Procese QED în câmpuri laser intense
tema 18

M. Penţia

May 7, 2021

.

”Verbum sapienti sat est”

Cuprins

1 Serii Dyson **4**
1.1 Operatorul de evoluţie a stărilor cuantice 4
1.2 Hamiltonian $\hat{H}$ în mecanica cuantică (comutativ) 6
1.2.1 $\hat{H}$ independent de timp 6
1.2.2 $\hat{H}(t)$ funcţie de timp 6
1.3 Hamiltonian $\hat{H}(t)$ în teoria cuantică a câmpurilor (necomutativ) 7

Capitol 1

Serii Dyson

1.1 Operatorul de evoluţie a stărilor cuantice

- Variaţia temporală a stării cuantice $|\psi(t)\rangle$ este dată de ecuaţia Schrödinger
$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle} \tag{1.1}$$

- Experimental nu se măsoară starea cuantică $|\psi\rangle$, ci o valoare medie (expectation value) sau o probabilitate, date de un produs $\langle bra|$ şi $|ket\rangle$ cu eventual un operator $\hat{A}$ la mijloc
$$\mathcal{P} = \langle f(t)|\,\hat{A}\,|i(t)\rangle$$
sau explicit
$$\mathcal{P} = \int \big(f^*(t)\,\hat{A}\,i(t)\big)\,dx \tag{1.2}$$

- In descrierea Schrödinger starea cuantică $|\psi(t)\rangle$ este cea care evoluează în timp, conform ecuaţiei (1.1). Operatorii mărimilor fizice măsurabile în schimb, nu au nici o ecuaţie de mişcare. Ei sunt constanţi în timp. Totuşi, noi suntem interesaţi de a urmări evoluţia în timp a mărimilor fizice măsurabile de genul (1.2), pentru care va trebui să apelăm la o altă "descriere", echivalentă celei Schrödinger.

- Dacă în mecanica cuantică ordinară abordarea alternativă este doar un aspect pur echivalent, în teoria câmpurilor cuantice, abordarea alternativă este esenţială. In particular, în teoria cuantică a câmpurilor, acestea sunt operatori, pe care suntem interesaţi de data asta să le urmărim evoluţia în timp.

- Pentru a transfera dependenţa de timp de la starea cuantică $|\psi(t)\rangle$ spre operatorul $\hat{A}(t)$, vom introduce întâi operatorul de evoluţie $\hat{U}(t_0,t)$ care leagă starea $|\psi(t)\rangle$ la momentul t, de starea $|\psi(t_0)\rangle$ la un moment anterior t_0, adică definim:

- Operatorului de evoluţie $\hat{U}(t_0,t)$ este definit ca
$$\begin{cases} |\psi(t)\rangle = \hat{U}(t_0,t)\,\psi(t_0)\rangle \\ \langle\psi(t)| = \langle\psi(t_0)|\,\hat{U}^\dagger(t_0,t) \end{cases} \tag{1.3}$$

- $|\psi(t)\rangle$ este o stare Schrödinger normată
$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1 \tag{1.4}$$

- Inlocuind (1.3) în (1.4)
$$1 = \langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t_0)|\,\hat{U}^\dagger\hat{U}\,\psi(t_0)\rangle \tag{1.5}$$

- Deci operatorul de evoluţie este unitar: $$\boxed{\hat{U}^\dagger \hat{U} = I} \tag{1.6}$$

- Operatorul de evoluţie de la $t_1 \to t_2$ şi de la $t_2 \to t_3$ este egal cu operatorul de evoluţie de la $t_1 \to t_3$.
$$\hat{U}(t_1, t_2)\, \hat{U}(t_2, t_3) = \hat{U}(t_1, t_3) \tag{1.7}$$

- Pentru evoluţia inversă folosim (1.6) $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$
$$\hat{U}(t_1, t_2) = \hat{U}^{-1}(t_2, t_1) = \hat{U}^\dagger(t_2, t_1) \tag{1.8}$$

- Dacă evoluţia în timp a stării $|\psi(t_0)\rangle$ este (1.3)
$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t_0, t)\, \psi(t_0)\rangle}$$

- Atunci
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \dot{U}(t_0, t)\, \psi(t_0)\rangle &= \dot{U}(t_0, t)\ \overbrace{U^{-1}(t, t_0)|\psi(t)\rangle}^{|\psi(t_0)\rangle} \\ &= \dot{U}(t_0, t)\ U^\dagger(t, t_0)\, |\psi(t)\rangle \end{aligned}} \tag{1.9}$$

- Comparând cu ecuaţia Schrödinger (1.1)
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}\, |\psi(t)\rangle$$

rezultă $$\boxed{\hat{H} = i\hbar \dot{U} U^\dagger} \tag{1.10}$$

- Pe de altă parte, din condiţia de unitaritate (1.6): $U\, U^\dagger = I$

prin derivare avem: $$\dot{U}U^\dagger + U\dot{U}^\dagger = 0 \quad \text{sau} \quad \dot{U}U^\dagger + \left(\dot{U}U^\dagger\right)^\dagger = 0 \tag{1.11}$$

deci $\dot{U}U^\dagger$ este antihermitic: $$\dot{U}U^\dagger = -\left(\dot{U}U^\dagger\right)^\dagger \tag{1.12}$$

iar $i\,\dot{U}U^\dagger$ este hermitic, deoarece operatorul adjunct (hermitic conjugat) se obţine prin transpunere şi conjugare complxă (schimbă semnul componentei complexe):
$$i\,\dot{U}U^\dagger \xrightarrow{hc} \left(i\,\dot{U}U^\dagger\right)^\dagger = -i\, U\dot{U}^\dagger \overbrace{=}^{(1.11)} -i\left(- \dot{U}U^\dagger\right) = i\,\dot{U}U^\dagger$$

deci $i\,\dot{U}U^\dagger$ este hermitic: $$\left(i\,\dot{U}U^\dagger\right)^\dagger = i\,\dot{U}U^\dagger \tag{1.13}$$

- Inmulţind (1.10) cu U şi folosind condiţia de unitaritate (1.6) obţinem ecuaţia de mişcare pentru operatorul de evoluţie U, echivalentă cu ecuaţia Schrödinger (1.1).
$$\boxed{i\hbar\dot{U} = HU} \tag{1.14}$$

- Să trecem să rezolvăm această ecuaţie, care se poate rescrie, deoarece $i = -1/i$
$$i\hbar\frac{dU}{U} = H dt \quad \text{prin integrare obţinem}$$
$$\ln U = -\frac{i}{\hbar} H t \quad \text{sau} \quad U(t) = e^{-i\,Ht/\hbar}$$

1.2 Hamiltonian $\hat{H}$ în mecanica cuantică (comutativ)

1.2.1 $\hat{H}$ independent de timp

- Dacă H este număr pur şi simplu, integrarea ecuaţiei (1.14) ne dă imediat:

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar} \tag{1.15}$$

- Însă dacă $\hat{U}$ şi $\hat{H}$ sunt operatori, trebuie folosită dezvoltarea în serie de puteri:

$$\boxed{\hat{U}(t) = e^{-i\,\hat{H}t/\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{it}{\hbar}\hat{H}\right)^n} \tag{1.16}$$

- iar derivata temporală $\dot{\hat{U}}$ va fi:

$$\dot{\hat{U}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}\,n}_{1/(n-1)!}\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\right)\left(-\frac{it}{\hbar}\hat{H}\right)^{n-1} \underset{\text{m = n-1}}{=} -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{it}{\hbar}\hat{H}\right)^m}_{\hat{U}} = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,\hat{U} \tag{1.17}$$

- Deci, am obţinut ecuaţia de mişcare iniţială (1.14). Adică, în cazul în care $\hat{H}$ nu depinde explicit de timp, dezvoltarea în serie (1.16) este valabilă pentru operatorul de evoluţie $\hat{U}(t)$. Aici avem produse $\hat{H}\hat{H}$ care evident comută, pentru acelaşi $\hat{H}$.

1.2.2 $\hat{H}(t)$ funcţie de timp

- Dacă $H(t)$ şi $U(t,t_0)$ sunt funcţii de timp (numere), să verificăm că soluţia U a ecuaţiei de tip (1.14) este valabilă dacă folosim dezvoltarea ei în serie de puteri:

$$\dot{U} = H(t)\,U \tag{1.14}$$

- Să separăm variabilele şi apoi să integrăm această ecuaţie,

$$\frac{dU}{U} = H(t)\,dt \quad \text{prin integrare} \quad \ln U = \int_{t_0}^{t} H(t)\,dt$$

- Atunci, funcţia $U(t,t_0)$ va fi

$$\boxed{U(t,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} H(t')\,dt'\right) = \sum_n \frac{1}{n!}\left(\int_{t_0}^{t} H(t')\,dt'\right)^n} \tag{1.18}$$

- iar derivata temporală $\dot{U}(t,t_0)$ va fi

$$\dot{U}(t,t_0) = \sum_n \underbrace{\frac{1}{n!}\,n}_{1/(n-1)!}\,H(t)\underbrace{\left(\int_{t_0}^{t} H(t')\,dt'\right)^{n-1}} = H(t)\,U(t,t_0) \tag{1.19}$$

deoarece aici $\boxed{\Big[\mathrm{H(t), H(t')}\Big] = 0}$

- Ecuaţia de mişcare (1.14) pentru funcţia $U(t,t_0)$, cu dezvoltarea exponenţialei în serie de puteri (1.18), rămâne valabilă şi în cazul în care $H(t,t_0)$ e funcţie de timp.

$$U(t,t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H(t')\,dt'\right) \tag{1.20}$$

1.3 Hamiltonian $\hat{H}(t)$ în teoria cuantică a câmpurilor (necomutativ)

- Fie cazul în care $\hat{H}(t)$ este operator, care luat la momente diferite, nu comută $\quad \boxed{\left[\hat{H}(t), \hat{H}(t')\right] \neq 0}$
- Să dezvoltăm în serie operatorul $\hat{U}(t, t_0)$, fără să mai purtăm constanta $-i/\hbar$.

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{U}(t,t_0) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} dt'\, \hat{H}(t')\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\int_{t_0}^{t} dt'\, \hat{H}(t')\right)^n \\ &= I + \int_{t_0}^{t} dt'\, \hat{H}(t') + \frac{1}{2!}\underbrace{\int_{t_0}^{t} dt'\, \hat{H}(t') \int_{t_0}^{t} dt''\, \hat{H}(t'')}_{Int} + \ldots \end{aligned}} \tag{1.21}$$

- iar derivata temporală $\dot{\hat{U}}(t, t_0)$, va fi:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{U}}(t,t_0) &= 0 + \hat{H}(t) + \frac{1}{2!}\left(\hat{H}(t)\underbrace{\int_{t_0}^{t} dt''\, \hat{H}(t'')} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} dt'\, \hat{H}(t')}\, \hat{H}(t)\right) + \ldots \\ &= \hat{H}(t)\, \hat{U} \end{aligned} \tag{1.22}$$

- Dacă comutatorul

$$\left[\hat{H}(t), \int_{t_0}^{t} dt'\, \hat{H}(t')\right] = 0 \tag{1.23}$$

valabil în mecanica cuantică, atunci termenul din paranteze ar fi

$$2\,\hat{H}(t)\int_{t_0}^{t} dt'\, \hat{H}(t'), \quad \text{iar} \quad \dot{\hat{U}}(t,t_0) = \hat{H}(t)\underbrace{\left(I + \int_{t_0}^{t} dt'\, \hat{H}(t') + \ldots\right)}_{\hat{U}(t,t_0)\ (1.21)} = \hat{H}(t)\, \hat{U}(t,t_0),$$

deci dezvoltarea (1.21), în cazul mecanicii cuantice, unde relaţia de comutare (1.23) este valabilă, este soluţie pentru ecuaţia de mişcare (1.14).

- Dar în teoria cuantică a câmpurilor, comutatorul $\quad \left[\hat{H}(t), \int_{t_0}^{t} dt'\, \hat{H}(t')\right] \neq 0 \quad (1.24)$

atunci în ultimul termen din (1.21) împărţim integrarea după t'' în două integrale, una pentru $t'' < t'$ şi una pentru $t'' > t'$

$$\begin{aligned} Int &= \int_{t_0}^{t} dt'\, \hat{H}(t') \int_{t_0}^{t} dt''\, \hat{H}(t'') = \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t} dt''\, \hat{H}(t')\hat{H}(t'') \quad \text{separăm} \int_{t_0}^{t} \to \int_{t_0}^{t'} + \int_{t'}^{t} \\ &= \int_{t_0}^{t} dt' \left\{\int_{t_0}^{t'} dt''\, \hat{H}(t')\hat{H}(t'') + \int_{t'}^{t} dt''\, \hat{H}(t')\hat{H}(t'')\right\} \quad \begin{matrix}\text{facem} \\ \text{ordonarea} \\ \text{temporală}\end{matrix} \\ &= \int_{t_0}^{t} dt' \underbrace{\boxed{\int_{t_0}^{t'} dt''}}_{t'>t''} \hat{H}(t')\hat{H}(t'') + \int_{t_0}^{t} dt' \underbrace{\boxed{\int_{t'}^{t} dt''}}_{t''>t'} \hat{H}(t'')\hat{H}(t') \end{aligned} \tag{1.25}$$

ultima integrală se poate scrie:

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} dt' \underbrace{\boxed{\int_{t'}^{t} dt''}}_{t''>t'} \hat{H}(t'')\hat{H}(t') &= \int_{t_0}^{t} dt'' \underbrace{\boxed{\int_{t_0}^{t''} dt'}}_{t'<t''} \hat{H}(t'')\hat{H}(t') \\
&\underbrace{\overset{t' \leftrightarrow t''}{=}} \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \, \hat{H}(t')\hat{H}(t'')
\end{aligned}
\tag{1.26}
$$

adică egală cu prima integrala (1.25)

Atunci integrala (1.25) se poate scrie:

$$
I = \int_{t_0}^{t} dt' \, \hat{H}(t') \int_{t_0}^{t} dt'' \, \hat{H}(t'') = 2 \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \, \hat{H}(t')\hat{H}(t'') \tag{1.27}
$$

De remarcat că acum domeniul de integrare al celei de-a II-a integrale $\int_{t_0}^{t'} dt''$ este cuprins în domeniul I-ei integrale $\int_{t_0}^{t} dt'$

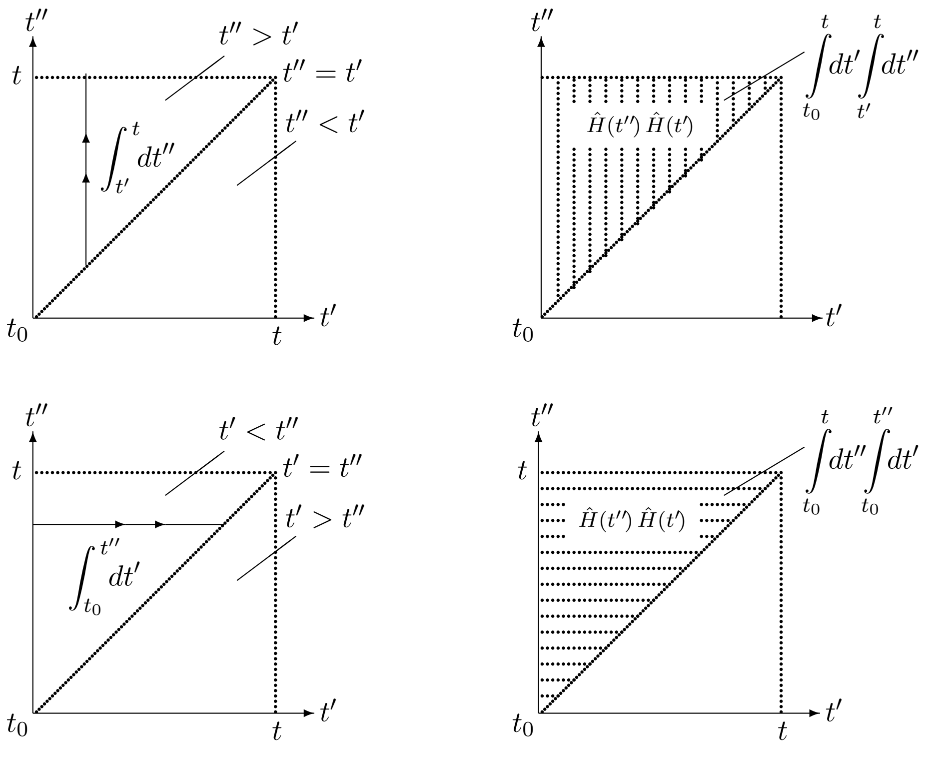

Figura 1.1: Integrările pentru relaţia (1.26) de domeniile marcate cu $\square$ pentru $t'' > t'$ (partea haşurată vertical) şi pentru $t' < t''$ (partea haşurată orizontal)

Pentru a exprima soluţia $\hat{U}(t,t_0)$ exprimăm termenul general al dezvoltării în serie de puteri (1.21)

$$\frac{1}{n!}\left(\int\limits_{t_0}^{t} dt'\hat{H}(t')\right)^n =$$
$$= \frac{1}{n!}\int\limits_{t_0}^{t} dt' \int\limits_{t_0}^{t'} dt'' \ldots \int\limits_{t_0}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} \left\{\hat{H}(t')\hat{H}(t'')\ldots\hat{H}(t^{(n)})\right\} + \text{permutări}$$

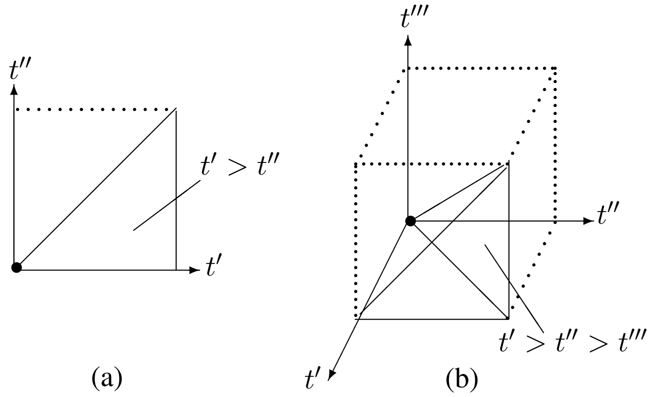

Figura 1.2: Domeniile de integrare sunt în număr de $n!$ pentru fiecare termen al dezvoltării în serie Dyson. (a) pentru termenul de ordin II. (b) pentru termenul de ordin III

pentru a satisface ecuaţia (1.14) $\dot{U} = H(t)U$ trebuie să ordonăm temporal termenii din acolade astfel ca $\hat{H}(t')$ să fie întotdeauna la stânga.

In final, dezvoltarea operatorului de evoluţie (1.21) devine:

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{U}(t,t_0) &= \sum_n \int\limits_{t_0}^{t} dt' \int\limits_{t_0}^{t'} dt'' \ldots \int\limits_{t_0}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)}\, \hat{T}\left\{\hat{H}(t')\hat{H}(t'')\ldots\hat{H}(t^{(n)})\right\} \\ &= \hat{T}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_0}^{t} dt'\,\hat{H}(t')\right\}\end{aligned}} \tag{1.28}$$

unde $\hat{T}$ este operatorul de ordonare temporală $t' > t'' > t''' \cdots > t^{(n)}$.
Aceasta este seria Dyson ca soluţia generală a ecuaţiei Schrödinger pentru operatorul de evoluţie $\hat{U}(t,t_0)$.