Procese QED în câmpuri laser intense
tema 15

M. Penţia

March 25, 2021

.

”Verbum sapienti sat est”

Cuprins

Capitol 1

Câmpul electromagnetic

1.1 Exprimarea câmpurilor nestaţionare prin potenţiale

- Ecuaţiile Maxwell pentru câmpurile nestaţionare (1.1) sunt,

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} & (a) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \tag{1.1}$$

- Câmpul magnetic de divergenţă zero (1.1.c) se poate scrie ca rotorul unui câmp vectorial $\vec{A}$: $\longrightarrow$

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}} \tag{1.2}$$

- Inlocuind în (1.1.b), avem: $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)}{\partial t}$ sau $\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$

- Dar, un câmp de rotor zero se poate scrie ca gradientul unui scalar ϕ:

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi \quad \text{sau} \quad \boxed{\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}\phi} \tag{1.3}$$

Deci, câmpul electric (1.3) are două surse posibile, una de câmp electric divergent (1.1-a) produsă de sarcini, dată de variaţia spaţială a potenţialului scalar $-\vec{\nabla}\phi$ şi una de câmp electric rotaţional indusă magnetic (1.1-b), dată de variaţia temporală a potenţialului vector $-\partial\vec{A}/\partial t$.

1.1.1 Ecuaţiile Maxwell pentru potenţiale de câmp nestaţionare

- Inlocuind în ecuaţia Maxwell (1.1.a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$, câmpul electric (1.3) $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t - \vec{\nabla}\phi$ exprimat prin potenţiale

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \boxed{-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - \vec{\nabla}^2\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \tag{1.4}$$

- Similar, exprimăm şi ecuaţia Maxwell (1.1.d), unde înlocuim $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ (1.2) (dedus din (1.1.c)), adică

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=$$
$$=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{A}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Aici înlocuim şi câmpul electric $\vec{E}=-\partial\vec{A}/\partial t-\vec{\nabla}\phi$, (1.3) (dedus din (1.1.b)), obţinem

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=-\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\vec{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

- atunci ecuaţia (1.1.d) devine: $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{A}=\mu_0\vec{j}-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\mu_0\epsilon_0\vec{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t}$

sau

$$\boxed{\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\vec{\nabla}^2\vec{A}+\vec{\nabla}\left(\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)=\mu_0\vec{j}} \qquad (1.5)$$

Deci, pornind de la ecuaţiile Maxwell (1.1) pentru câmpuri $\vec{E}$ şi $\vec{B}$, după exprimarea acestora prin potenţiale, obţinem sistemul corespunzător de ecuaţii diferenţiale cuplate de ordin 2 (1.4-1.5) pentru potenţialele scalar ϕ şi vector $\vec{A}$.

1.2 Undele electromagnetice

- Soluţia de undă plană pentru un câmp vectorial $\vec{u}$: $\quad \vec{u}=\vec{u}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$

- Calculăm divergenţa de $\vec{u}$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=$$
$$=(u_{0x}\,ik_x+u_{0y}\,ik_y+u_{0z}\,ik_z)e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}=i\,\vec{k}\cdot\vec{u}$$

- Calculăm rotor de $\vec{u}$, pe componente,

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_x=\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}=(ik_y u_z-ik_z u_y)$$
$$=i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_x$$

şi similar

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_y=i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_y$$
$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_z=i\left(\vec{k}\times\vec{u}\right)_z$$

- Adică, rotorul vectorului $\vec{u}$ este, $\quad \vec{\nabla}\times\vec{u}=i\vec{k}\times\vec{u}$

- Deci, acţiunea operatorului $\vec{\nabla}$, atat ca divergenţă cât şi ca rotor, se face prin înlocuirea $\vec{\nabla}\rightarrow i\vec{k}$

- In cazul undelor electromagnetice, ca vector $\vec{u}$, luăm fie $\vec{E}$ fie $\vec{B}$, adică

$$\vec{E}=\vec{E}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\ ;\ \vec{B}=\vec{B}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)} \qquad (1.6)$$

1.2.1 Proprietăţile undelor electromagnetice

- Să considerăm ecuaţiile Maxwell în vid (1.1), fără sarcini şi curenţi ($\rho = 0, \vec{j} = 0$),

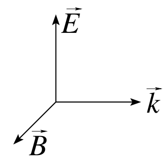
$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & (a) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (b) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (c) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (d) \end{cases} \qquad (1.7)$$

- Ecuaţia Maxwell (1.7.a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, pentru unda plană, devine $i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ (1.8)
  $\longrightarrow$ Deci, $\vec{E}$ **oscilează perpendicular pe direcţia** $\vec{k}$ **de propagare** (produs scalar zero).
- Ecuaţia Maxwell (1.7.c) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, pentru unda plană, devine $i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ (1.9)
  $\longrightarrow$ Deci, $\vec{B}$ **oscilează perpendicular pe direcţia** $\vec{k}$ **de propagare** (produs scalar zero).
- Cu aceeaşi înlocuire de operator $\vec{\nabla} \to i\vec{k}$,
  ec. Maxwell (1.7.b) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$ devine, $i\,\vec{k} \times \vec{E} = i\,\omega \vec{B}$ (1.10)
- Inmulţind scalar (1.10) cu $\vec{E}$, obţinem, $\vec{E} \cdot \vec{B} = \dfrac{\vec{E} \cdot \left(\vec{k} \times \vec{E}\right)}{\omega} \underbrace{=}_{(\vec{k} \times \vec{E}) \perp \vec{E}} 0$

  Deci, şi componentele $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ sunt perpendiculare.

- Inmulţind scalar (1.10) cu $\vec{B}$, obţinem, $\vec{B} \cdot \left(\vec{k} \times \vec{E}\right) = \omega B^2 > 0$

  Deci, **vectorii** $\vec{E}$**,** $\vec{B}$ **şi** $\vec{k}$ **sunt reciproc perpendiculari** şi formează un sistem drept de vectori.



- Cu aceeaşi înlocuire de operator $\vec{\nabla} \to i\vec{k}$,
  ecuaţia Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \vec{E}/\partial t$ (1.7.d) devine, $i\,\vec{k} \times \vec{B} = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E}$ (1.11)
- **Viteza de fază** $c = \nu\lambda$, cu $\nu = \omega/(2\pi)$ şi $\lambda = 2\pi/k \quad \Longrightarrow \quad \boxed{c = \dfrac{\omega}{k}}$ (1.12)
- Inlocuind în (1.11) $\vec{B} = \vec{k} \times \vec{E}/\omega$ din (1.10) şi din dezvoltarea dublului produs vectorial,

$$\vec{k} \times \left(\vec{k} \times \vec{E}\right) \equiv \overbrace{\left(\vec{k} \cdot \vec{E}\right)}^{=0} \vec{k} - k^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E}$$

sau $\quad k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \, \omega^2$ (1.13)

- Am văzut (1.12) $k = \omega/c$, iar din (1.13) obţinem $\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}}$ (1.14)
- Din relaţia (1.10) avem $B = \dfrac{k}{\omega} E$, iar din (1.12) $\Longrightarrow \boxed{B = \dfrac{E}{c}}$ (1.15)

1.2.2 Ecuaţia de propagare a undelor electromagnetice

- Să luăm rotorul ($\vec{\nabla}\times$) ecuaţiei (1.7.d) şi folosind identitatea pentru dublul produs vectorial, precum şi (1.7.c) obţinem

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) - \nabla^2\vec{B} = -\nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)}{\partial t}$$

- Folosind legătura (1.14) cu viteza undelor electromagnetice $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ şi înlocuind $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ din ec. (1.7.b), obţinem ec. de propagare a undelor pt. componenta magnetică $\vec{B}$:

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{B} = 0} \qquad (1.16)$$

- Similar, luând rotorul ecuaţiei (1.7.b), în final obţinem ecuaţia de propagare a componentei electrice $\vec{E}$:

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{E} = 0} \qquad (1.17)$$

1.2.3 Legătura între componentele $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ ale unui câmp EM

- In soluţia generală de undă plană (1.6), pt. componenta electrică, includem explicit defazajul ϕ, iar aceasta devine:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\phi\right)}} \qquad (1.18)$$

- Similar, pt. componenta magnetică avem

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}_0 e^{i\left(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega' t+\phi'\right)}} \qquad (1.19)$$

- Cu ecuaţia Maxwell $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (1.d), căutăm legătura între $\vec{E}$ şi $\vec{B}$,
- $\vec{\nabla}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{\nabla}=-\vec{B}_0\times\vec{\nabla}e^{i\left(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega' t+\phi'\right)}=-i\left(\vec{B}_0\times\vec{k}'\right)e^{i\left(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega' t+\phi'\right)}$
- cu $c=1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ (1.14), termenul II din (1.d): $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}=-i\dfrac{\omega}{c^2}\vec{E}_0 e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\phi\right)}$

  Egalând cele două expresii: $\left(\vec{B}_0\times\vec{k}'\right)e^{i\left(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega' t+\phi'\right)}=\dfrac{\omega}{c^2}\vec{E}_0 e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\phi\right)}$

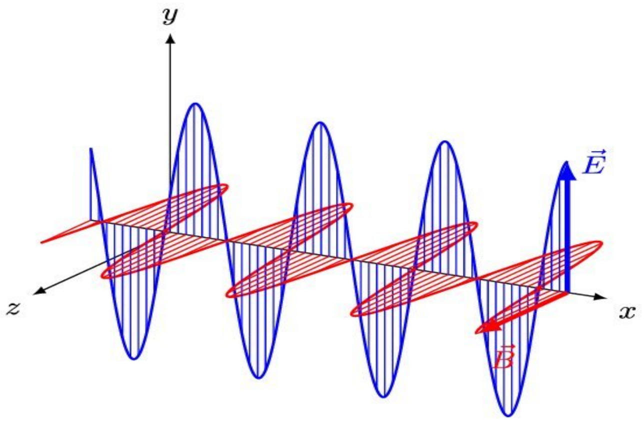
- Pt. ca relaţia să fie valabilă pt. orice $\vec{r}$ şi t, identificăm: $\vec{k}'=\vec{k}$, $\phi'=\phi$ şi $\vec{B}_0\times\vec{k}=\dfrac{\omega}{c^2}\vec{E}_0$.

  Folosind $\dfrac{\omega}{c}=k$ şi $\dfrac{\vec{k}}{k}=\vec{n}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\vec{B}_0\times\vec{n}=\dfrac{\vec{E}_0}{c}$

deoarece $B_0 = E_0/c$, la fel ca pt. vectori unitari, avem, $\Big\}$ $\quad \vec{n}\times\dfrac{\vec{E}_0}{c}=\vec{B}_0$ sau $\vec{B}_0=\dfrac{\vec{k}}{k}\times\dfrac{k}{\omega}\vec{E}_0=\dfrac{\vec{k}\times\vec{E}_0}{\omega}$

- Ec. (1.19) pentru câmp $\vec{B}$, devine:

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r},t)=\frac{\vec{k}\times\vec{E}_0}{\omega}e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\phi\right)}} \qquad (1.20)$$



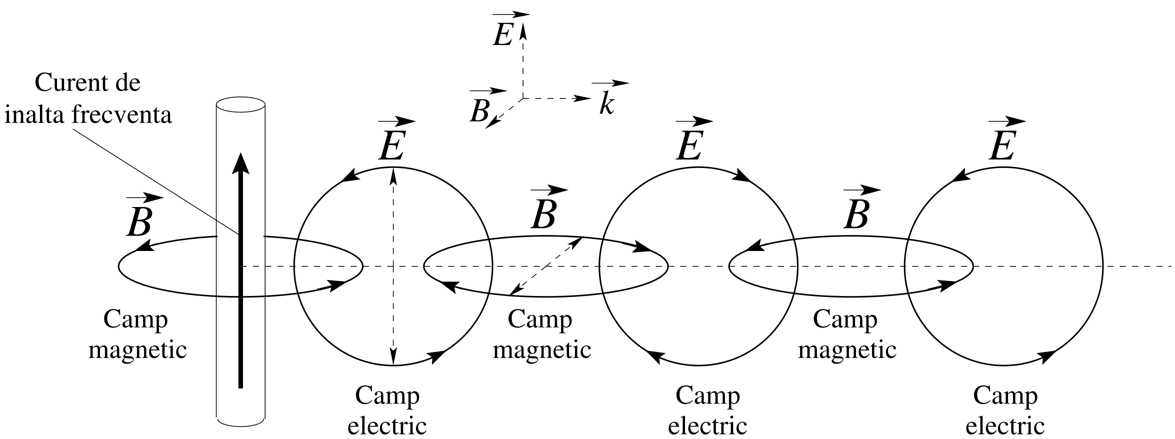
sursa: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EM-Wave.gif

- Am văzut (1.15), componenta electrică E dintr-o undă EM este de c ori mai mare ca cea magnetică B:
$$B = \frac{E}{c} \tag{1.15}$$

- Exemplu: Evaluare amplitudine maximă câmp magnetic B_0 dintr-o undă EM (1.6) cu $E_0 = 1000V/m$:
$$B_0 = \frac{1000V/m}{3 \times 10^8 m/s} = 3.33 \times 10^{-6} T \tag{1.21}$$

După cum se vede, într-un câmp EM cu o componentă de câmp electric relativ puternică de $1000V/m$, este însoţită de o componentă magnetică relativ slabă, mai slabă decât valoarea câmpului magnetic terestru ($\sim 50 \times 10^{-6} T$).

Propagarea undelor electromagnetice



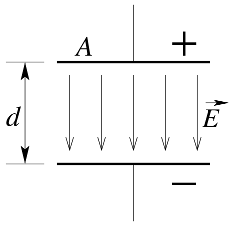
Generarea şi propagarea undelor electromagnetice:
1. Un curent electric variabil generează un câmp magnetic variabil.
2. Câmpul magnetic variabil generează un câmp electric variabil.
3. Câmpul electric variabil generează un câmp magnetic variabil, şi aşa mai departe.
Câmpurile generate au sensul în care câmpurile pe care acestea la rândul lor le generează să se opună variaţiei câmpurilor ce le-au produs (Legea Lenz).

1.3 Energia şi intensitatea câmpului electromagnetic

- Energia câmpului electric (în condensator) este integrala din: $dW_E = V\,dq$

$$W_E = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \boxed{\frac{1}{2}C\,V^2} =$$

$$= \frac{1}{2}C\,E^2 d^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0\,A}{d}E^2 d^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\,E^2 \underbrace{A\,d}_{Vol}$$



$$V = \frac{Q}{C} \qquad C = \frac{\epsilon_0\,A}{d} \qquad E = \frac{V}{d}$$

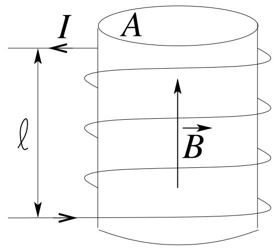
- Densitatea de energie câmp electric: $$u_E = \frac{W_E}{Vol} = \frac{W_E}{A\,d} = \boxed{\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2} \qquad (1.22)$$

- Energia câmpului magnetic (în solenoid) este integrala din: $dW_B = P\,dt = V\,I\,dt$

Faraday

dar $$V \overset{\downarrow}{=} N\frac{d\phi}{dt} = N\,A\frac{dB}{dt} = \underbrace{\mu_0\frac{N^2 A}{\ell}}_{L}\frac{dI}{dt} = L\frac{dI}{dt}$$

$$W_B = \int_0^t V\,I\,dt = \int_0^I L\,I\,dI = \boxed{\frac{1}{2}L\,I^2} = \frac{1}{2}\mu_0\frac{N^2 A}{\ell}\frac{\ell^2 B^2}{\mu_0^2 N^2}$$

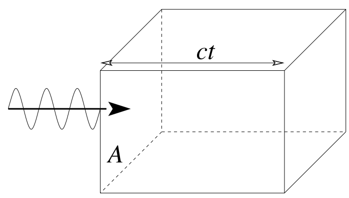


$$V = N\frac{d\phi}{dt} \qquad L = \mu_0\frac{N^2 A}{\ell} \qquad B = \mu_0\frac{N\,I}{\ell}$$

- Densitatea de energie câmp magnetic: $$u_B = \frac{W_B}{Vol} = \frac{W_B}{A\,\ell} = \boxed{\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}} \qquad (1.23)$$

- Intensitatea undelor electromagnetice măsoară energia medie transportată prin unitatea de suprafaţă şi în unitatea de timp, având densitatea de energie electrică u_E şi magnetică u_B:

$$u_E = \epsilon_0\frac{E^2}{2} \quad (1.22) \qquad\qquad u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (1.23)$$



- Soluţia de undă plană pentru componentele electrică $\vec{E}$ şi magnetică $\vec{B}$, este de forma:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \sin(kx - \omega t) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \sin(kx - \omega t) \end{cases}$$

- Densitatea totală de energie transportată este $u = u_E + u_B$:

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}} = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E\,Bc \qquad (1.24)$$

(deoarece $B = E/c$ iar $c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$)

- Energia totală transportată prin suprafaţa A în timpul t se află în volumul cu aria A şi lungimea ct (vezi Fig.): $W = u\,A\,ct = \epsilon_0 E\,Bc\,A\,ct = \dfrac{E\,B}{\mu_0}At$

- Atunci energia totală transportată pe unitatea de suprafaţă şi în unitatea de timp, este

$$S \equiv \frac{W}{At} = \frac{E\,B}{\mu_o} = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{c\,B^2}{\mu_0} \text{ şi defineşte } \textit{vectorul Poynting}: \quad \boxed{\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}} \tag{1.25}$$

- Energia transportată, mediată pe unul sau mai multe cicluri de oscilaţie, este proporţională cu $\langle E^2 \rangle$ sau $\langle B^2 \rangle$.

Deoarece $\langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle = 1/2$, atunci $\langle E^2 \rangle = E_0^2/2$ şi $\langle B^2 \rangle = B_0^2/2$

- Intensitatea undelor electromagnetice va fi

$$\boxed{I = \langle S \rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0 B_0}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2}\frac{c\,B_0^2}{\mu_0}} \tag{1.26}$$

Capitol 2

Cuantificarea oscilatorului armonic

2.1 Oscilatorul armonic

2.1.1 Oscilatorul armonic în mecanica clasică

- Conform Newton $F = m\ddot{x}$. Un corp de masă m, sub acţiunea forţei elastice $F(x) = -\kappa x$, are ec. de mişcare

$$\boxed{-\kappa\, x = m\ddot{x}} \tag{2.1}$$

- După cum am văzut, aceeaşi ecuaţie (2.1) se poate obţine şi cu ajutorul ecuaţiei Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0} \tag{2.2}$$

cu Lagrangian-ul: $L(x,\dot{x}) = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{\kappa}{2}x^2 \implies \frac{\partial L}{\partial x} = -\kappa x \;\; ; \;\; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

de unde $\quad m\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right), \quad$ ecuaţia (2.2) conduce imediat la ecuaţia (2.1).

- De asemenea, aceeaşi ecuaţie (2.1) se poate obţine şi cu ajutorul ecuaţiilor Hamilton:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}} \tag{2.3}$$

cu Hamiltonian-ul: $H(x,p) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{\kappa}{2}x^2 \implies \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \;\; ; \;\; \frac{\partial H}{\partial x} = \kappa x$

de unde $\quad p = m\frac{\partial H}{\partial p} \overbrace{=}^{(2.3)} m\dot{x} \qquad$ şi $\quad \kappa x = \frac{\partial H}{\partial x} \overbrace{=}^{(2.3)} -\dot{p} = -m\ddot{x}\;$ adică (2.1)

- Prin integrarea ecuaţiei de mişcare se obţine "traiectoria" $x = x(t)$ a particulei. In cazul de faţă, *mişcarea oscilatorie armonică*,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) = a\, e^{i\omega t} + a^* e^{-i\omega t} \quad \text{cu} \quad \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \tag{2.4}$$

2.1.2 Oscilatorul armonic în mecanica cuantică (formalism Dirac)

- Cuantificarea oricărui sistem mecanic se face prin schimbarea mărimilor fizice cu operatorii corespunzători:

$$x \to \hat{x} = x\,;\; p \to \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\,;\; E \to \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad \begin{cases} H(x,p) \to \hat{H}(\hat{x},\hat{p}) \\ \{x,p\} \to \dfrac{1}{i\hbar}[\hat{x},\hat{p}] \end{cases}$$

- Un oscilator armonic clasic, are energia totală exprimată prin Hamiltonian:

$$H(x,p) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{\kappa}{2}x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad \text{am folosit (2.4)} \quad \kappa = m\omega^2 \tag{2.5}$$

- **Cuantificarea oricărui sistem clasic** se face cu ajutorul Hamiltonian-ului, prin

- trecerea la operatori $\hat{H}(\hat{x},\hat{p}) = \hat{T} + \hat{V} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ cu operatorii corespunzători variabilelor conjugate canonic ce satisfac relaţia de comutare: $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$

- şi rezolvarea ecuaţiei de undă cu valori şi funcţii proprii de energie:

$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n \tag{2.6}$$

- De exemplu, în cazul oscilatorului armonic cuantic, folosim formalismul Dirac pentru aflarea valorilor E_n.

- Inlocuim $\hat{x}$ şi $\hat{p}$ cu operatorii hermitici reduşi $\hat{X}$ şi $\hat{P}$ (adimensionali):

$$\boxed{\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} \quad ; \; \hat{P} = \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}\hat{p} \quad \text{cu} \quad \left[\hat{X},\hat{P}\right] = i} \tag{2.7}$$

Intr-adevăr, $\left[\hat{X},\hat{P}\right] = \hat{X}\hat{P} - \hat{P}\hat{X} = \sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}}\sqrt{\dfrac{1}{m\omega\hbar}}\underbrace{[\hat{x},\,\hat{p}]}_{i\hbar} = i$

- Hamiltonian-ul devine:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 = \frac{m\omega\hbar}{2m}\hat{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\hat{X}^2 = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2\right) \tag{2.8}$$

Dacă X şi P ar fi numere reale, acesta este Hamiltonian-ul clasic (2.5)

Dacă $\hat{X}$ şi $\hat{P}$ sunt operatori, $\hat{H}$ se poate scrie:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\underbrace{(\hat{X} - i\hat{P})}_{\hat{a}^\dagger}\underbrace{(\hat{X} + i\hat{P})}_{\hat{a}} \tag{2.9}$$

- Astfel, Dirac trece la operatorii adimensionali $\hat{a}$ şi $\hat{a}^\dagger$:

$$\boxed{\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} + i\hat{P}\right) \; ; \; \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} - i\hat{P}\right) \text{ cu } \left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] = 1} \tag{2.10}$$

Intr-adevăr,

$$\begin{aligned} \left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] &= \frac{1}{2}\left[\hat{X} + i\hat{P}, \hat{X} - i\hat{P}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\left[\hat{X},\hat{X}\right]}_{=0} - i\underbrace{\left[\hat{X},\hat{P}\right]}_{=i} + i\underbrace{\left[\hat{P},\hat{X}\right]}_{=-i} + \underbrace{\left[\hat{P},\hat{P}\right]}_{=0}\right) = \frac{1}{2}\left(1+1\right) = 1 \end{aligned}$$

deci

$$\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] = +1 \qquad \text{şi similar} \qquad \left[\hat{a}^\dagger,\hat{a}\right] = -1 \tag{2.11}$$

- Hamiltonian-ul (2.9) va fi: $\hat{H}=\hbar\omega\,\hat{a}^\dagger\hat{a}$ ori $\hat{H}=\hbar\omega\,\hat{a}\hat{a}^\dagger$ (ambiguitate de ordonare).

- Putem exprima operatorii hermitici $\hat{X}$ şi $\hat{P}$ cu ajutorul $\hat{a}$ şi $\hat{a}^\dagger$:
$$\boxed{\hat{X}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\ ;\ \hat{P}=\frac{-i}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right)} \tag{2.12}$$

- Am văzut (2.8) Hamiltonian-ul nostru este:
$$\hat{H}=\frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{X}^2+\hat{P}^2\right)\quad \begin{cases}\hat{X}^2=\frac{1}{2}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)=\frac{1}{2}\left(\hat{a}^2+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}+(\hat{a}^\dagger)^2\right)\\ \hat{P}^2=-\frac{1}{2}(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)=-\frac{1}{2}\left(\hat{a}^2-\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}+(\hat{a}^\dagger)^2\right)\end{cases}$$

- Folosind relaţia de comutare $\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}=1$, Hamiltonian-ul devine:
$$\hat{H}=\frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{X}^2+\hat{P}^2\right)=\frac{\hbar\omega}{2}\Big(\underbrace{\hat{a}\hat{a}^\dagger}_{\hat{a}^\dagger\hat{a}+1}+\underbrace{\hat{a}^\dagger\hat{a}}_{\hat{a}\hat{a}^\dagger-1}\Big)=\begin{cases}\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)\\ \hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger-\frac{1}{2}\right)\end{cases} \tag{2.13}$$

- Evaluăm şi relaţiile de comutare $\left[\hat{H},\hat{a}\right]$, $\left[\hat{H},\hat{a}^\dagger\right]$ pentru Hamiltonianul $\hat{H}=\hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger-\frac{1}{2}\right)$

$$\left[\hat{H},\hat{a}\right]=\left[\hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger-\tfrac{1}{2}\right),\hat{a}\right]=\hbar\omega\Big(\hat{a}\underbrace{\left[\hat{a}^\dagger,\hat{a}\right]}_{-1}+\underbrace{\left[\hat{a},\hat{a}\right]}_{0}\hat{a}^\dagger\Big)=-\hbar\omega\hat{a}$$

deci $\left[\hat{H},\hat{a}\right]=-\hbar\omega\hat{a}$ şi similar $\left[\hat{H},\hat{a}^\dagger\right]=+\hbar\omega\hat{a}^\dagger$ (2.14)

2.1.3 Crearea şi anihilarea de cuante între stările de oscilator armonic

- Presupunem că ψ_n este stare proprie a hamiltonianului $\hat{H}\psi_n=E_n\psi_n$ (2.6), cu energia E_n.

  Să studiem acum acţiunea comutatorilor $\left[\hat{H},\hat{a}\right]$ şi $\left[\hat{H},\hat{a}^\dagger\right]$ (2.14) asupra funcţiei de stare ψ_n.

$$\left[\hat{H},\hat{a}\right]\psi_n=-\hbar\omega\hat{a}\psi_n$$

$$\hat{H}\hat{a}\psi_n-\hat{a}\,\underbrace{\hat{H}\psi_n}_{E_n\psi_n}=-\hbar\omega\hat{a}\psi_n$$

$$\hat{H}\left(\hat{a}\psi_n\right)-E_n\left(\hat{a}\psi_n\right)=-\hbar\omega\left(\hat{a}\psi_n\right)$$

$$\hat{H}\left(\hat{a}\psi_n\right)=\left(E_n-\hbar\omega\right)\left(\hat{a}\psi_n\right)$$

adică $\left(\hat{a}\psi_n\right)\sim\psi_{n-1}$ este funcţie proprie pentru Hamiltonianul $\hat{H}$, cu valoarea proprie $E_n-\hbar\omega$.

Deci, $\hat{a}\psi_n\sim\psi_{n-1}$ este starea cu energia coborâtă cu o cuantă de energie $\hbar\omega$.

$$\left[\hat{H},\hat{a}^\dagger\right]\psi_n=\hbar\omega\hat{a}^\dagger\psi_n$$

$$\hat{H}\hat{a}^\dagger\psi_n-\hat{a}^\dagger\,\underbrace{\hat{H}\psi_n}_{E_n\psi_n}=\hbar\omega\hat{a}^\dagger\psi_n$$

$$\hat{H}\left(\hat{a}^\dagger\psi_n\right)-E_n\left(\hat{a}^\dagger\psi_n\right)=\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\psi_n\right)$$

$$\hat{H}\left(\hat{a}^\dagger\psi_n\right)=\left(E_n+\hbar\omega\right)\left(\hat{a}^\dagger\psi_n\right)$$

adică $\left(\hat{a}^\dagger\psi_n\right)\sim\psi_{n+1}$ este funcţie proprie pentru Hamiltonianul $\hat{H}$, cu valoarea proprie $E_n+\hbar\omega$.

Deci, $\hat{a}^\dagger\psi_n\sim\psi_{n+1}$ este starea cu energia ridicată cu o cuantă de energie $\hbar\omega$.

Operatorii de creare şi anihilare cuante de oscilaţie

- Cu operatorii $\hat{a}^\dagger$ de creare şi $\hat{a}$ de anihilare cuante se pot obţine toate stările de energie ale oscilatorului armonic. Totuşi, nu putem coborî sub zero energia oscilatorului armonic.
- Pentru a opri ca operatorul de anihilare $\hat{a}$ să ducă la stări de energie negativă, prin aplicarea succesivă asupra ψ_n, va trebui să facem ca funcţia proprie însăşi să devină zero, pentru energia minimă.
- Adică pentru starea fundamentală cerem ca:
$$\hat{a}\psi_0 = 0 \tag{2.15}$$

Deoarece $\hat{H}$ (2.13) conţine $\hat{a}$ pe poziţia necesară ("ordonarea normală"), putem scrie energia

stării fundamentale:
$$\hat{H}\psi_0 = \hbar\omega\Big(\underbrace{\hat{a}^\dagger\hat{a}}_{\hat{N}} + \frac{1}{2}\Big)\psi_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\underbrace{\hat{a}\psi_0}_{0} + \frac{\hbar\omega}{2}\psi_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\psi_0 \tag{2.16}$$

- Deci energia proprie a stării fundamentale este:
$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \tag{2.17}$$
- Identificăm *operatorul număr de cuante*:
$$\boxed{\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}} \tag{2.18}$$
- Studiem acum acţiunea *operatorului număr de cuante* asupra funcţiei $\psi_n \equiv |n\rangle$.
  Am văzut că $\hat{a}\psi_n$ este legat de $|n-1\rangle$ iar $\hat{a}^\dagger\psi_n$ este legat de $|n+1\rangle$.
- Separat, operatorii $\hat{a}$ de anihilare şi $\hat{a}^\dagger$ de creare cuante, conduc la stările (normate):
$$\begin{cases} \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \quad \text{cu} \quad \hat{a}|0\rangle = 0 \quad \text{şi} \quad \||0\rangle\|^2 = 1 \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \quad \Longrightarrow \quad \boxed{|n\rangle = \dfrac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle} \end{cases} \tag{2.19}$$
- *Operatorul număr de cuante* $\hat{N}$ acţionează asupra stării $|n\rangle$
$$\begin{cases} \hat{N}|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \hat{a}^\dagger\sqrt{n}\,|n-1\rangle = \\ \quad = \sqrt{n}\sqrt{n}\,|n\rangle = n\,|n\rangle \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.20}$$
- Setul complet de vectori de bază $|n\rangle$ sunt *funcţii proprii* din ecuaţia cu valori proprii $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$
$$\hat{H}\,|n\rangle = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = E_n\,|n\rangle \tag{2.21}$$
- iar *valorile proprii* de energie ale oscilatorului armonic, pe fiecare nivel n, sunt cuantificate:
$$\boxed{E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega} \quad (n = 0, 1, 2...) \tag{2.22}$$
- In starea fundamentală $n = 0$, cu $E_0 = \dfrac{1}{2}\hbar\omega \neq 0$

- Am obţinut astfel toate stările cuantificate ale oscilatorului armonic. Pe fiecare nivel $|n\rangle$ avem conform (2.20) n cuante de energie $\hbar\omega$.

$$\left\{\begin{array}{llll} |0\rangle & \text{stare cu energia} & (1/2)\hbar\omega & \text{starea fundamentală} \\ |1\rangle & \text{stare cu energia} & (1+1/2)\,\hbar\omega & 1 \text{ cuantă de energie } \hbar\omega \\ |2\rangle & \text{stare cu energia} & (2+1/2)\,\hbar\omega & 2 \text{ cuante de energie } \hbar\omega \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ |n\rangle & \text{stare cu energia} & (n+1/2)\,\hbar\omega & n \text{ cuante de energie } \hbar\omega \end{array}\right.$$

<u>In concluzie:</u> Fiecare stare proprie $\psi_n \equiv |n\rangle$ a Hamiltonian-ului (2.21) de oscilator armonic cuantic cu valoarea proprie E_n conţine n cuante de energie.

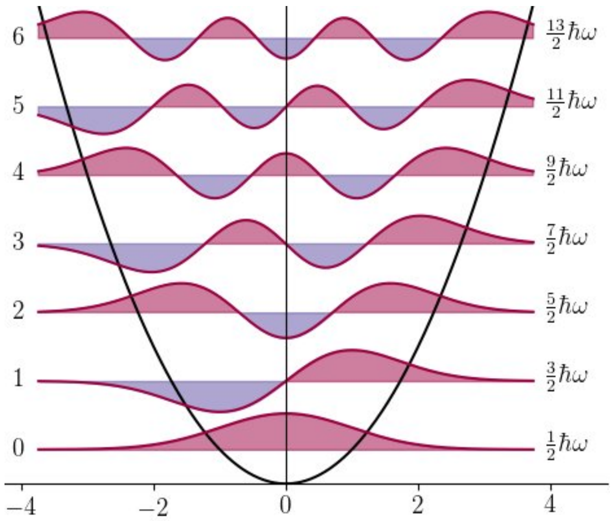


Figura 2.1: Nivelele de energie ale unui oscilator armonic cuantic

- Putem imediat generaliza acest rezultat la cazul unui sistem pentru care Lagrangian-ul este o sumă de N oscilatori independenţi, în care energia potenţială este doar funcţie pătratică de deplasările y_i (similar (**??**), spre deosebire de cazul legat (**??**)). Ca urmare, obţinem un sistem linear de ecuaţii de mişcare, adică o superpoziţie (sumare lineară) a oscilaţiilor.

- Lagrangian-ul sistemului este compus din termeni de oscilatori independenţi.

$$\hat{L} = \hat{T} - \hat{V} = \sum_{r=1}^{N} \left(\frac{m\,\hat{\dot{x}}_r^2}{2} - \frac{m\omega_r^2}{2}\,\hat{x}_r^2 \right) \tag{2.23}$$

- La fel, energia totală este o sumă de N *energii de moduri normale* de <u>oscilatori armonici</u> independenţi cu frecvenţa ω_r, indexate cu r. Hamiltonianul este deci o suma de energii independente. Folosind expresia (2.21) Hamiltonian-ul se poate scrie:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \sum_{r=1}^{N} \left(\frac{m\,\hat{\dot{x}}_r^2}{2} - \frac{m\omega_r^2}{2}\,\hat{x}_r^2 \right) = \sum_{r=1}^{N} \left(\hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_r \tag{2.24}$$

- Deoarece valorile proprii ale *operatorului număr de cuante* $\hat{N}_r = \hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r$ sunt n_r (2.20), atunci din (2.24) rezultă valorile proprii de energie ale $\hat{H}$ sunt (2.22)

$$E = \sum_{r=1}^{N} \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_r \tag{2.25}$$

- *Stările proprii* corespunzătoare sunt date de produsul *funcţiilor proprii* individuale $|n_1\rangle|n_2\rangle \dots |n_N\rangle$. In starea fundamentală a sistemului de oscilatori cuantici, fiecare oscilator individual este neexcitat: starea $|0, 0, \dots 0\rangle$, este notată pe scurt $|0\rangle$. Pentru starea fundamentala, conform (2.15), $\hat{a}_r|0\rangle = 0$ pentru toate valorile r.

  Operatorii $\hat{a}_r^\dagger$ crează cuante de oscilaţie, iar operatorii $\hat{a}_r$ anihilează cuantele de oscilaţie.

2.1.4 Sisteme cuantice de oscilatori armonici

- Fiecare *mod normal de oscilaţie*, adică fiecare nivel de energie a unui oscilator armonic, are o frecvenţă proprie de oscilaţie, cu valori proprii cuantificate de energie, conform (2.22), sunt:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad \text{unde} \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.22}$$

- Energia totală în tratarea cuantică, este dată de suma energiilor pentru *modurile normale de oscilaţie*

$$E = \sum_{n=1}^{N} \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_i \tag{2.26}$$

- In cazul unui sistem cu număr finit de atomi de exemplu, ca oscilatori armonici independenţi, frecvenţele fiecărui *mod normal de oscilaţie* sunt determinate de forţele interatomice, atât în descrierea clasică cât şi în cea cuantică. In descrierea cuantică, stările cu energie date pentru vibraţiile (oscilaţiile) sistemului de N-atomi sunt caracterizate prin valorile întregi ($n_1, n_2, \dots, n_N$), care specifică energia (2.22) a fiecărui *mod normal de oscilaţie*.

  Pentru fiecare *mod de oscilaţie*, $\hbar\omega$ măsoară energia unei cuanta. Energia unei stări permise a *modului respectiv de oscilaţie* este determinată în mod unic de numărul n de cuante de energie din acea stare.

- In continuare ne vom concentra atenţia nu atât asupra numărului N de nivele de energie a stărilor de oscilaţie, cât mai ales asupra *cuantelor de energie* $\hbar\omega_i$ din fiecare stare (grad de libertate) a sistemului şi care determină comportarea cuantică a sistemului în ansamblu.

  Intr-o stare de energie $\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_i$, există n_i cuante, fiecare cu energia $\hbar\omega_i$.

  Pentru starea caracterizată prin $(n_1, n_2, \dots, n_N)$, avem n_1 cuante de *mod de oscilaţie* 1 (frecventa ω_1), n_2 cuante de *mod de oscilaţie* 2, …, şi n_N cuante de *mod de oscilaţie* N.

- **Notă:** Deşi numărul de *moduri de oscilaţie* N este finit (cel puţin în cazul sistemelor cu număr finit de grade de libertate), numărul n_i nu are în general nici o restricţie, doar dacă există limitare de energie totală.

  Cu alte cuvinte trecem de la tratarea cu un număr fix N de grade de libertate, la o tratare cu nu număr variabil n_i de cuante de energie.

- In cazul unui corp solid, aceste cuante de vibraţie se numesc *fononi*, ca şi cuante elementare de excitaţie vibraţională.

2.1.5 Starea de vacuum a oscilatorului armonic cuantic

- Am văzut, setul de vectori de bază, ca *stări proprii* $|n\rangle$ ale Hamiltonian-ului de oscilator armonic, formează baza unui spaţiu vectorial, numit *spaţiu Fock*:

$$\hat{H}\,|n\rangle = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = E_n\,|n\rangle$$

pentru starea de vacuum avem: $\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle$ cu $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$

- Să calculăm poziţia media a oscilatorului în starea fundamentală (de vacuum) folosind operatorul adimensional de poziţie $\hat{X}$ (2.7), (**??**):

$\langle 0|\hat{X}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)|0\rangle = 0$ deoarece (**??**) $\hat{a}|0\rangle = 0$ şi $\langle 0|\hat{a}^\dagger = 0$

- Chiar dacă această valoare e zero, totuşi valoarea medie pentru $\hat{X}^2$ nu este zero:

$$\langle 0|\hat{X}^2|0\rangle = \frac{1}{2}\langle 0|\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)^2|0\rangle = \frac{1}{2}\langle 0|\left(\underbrace{\hat{a}^2}_{=0}+\underbrace{\hat{a}^{\dagger 2}}_{=0}+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\underbrace{\hat{a}^\dagger\hat{a}}_{=0}\right)|0\rangle = \frac{1}{2}\langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle = \frac{1}{2}\langle 0|\left(1+\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)|0\rangle = \frac{1}{2}$$

ce indică faptul că avem o dispersie a poziţiei în jurul valorii zero.

- In mod similar, pentru impuls avem: $\langle 0|\hat{P}|0\rangle = 0$; $\langle 0|\hat{P}^2|0\rangle = \frac{1}{2}$

- Cu legătura (2.7) între $\hat{x}$ şi $\hat{X} \Rightarrow \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\hat{X}$, exprimăm dispersia în coordonate $\Delta x^2 \equiv (\hat{x} - \langle\hat{x}\rangle)^2$ (abaterea pătratică medie), la fel şi cea în impuls:

$$\Delta x^2 = \frac{\hbar}{m\omega}\underbrace{\langle 0|\hat{X}^2|0\rangle}_{=1/2} = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega} \qquad ; \qquad \Delta p^2 = \hbar m\omega\underbrace{\langle 0|\hat{P}^2|0\rangle}_{=1/2} = \frac{1}{2}\hbar m\omega$$

- Acestea asigură val. minimă a *rel. de nedeterminare Heisenberg*: $\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}$

Capitol 3

Cuantificarea câmpului electromagnetic

3.1 De la câmpuri clasice la câmpuri cuantice

- Fie un câmp clasic în reprez. de coord. $\varphi(x)$, ca sol. de undă plană pt. partic. de impuls p:

$$\varphi(x) = a\, e^{i\,p\,x} \tag{3.1}$$

- Orice câmp poate fi scris ca o dezvoltare după un set complet de soluţii de unde plane pentru valoari discrete de impuls p_n.

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{i\,p_n\,x} \tag{3.2}$$

- Pentru amplitudini a reale şi valori p continui, suma devine o integrală pe spaţiul impulsurilor:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int a(p)\, e^{i\,p\,x} dp \tag{3.3}$$

- Câmpul în reprezentarea canonic conjugată $a(p)$ este legat de câmpul în reprezentarea de coordonată $\varphi(x)$ prin transformata Fourier:

$$a(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(x)\, e^{-i\,p\,x} dx \tag{3.4}$$

- Un câmp clasic poate fi privit ca un ansamblu continuu (3.3) de unde (oscilatori $N \to \infty$). Cuantificarea câmpului se face prin înlocuirea componentelor de câmp cu operatori: $\varphi(x) \to \hat{\varphi}(x)$, atunci, dacă notăm $|n\rangle = e^{i\,p_n\,x}$, avem,

- Cuantificarea câmpului (3.2) înseamnă

$$\hat{\varphi}(x) = \sum_n \hat{a}_n\, |n\rangle \tag{3.5}$$

- Cuantificarea câmpului (3.3) devine

$$\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{a}(p)\, |n\rangle\, dp \tag{3.6}$$

- Cuantificarea câmpului (3.4) devine

$$\hat{a}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \langle n|\, \hat{\varphi}(x)\, dx \tag{3.7}$$

3.2 Câmpul electromagnetic clasic

- Am văzut (1-undele-electromagnetice pag.4), din ecuaţiile Maxwell fără surse, obţinem ecuaţiile de propagare a componentelor $\vec{E}$ şi $\vec{B}$, sub forma ecuaţiei undelor:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{E} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{B} = 0 \tag{3.8}$$

- $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ pot fi exprimate prin ϕ şi $\vec{A}$ (vezi 1.1-Ec.Maxwell-pt.potenţiale, pag.4)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_{ext} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{3.9}$$

- In vid şi pentru $\phi_{ext} = const.$, $\vec{A}$ satisface aceeaşi ecuaţie de propagare a undelor:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = 0 \tag{3.10}$$

- Soluţia este unda plană:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \tag{3.11}$$

- In absenţa surselor (în vid) şi pentru $\phi_{ext} = const.$ relaţiile (3.9) ne dau:

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\underbrace{\omega\vec{A}_0}_{\vec{E}_0}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \underbrace{\vec{k}\times\vec{A}_0}_{\vec{B}_0}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \tag{3.12}$$

- Soluţiile (3.11) se pot exprima prin exponenţiale (la fel ca soluţia ecuaţiei Klein-Gordon cu $m = 0$),

cu $\vec{A}_0 = \vec{\epsilon}A_0$, $\vec{\epsilon}$ vector unitar polarizare a $\vec{E}$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{\epsilon}\,A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right) \tag{3.13}$$

- iar componentele $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ de câmp EM:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = -\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} = i\omega\vec{\epsilon}A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right) \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A} = i(\vec{k}\times\vec{\epsilon})A_0\left(a\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right) \end{cases} \tag{3.14}$$

3.2.1 Energia câmpului EM clasic

- Densitatea de energie a câmpului EM este: (vezi 1-Undele-electromagnetice, pag.9):

$$u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \frac{\epsilon_0}{2}\Big(E^2 + \underbrace{c^2 B^2}_{E^2}\Big) = \epsilon_0 |\vec{E}|^2 = \epsilon_0\, \omega^2 \vec{A}_0^2 \sin^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \tag{3.15}$$

unde am folosit (3.12): $\vec{E} = -\omega \vec{A}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

- Pentru calculul energiei, trebuie să ţinem cont şi de cele două componente (grade de libertate) de polarizare ϵ_p ale $\vec{E}$, ca două oscilaţii independente, în plan normal la direcţia de mişcare. Acestea dublează energia câmpului EM.

- Astfel, energia câmpului EM într-un volum finit V este:

$$W = 2\int_V u\, d^3\vec{r} = 2\epsilon_0 \int_V |\vec{E}|^2\, d^3\vec{r} \tag{3.16}$$

- Deoarece $|\vec{E}| = E_0 = \omega A_0$ avem:

$$W = 2\epsilon_0\, \omega^2 A_0^2\, V \tag{3.17}$$

- Minimul de energie implică cuantificarea (energia unui foton)

$$W = \hbar\omega \tag{3.18}$$

- Egalând ultimele două relaţii, putem exprima:

$$A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}} \tag{3.19}$$

- Soluţia $\vec{A}(\vec{r}, t)$ (3.13) devine:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{\epsilon}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}}\left(a\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + a^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right) \tag{3.20}$$

3.3 Câmpul electromagnetic cuantic

3.3.1 Cuantificarea câmpului electromagnetic (operatori)

- In cuantificarea oscilatorului armonic am trecut la operatori: $x \to \hat{x}$ şi $p \to \hat{p}$ iar în hamiltonian $(x,p) \to (\hat{x},\hat{p}) \to (\hat{a},\hat{a}^\dagger)$.
  Pentru cuantificarea câmp EM trecem la operatori de câmp $\psi(x) \to \hat{\psi}(x)$, adică vom înlocui $\vec{A} \to \hat{\vec{A}}$. Pentru 2 grade de polarizare independente $\vec{\epsilon}_\lambda$ şi un set de frecvenţe ω_k proprii, folosind (3.20) pentru $\vec{A}$,

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r},t)=\sum_{k,\lambda}\vec{\epsilon}_\lambda\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_k V}}\left(\hat{a}_{k\lambda}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}+\hat{a}^\dagger_{k\lambda}e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}\right) \tag{3.21}$$

  în termenul II, a^* - *complex conjugat*, prin trecerea la operatori devine $\hat{a}^\dagger$ - *hermitic conjugat*

- Componentele cuantificate $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ (3.14) ale câmpului EM, devin operatori:

$$\begin{cases}\hat{\vec{E}}(\vec{r},t)=-\dfrac{\partial\hat{\vec{A}}}{\partial t}=i\displaystyle\sum_{k,\lambda}\omega_k\vec{\epsilon}_\lambda\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_k V}}\left(\hat{a}_{k\lambda}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}-\hat{a}^\dagger_{k\lambda}e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}\right)\\ \hat{\vec{B}}(\vec{r},t)=\hat{\vec{\nabla}}\times\hat{\vec{A}}=i\displaystyle\sum_{k,\lambda}(\vec{k}\times\vec{\epsilon}_\lambda)\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_k V}}\left(\hat{a}_{k\lambda}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}-\hat{a}^\dagger_{k\lambda}e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}\right)\end{cases} \tag{3.22}$$

- Rescriem operatorii (3.22) fără $2\epsilon_0 V$ la numitor şi vectorul polarizare $\vec{\epsilon}_\lambda$, iar indicele de mode notat $l=(k,\lambda)$ şi $\vec{u}_l=e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}$, adică,

$$\begin{cases}\hat{E}(\vec{r},t)=i\displaystyle\sum_l\sqrt{\hbar\omega_l}\left[\hat{a}_l e^{-i\omega_l t}\,\vec{u}_l(\vec{r})-\hat{a}^\dagger_l e^{i\omega_l t}\,\vec{u}^*_l(\vec{r})\right]\\ \hat{B}(\vec{r},t)=i\displaystyle\sum_l\sqrt{\frac{\hbar c^2}{\omega_l}}\left[\hat{a}_l e^{-i\omega_l t}\vec{k}_l\times\vec{u}_l(\vec{r})-\hat{a}^\dagger_l e^{i\omega_l t}\vec{k}_l\times\vec{u}^*_l(\vec{r})\right]\end{cases} \tag{3.23}$$

3.3.2 Cuantificarea energiei câmpului electromagnetic

- Operatorul Hamilton ca energia câmpului EM (vezi 1-Undele-electromagnetice, pag.9): $\hat{H}_{field} = \frac{1}{2}\int_V \left(\epsilon_0 \hat{E}^2 + \frac{\hat{B}^2}{\mu_0}\right) d^3r$

- $$\int_V d^3r \left|\hat{E}\right|^2 = i\sum_{l,m} \hbar\sqrt{\omega_l\omega_m}\Big[-\hat{a}_l\hat{a}_m e^{-i(\omega_l t+\omega_m t)}\int d^3r\, \vec{u}_l(\vec{r})\cdot\vec{u}_m(\vec{r}) + \hat{a}_l^\dagger\hat{a}_m e^{-i(\omega_l t-\omega_m t)}\int d^3r\, \vec{u}_l^*(\vec{r})\cdot\vec{u}_m(\vec{r})\Big] + \Big[h.c.\Big]$$

  Folosind relaţiile de ortonormare: $\int d^3r\, \vec{u}_l^*(\vec{r})\vec{u}_m(\vec{r}) = \delta_{l,m}$; $\int d^3r\, \vec{u}_l(\vec{r})\vec{u}_m(\vec{r}) = \delta_{-l,m}$

  într-adevăr, cu $u_l \sim e^{i\,k_l x}$ avem $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,k_l x} e^{-i\,k_m x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,(k_l-k_m)x} dx = 2\pi\delta_{l,m}$

  Obţinem: $$\int_V d^3r \left|\hat{E}\right|^2 = \sum_l \hbar\omega_l\Big[\hat{a}_l^\dagger\hat{a}_l + \hat{a}_l\hat{a}_l^\dagger - \hat{a}_l\hat{a}_{-l}e^{-2i\omega_l t} - \hat{a}_l^\dagger\hat{a}_{-l}^\dagger e^{2i\omega_l t}\Big]$$

- $$\int_V d^3r \left|\hat{B}\right|^2 = i\sum_{l,m}\frac{\hbar c^2}{\sqrt{\omega_l\omega_m}}\Big[-\hat{a}_l\hat{a}_m e^{-i(\omega_l t+\omega_m t)}\int d^3r\,(\vec{k}_l\times\vec{u}_l)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m) + \hat{a}_l^\dagger\hat{a}_m e^{-i(\omega_l t-\omega_m t)}\int d^3r\,(\vec{k}_l\times\vec{u}_l^*)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m)\Big] + \Big[h.c.\Big]$$

  Cu identităţile $(\vec{k}_l\times\vec{u}_l)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m) = (\vec{k}_l\cdot\vec{k}_m)(\vec{u}_l\cdot\vec{u}_m)$, şi $\vec{k}\cdot\vec{u}_l = 0$, avem,

  $$\int d^3r(\vec{k}_l\times\vec{u}_l)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m) = -k_l^2\delta_{-l,m} \quad ; \quad \int d^3r(\vec{k}_l\times\vec{u}_l^*)\cdot(\vec{k}_m\times\vec{u}_m) = k_l^2\delta_{l,m}$$

  Obţinem: $$\int_V d^3r \left|\hat{B}\right|^2 = \sum_l \hbar\omega_l\Big[\hat{a}_l^\dagger\hat{a}_l + \hat{a}_l\hat{a}_l^\dagger + \hat{a}_l\hat{a}_{-l}e^{-2i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger\hat{a}_{-l}^\dagger e^{2i\omega_l t}\Big]$$

- In final, expresia Hamiltonian-ului în funcţie de operatorii de creare şi anihilare:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{k,\lambda}\hbar\omega_k\left(\hat{a}_{k,\lambda}^\dagger\hat{a}_{k,\lambda} + \hat{a}_{k,\lambda}\hat{a}_{k,\lambda}^\dagger\right) = \sum_{k,\lambda}\hbar\omega_k\left(\hat{a}_{k,\lambda}^\dagger\hat{a}_{k,\lambda} + \frac{1}{2}\right) \tag{3.24}$$

- Hamiltonian-ul se poate scrie şi ca cel de oscilator armonic (2.21)

$$\hat{H}_{field} = \hbar\omega_k\left(\hat{a}_{kp}^\dagger\hat{a}_{kp} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{N}_{kp} + \frac{1}{2}\right) \tag{3.25}$$

- $\hat{a}_{kp}^\dagger\hat{a}_{kp} = \hat{N}_{kp}$ este operatorul *număr de fotoni* de frecvenţă ω_k şi polarizare ϵ_p, similar cu operatorul *numar de cuante* de oscilator armonic (2.20).