3}\left\{\frac{i}{\omega_{k'}}\left[i\,\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x'})\right] + \frac{i}{\omega_k}\left[i\,\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x'})\right]\right\} e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{x} + i\,\vec{k}'\cdot\vec{x'}}$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^3}\left\{\frac{1}{\omega_{k'}} + \frac{1}{\omega_k}\right\} e^{-i\,(\vec{k} - \vec{k}')\cdot\vec{x}} = \frac{1}{2\omega_k}\delta^{(3)}\!\left(\vec{k} - \vec{k}'\right) \text{ unde am folosit (1.42)}$$

- Definim operatorii de creare $\boxed{\hat{a}^\dagger_k = \hat{\alpha}^\dagger_k\sqrt{\frac{1}{2\omega_k}}}$ şi anihilare $\boxed{\hat{a}_k = \hat{\alpha}_k\sqrt{\frac{1}{2\omega_k}}}$

atunci relaţiile de comutare între operatorii de creare şi anihilare sunt:

$$\left[\hat{a}_k, \hat{a}^\dagger_{k'}\right] = \delta^{(3)}\!\left(\vec{k} - \vec{k}'\right) \tag{1.45}$$

- Cu (1.45) am regăsit relaţiile de comutare $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$ pentru operatorii de oscilator armonic cuantic:

- Inlocuind în (1.41) $\hat{\alpha}_k = \sqrt{2\omega_k}\,\hat{a}_k$ şi $\hat{\alpha}^\dagger_k = \sqrt{2\omega_k}\,\hat{a}^\dagger_k$ operatorii $\hat{\varphi}(\vec{x})$ şi $\hat{\pi}(\vec{x})$ pentru $t = 0$, devin

$$\hat{\varphi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\omega_k}}\left(\hat{a}_k\, e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{a}^\dagger_k\, e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}\right) \tag{1.46}$$

$$\hat{\pi}(\vec{x}) = \hat{\dot{\varphi}}(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3\, 2\omega_k}}(-i\omega_k)\left(\hat{a}_k\, e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{x}} - \hat{a}^\dagger_k\, e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}\right) \tag{1.47}$$

1.4 Cuantificarea energiei câmpului scalar

1.4.1 Cuantificarea energiei câmpului scalar liber

- Având Hamiltonian-ul de câmp scalar (1.25)

$$\hat{\mathcal{H}}=\frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\,\left[\hat{\pi}^2+(\nabla\hat{\varphi})^2+m^2\hat{\varphi}^2\right] \tag{1.48}$$

- Folosind expresiile pentru $\hat{\varphi}$ (1.46) şi $\hat{\pi}$ (1.47)

$$\hat{\varphi}(\vec{x})=\int\frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2\omega_k}}\left(\hat{a}_k\,e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}+\hat{a}_k^\dagger\,e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}\right) \tag{1.46}$$

$$\hat{\pi}(\vec{x})=\int\frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3\,2\omega_k}}(-i\omega_k)\left(\hat{a}_k\,e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}-\hat{a}_k^\dagger\,e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}\right) \tag{1.47}$$

- Atunci, Hamiltonian-ul va fi:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}=\frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\,\frac{d^3\vec{k}d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3}\Bigg[&-\frac{\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}{2}\left(\hat{a}_k e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}-\hat{a}_k^\dagger e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}\right)\left(\hat{a}_{k'}e^{i\,\vec{k}'\cdot\vec{x}}-\hat{a}_{k'}^\dagger e^{-i\,\vec{k}'\cdot\vec{x}}\right)+\\ &+\frac{(i\vec{k})(i\vec{k}')}{2\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\left(\hat{a}_k e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}-\hat{a}_k^\dagger e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}\right)\left(\hat{a}_{k'}e^{i\,\vec{k}'\cdot\vec{x}}-\hat{a}_{k'}^\dagger e^{-i\,\vec{k}'\cdot\vec{x}}\right)+\\ &+\frac{m^2}{2\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\left(\hat{a}_k e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}+\hat{a}_k^\dagger e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}\right)\left(\hat{a}_{k'}e^{i\,\vec{k}'\cdot\vec{x}}+\hat{a}_{k'}^\dagger e^{-i\,\vec{k}'\cdot\vec{x}}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{1.49}$$

- Prin integrare după $d^3\vec{x}$ rezultă $\delta^{(3)}(\vec{k}\mp\vec{k}')$, apoi integrare după $d^3\vec{k}$ (vezi Anexa pag.16)

$$\hat{\mathcal{H}}=\frac{1}{4}\int d^3\vec{k}\,\frac{1}{\omega_k}\,\left[\left(-\omega_k^2+\vec{k}^2+m^2\right)\left(\hat{a}_k\hat{a}_{-\vec{k}}+\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_{-k}^\dagger\right)+\left(\omega_k^2+\vec{k}^2+m^2\right)\left(\hat{a}_k\hat{a}_k^\dagger+\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k\right)\right]$$

- Operatorul Hamilton de câmp scalar este:

$$\hat{\mathcal{H}}=\frac{1}{2}\int d^3\vec{k}\;\omega_k\left(\hat{a}_k\hat{a}_k^\dagger+\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k\right)\overset{(1.45)}{=}\int d^3\vec{k}\;\omega_k\left(\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k+\frac{1}{2}\right) \tag{1.50}$$

- Deci, operatorul densitate de energie pentru mode-ul k de oscilaţie a unui câmp scalar liber, este (introducem constanta $\hbar$):

$$\hat{E}_k=\hbar\omega_k\left(\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k+\frac{1}{2}\right) \tag{1.51}$$

1.4.2 ANEXA

- Efectuăm produsele din integrala de oscilaţie de mode k şi apoi integrăm după $d^3\vec{x}$:

$$I_k=\int d^3\vec{k}'\int\frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^3}\Bigg[-\frac{\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}{2}\left(\hat{a}_k\hat{a}_{k'}e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}}-\hat{a}_k\hat{a}^\dagger_{k'}e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}-\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_{k'}e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}+\hat{a}^\dagger_k\hat{a}^\dagger_{k'}e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}}\right)+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\left(-\vec{k}\vec{k}'\hat{a}_k\hat{a}_{k'}e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}}+\vec{k}\vec{k}'\hat{a}_k\hat{a}^\dagger_{k'}e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}-\vec{k}\vec{k}'\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_{k'}e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}-\vec{k}\vec{k}'\hat{a}^\dagger_k\hat{a}^\dagger_{k'}e^{-i(\vec{k}+\vec{k}'\cdot\vec{x}}\right)+$$
$$+\frac{m^2}{2\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\left(\hat{a}_k\hat{a}_{k'}e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}}+\hat{a}_k\hat{a}^\dagger_k e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}+\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_{k'}e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}+\hat{a}^\dagger_k\hat{a}^\dagger_{k'}e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{x}}\right)\Bigg]$$

- Identificând funcţia $\delta(k\mp k')=\frac{1}{2\pi}\int e^{i(k\mp k')x}dx$ (scrisă 3-dim) şi integrând $d^3\vec{x}$ cu

$$f(\vec{k})=\int\delta^{(3)}(\vec{k}\mp\vec{k}')f(\vec{k}')\,d^3\vec{k}'=\int\left(\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i(\vec{k}\mp\vec{k}')\cdot\vec{x}}d^3\vec{x}\right)f(\vec{k}')d^3\vec{k}' \quad \text{cu} \begin{cases}\vec{k}'=\vec{k}\\ \vec{k}'=-\vec{k}\end{cases}$$

- avem

$$\begin{aligned}I_k = \Bigg[&-\frac{\sqrt{\omega_k\omega_{-k}}}{2}\hat{a}_k\hat{a}_{-k}+\frac{k^2}{2\sqrt{\omega_k\omega_{-k}}}\hat{a}_k\hat{a}_{-k}+\frac{m^2}{2\sqrt{\omega_k\omega_{-k}}}\hat{a}_k\hat{a}_{-k}\\ &+\frac{\sqrt{\omega_k\omega_k}}{2}\hat{a}_k\hat{a}^\dagger_k+\frac{k^2}{2\sqrt{\omega_k\omega_k}}\hat{a}_k\hat{a}^\dagger_k+\frac{m^2}{2\sqrt{\omega_k\omega_k}}\hat{a}_k\hat{a}^\dagger_k\\ &+\frac{\sqrt{\omega_k\omega_k}}{2}\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_k+\frac{k^2}{2\sqrt{\omega_k\omega_k}}\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_k+\frac{m^2}{2\sqrt{\omega_k\omega_k}}\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_k\\ &-\frac{\sqrt{\omega_k\omega_{-k}}}{2}\hat{a}^\dagger_k\hat{a}^\dagger_{-k}+\frac{k^2}{2\sqrt{\omega_k\omega_{-k}}}\hat{a}^\dagger_k\hat{a}^\dagger_{-k}+\frac{m^2}{2\sqrt{\omega_k\omega_{-k}}}\hat{a}^\dagger_k\hat{a}^\dagger_{-k}\Bigg]\end{aligned}$$

- Grupăm termenii de oscilaţie de mode k din parantezele drepte:

$$\left[\left(-\frac{\sqrt{\omega_k\omega_{-k}}}{2}+\frac{k^2}{2\sqrt{\omega_k\omega_{-k}}}+\frac{m^2}{2\sqrt{\omega_k\omega_{-k}}}\right)\left(\hat{a}_k\hat{a}_{-k}+\hat{a}^\dagger_k\hat{a}^\dagger_{-k}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\sqrt{\omega_k\omega_k}}{2}+\frac{k^2}{2\sqrt{\omega_k\omega_k}}+\frac{m^2}{2\sqrt{\omega_k\omega_k}}\right)\left(\hat{a}_k\hat{a}^\dagger_k+\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_k\right)\right]=$$

Deoarece $\omega_k=\omega_{-k}$, aducem la numitor comun şi folosim relaţia $\omega_k^2=k^2+m^2$:

$$=\frac{1}{2\omega_k}\Big[\underbrace{\left(-\omega_k^2+k^2+m^2\right)}_{=0}\left(\hat{a}_k\hat{a}_{-k}+\hat{a}^\dagger_k\hat{a}^\dagger_{-k}\right)+\underbrace{\left(\omega_k^2+k^2+m^2\right)}_{=2\omega_k^2}\left(\hat{a}_k\hat{a}^\dagger_k+\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_k\right)\Big]=$$
$$=\omega_k\left(\hat{a}_k\hat{a}^\dagger_k+\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_k\right)=\omega_k\left(2\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_k+1\right) \text{ am folosit relaţia de comutare } \hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}=1$$

- Atunci, operatorul Hamilton de câmp scalar va fi integrala din modurile de oscilaţie $\vec{k}$:

$$\hat{\mathcal{H}}=\frac{1}{2}\int d^3k\,I_k=\frac{1}{2}\int d^3k\;\omega_k\left(\hat{a}_k\hat{a}^\dagger_k+\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_k\right)=\int d^3k\;\omega_k\left(\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_k+\frac{1}{2}\right) \tag{1.52}$$