

Procese QED în câmpuri laser intense
tema 20

M. Penția

May 24, 2021

”Verbum sapienti sat est”

Cuprins

1	Diagrame Feynman	4
1.1	Densitatea și curentul de câmp	5
1.2	Curenți de particule cu energie negativă (antiparticule)	6
1.3	Teoria perturbațiilor în mecanica cuantică	9
1.4	Aproximații succesive în calculul amplitudinii undelor parțiale	12
1.4.1	Starea inițială - o singură stare neperturbată de undă plană	12
1.4.2	Starea inițială - superpoziție de stări neperturbate de undă plană	15
1.5	Aplicații	17
1.5.1	Amplitudinea de tranziție	17
1.5.2	Electrodinamica particulelor încărcate nerelativiste	17
1.5.3	Electrodinamica particulelor relativiste de spin zero	19

Capitol 1

Diagrame Feynman

1.1 Densitatea și curentul de câmp

	Ecuția Nerelativistă (Schrödinger)	Ecuția Relativistă (Klein-Gordon)	
Relația energie-impuls	1-dimensional $E = \frac{p^2}{2m}$	1-dimensional $\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2$	4-dimensional $p^2 = m^2 c^2$
Trecerea la operatori diferențiali:	$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$; $p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \equiv -i\hbar \nabla$	$p^\mu \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv i\hbar \partial^\mu$	
Ec. de bază de câmp liber	$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$	$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0$	$(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}) \psi = 0$
Ec. complex conjugată	$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} = 0$	$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi^* = 0$	$(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}) \psi^* = 0$
Inmulțim la stânga ec. de bază cu $-i\psi^*$ iar ec. c.c. la dreapta cu $i\psi$ apoi adunarea lor	$\underbrace{\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right)}_{\frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \psi) = \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \underbrace{\left(-\frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \psi \right) \right)}_{-\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi) = \frac{\partial j}{\partial x}} = 0$	$\frac{i}{c^2} \underbrace{\left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} \psi \right)}_{\frac{i}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi) = \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \underbrace{\left(-i \left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \psi \right) \right)}_{-i \frac{\partial}{\partial x} (\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi) = \frac{\partial j}{\partial x}} = 0$	$\begin{cases} x^\mu \equiv (ct, \vec{x}) ; x_\mu \equiv (ct, -\vec{x}) \\ \partial^\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) ; \\ \partial_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[i \underbrace{\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\mu} \psi \right)}_{j^\mu} \right] = 0 \end{cases}$
Ecuția de continuitate	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$	$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$	$\partial_\mu j^\mu = 0$
Densitatea ρ și Curentul de câmp j	$\begin{cases} \rho = \psi^* \psi = \psi ^2 \\ j = -\frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right) \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = \frac{i}{c} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) \\ j = -i \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right) \end{cases}$	$j^0 \equiv c\rho ; j^{1,2,3} \equiv \vec{j}$ $j^\mu = i \left(\psi^* \partial^\mu \psi - \partial^\mu \psi^* \psi \right)$
Folosind soluția de undă plană a ecuației de bază, cu înlocuirile: $\begin{cases} p \cdot x = p_\mu x^\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x} \\ k \cdot x = k_\mu x^\mu = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} = \frac{E}{\hbar} t - \frac{\vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{x} \end{cases}$	$\left. \begin{aligned} \psi &= N e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})/\hbar} \\ &\equiv N e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \\ \psi^* &= N^* e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})/\hbar} \\ &\equiv N^* e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \end{aligned} \right\} \rightarrow$	$\begin{aligned} \psi &= N e^{-i p \cdot x/\hbar} \\ &\equiv N e^{-i k \cdot x} \\ \psi^* &= N^* e^{i p \cdot x/\hbar} \\ &\equiv N^* e^{i k \cdot x} \end{aligned}$	
Densitatea și curentul de câmp pt. unda plană	$\begin{cases} \rho = N ^2 \\ \vec{j} = \frac{\vec{p}}{m} N ^2 \end{cases}$	$\begin{cases} c\rho = i \left(-2i \frac{E}{\hbar} \right) N ^2 = 2 \frac{E}{\hbar} N ^2 \\ \vec{j} = -i \left(2i \frac{\vec{p}}{\hbar} \right) N ^2 = 2 \frac{\vec{p}}{\hbar} N ^2 \end{cases}$	$j^\mu = 2 p^\mu N ^2 / \hbar$ dacă j^μ e 4-curentul de particulă cu sarcina q , se înmulțește cu sarcina q : $j^\mu = q \times 2 p^\mu N ^2 / \hbar$

1.2 Curenți de particule cu energie negativă (antiparticule)

- Să considerăm o particulă (ex. π^+) de energie $E > 0$, impuls $\vec{p} > 0$, și sarcină q . Atunci, curentul de câmp j^μ pentru soluțiile de $E > 0$, pentru a fi interpretat ca și curent de sarcină (electromagnetic), îl vom înmulți cu sarcina q a particulei respective:

$$j_{em}^\mu(\pi^+) = q \times \text{curent de câmp pentru } E > 0$$

- Soluțiile de câmpuri relativiste (Klein-Gordon, Dirac): $\exp[-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})]$, specifică și semnul densității ρ , ca fiind cel al energiei E , iar semnul curentului \vec{j} este semnul \vec{p} .
- Luând curentul Klein-Gordon $j^\mu = 2|N|^2 p^\mu / \hbar$ din Tabelul de la pag.5, avem:

$$\text{echivalente} \begin{cases} j_{em}^\mu(\pi^+) = (+e) \cdot 2|N|^2 \cdot [+E, +\vec{p}] / \hbar \text{ sol. } E > 0, \text{ sarcină } +e \\ j_{em}^\mu(\pi^-) = (-e) \cdot 2|N|^2 \cdot [-E, -\vec{p}] / \hbar \text{ sol. } E < 0, \text{ sarcină } -e \end{cases}$$

Adică: $\begin{cases} \text{emisia } (+\vec{p}) \text{ unei particule } (\pi^+) (E > 0) \text{ cu sarcină } '+e', \text{ este echivalentă cu} \\ \text{absorbția } (-\vec{p}) \text{ a unei antiparticule } (\pi^-) (E < 0) \text{ cu sarcină } '-e'. \end{cases}$

- Atunci, în soluția de particulă liberă $\exp[-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})]$, putem asocia *energia negativă* ($-E$), cu soluția ce evoluează *învers în timp* ($-t$), deoarece

$$\exp[-i(-E)(-t)] = \exp(-iEt)$$

iar *impulsul negativ* ($-\vec{p}$) al unei particule, îl putem asocia cu soluția ce evoluează *învers în spațiu* ($-\vec{x}$), deoarece

$$\exp(i(-\vec{p})(-\vec{x})) = \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x})$$

- Deci, un curent de particule cu energie E și impuls \vec{p} este echivalent cu un curent de antiparticule cu energie $-E$ și impuls $-\vec{p}$, care se deplasează *învers în spațiu* ($-\vec{x}$) și *timp* ($-t$), deoarece unda plană ce descrie mișcarea particulelor este aceeași:

$$\psi = \exp[-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})] = \exp[-i[(-E)(-t) - (-\vec{p}) \cdot (-\vec{x})]]$$

- Cu alte cuvinte, soluțiile de *particule de energie negativă* evoluând "învers" în timp, descriu *antiparticule de energie pozitivă* evoluând "înainte" în timp.

- Evoluția poate fi descrisă grafic în felul următor $\left| \begin{array}{c} \pi^+ \\ \uparrow E > 0 \equiv \downarrow E < 0 \\ \pi^- \end{array} \right| \uparrow \text{ timp} \quad (1.1)$

- Aceste reprezentări ale evoluției *stărilor de energie negativă* au fost propuse de Stückelberg (1941) și de Feynman (1948). Exprimate mai simplu, se poate spune că *o soluție de energie negativă descrie o particulă ce se mișcă "învers" în timp* (1.1), sau o antiparticulă de *energie pozitivă* ce se deplasează "înainte" în timp. Această idee stă la baza reprezentării interacțiilor prin diagrame Feynman. Vom încerca să introducem aceste diagrame în cele ce urmează.

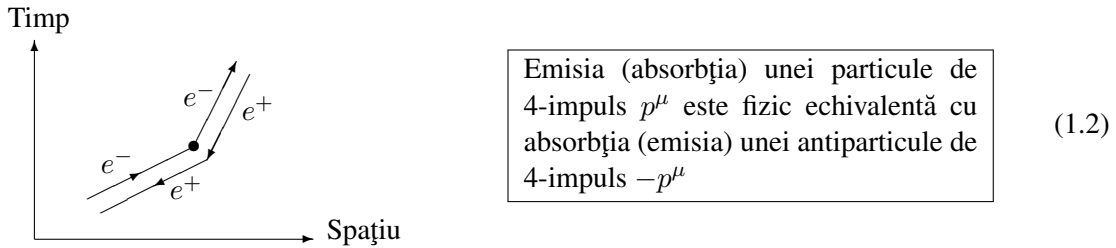


Figura 1.1: Împrăștierea unui e^+ descrisă ca împrăștierea inversă în spațiu și timp a unui e^-

Toate procesele posibile pot fi descrise cu ajutorul *funcțiilor de câmp* uniparticulă (e^-), fără a fi necesară folosirea unor *funcții de câmp* diferite pentru antiparticule (e^+). De exemplu, pentru descrierea împrăștierei pozitronului (e^+) putem folosi *soluțiile de energie negativă* ale electronului e^- , dar în care interschimbăm stările de intrare și ieșire (vezi Figura 1.1).

Vom încerca să fundamentăm ideea după care soluțiile de energie negativă pot fi utilizate în descrierea mișcării antiparticulelor, în timp ce soluțiile de energie pozitivă descriu comportarea particulelor.

În acest fel am găsit o utilizare a soluțiilor de energie negativă (sau în general de 4-impuls negativ) ale ecuației Klein-Gordon pentru pioni π^+ , anume ele descriu reacțiile cu pioni π^- de energie pozitivă, având sensul de reacție inversat. De aceea este o pură convenție alegerea ceea ce numim particulă respectiv antiparticulă, în perechea particulă - antiparticulă (cazul π^\pm este opus celui e^\mp !).

Formalismul funcției de câmp uniparticulă (e^-) se poate folosi nu numai în descrierea de antiparticulă ci și a sistemelor multiparticulă. Ca exemplu avem dubla împrăștiere a unui electron pe un potențial. Vom face reprezentarea acestei interacții sub forma unor diagrame în spațiu-timp, vezi Fig.1.2.

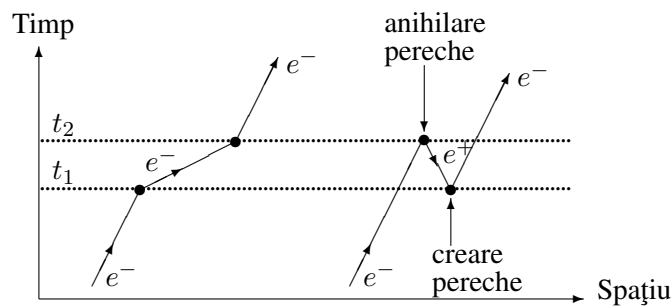


Figura 1.2: Două moduri de interpretare a dublei împrăștiere a unui electron, cu ordonări diferite în timp

Avem o remarcă importantă: cele două diagrame corespund unuia și aceluiași fenomen fizic. Deci, avem două ordonări temporale diferite ale celor două împrăștiere ce conduc la unul și același eveniment observabil. Într-adevăr, trebuie notat că traiectoria observabilă a electronului, înainte și după dubla împrăștiere, este aceeași în cele două

diagrame. A doua diagramă este posibilă datorită existenței descrierii de antiparticulă: "La momentul t_2 electronul este împrăștiat "înapoi" în timp (având energia $E < 0$). Acest electron evoluând "înapoi" în timp este privit ca pozitron (cu $E > 0$), ce merge "înainte" în timp. Deci, interacțiile prezentate în diagramă pot fi interpretate în felul următor: întâi, la momentul t_1 , se crează o pereche $e^- e^+$, apoi la un moment ulterior t_2 , e^+ este anihilat de electronul inițial e^- . De aceea, între momentele t_1 și t_2 , traiectoria electronului din diagrama a doua, de fapt descrie starea a trei particule: electronul inițial, electronul final, precum și un pozitron. Cum ambele împrăștieri duc la același electron din starea finală observabilă, ambele vor trebui incluse în calculul probabilității de interacție. Trebuie de notat că, la fel ca în cazul teoriei cu electroni și goluri, *vacuum-ul* devine un mediu complex: în care se creează și dispar în permanența perechi $e^- e^+$, în general perechi particulă-antiparticulă.

În concluzie, în descrierea proceselor fizice ce implică particule (de exemplu π^+) se folosesc soluțiile de energie pozitivă ale ecuațiilor ce descriu interacția acestora (π^+), iar *amplitudinile* se calculează pe baza regulilor obișnuite din mecanica cuantică. La descrierea proceselor fizice implicând antiparticule (π^-) putem alege, fie folosim soluțiile de energie pozitivă ale ecuațiilor ce descriu interacțiile π^- și urmăm regulile obișnuite, fie legăm procesele fizice ale π^- cu procesele nefizice date de soluțiile de energie negativă ale π^+ , iar *elementele de matrice*, pentru procesele cu π^- , se vor calcula cu ajutorul proceselor inverse ale π^+ , folosind soluțiile de energie negativă ale ecuațiilor pentru π^+ . Cea de a doua metodă poate fi folosită deoarece teoria face apel la *funcția de câmp uni-particulă* (cu o sarcină), pentru care mecanica cuantică obișnuită este utilizabilă, și care poate fi utilizată pentru a descrie stări multiparticulă, cum ar fi de exemplu producerea de perechi $\pi^+ \pi^-$.

Care este însă situația cu particulele care sunt propriile antiparticule, cum ar fi π^0 ? În acest caz vom trata asemenea particule în mod similar cu procedura folosită pentru foton (γ este identică cu antiparticula proprie). Cu alte cuvinte, vom asocia *funcția de câmp* $\exp(-ip \cdot x)$ cu particula incidentă (π^0) de energie pozitivă, iar *funcția de câmp* $\exp(+ip \cdot x)$ cu particula emergentă (π^0) de energie pozitivă.

1.3 Teoria perturbațiilor în mecanica cuantică

- Funcția de undă plană ca soluție a ecuațiilor de mișcare de particulă liberă cu energia E_n și impulsul \vec{p}_n :

$$\psi_n(\vec{x}, t) = a_n e^{i(\vec{p}_n \cdot \vec{x} - E_n t)/\hbar} = c_n \phi_n(\vec{x}) e^{-i E_n t/\hbar} \quad (1.3)$$

- Componenta independentă de timp $\phi_n(\vec{x})$, satisface ecuația Schrödinger staționară:

$$\hat{H}_0 \phi_n(\vec{x}) = E_n \phi_n(\vec{x}) \quad (1.4)$$

și condițiile de normare

$$\int_V \phi_m^*(\vec{x}) \phi_n(\vec{x}) d^3x = \delta_{mn} \quad \text{sau} \quad \langle \phi_m | \phi_n \rangle = \delta_{mn} \quad (1.5)$$

\hat{H}_0 este hamiltonianul de particulă liberă (neperturbat), independent de timp.

În absența perturbației, evoluția în timp a sistemului este dată de (1.3), iar probabilitatea de a găsi sistemul în starea ψ_n , este aceeași la orice moment de timp:

$$P_n(t) = |\psi_n(\vec{x}, t)|^2 = |c_n \phi_n(\vec{x}) e^{-i E_n t/\hbar}|^2 = |c_n|^2 = P_n(t_0) \quad (1.6)$$

deoarece stările proprii staționare $\phi_n(\vec{x})$ ale hamiltonianului neperturbat \hat{H}_0 (1.4) sunt ortonormate (1.5) $|\phi_n(\vec{x})|^2 = 1$.

Deci, în absența perturbației ($V = 0$), probabilitatea de a găsi sistemul în starea $\psi_n(\vec{x}, t)$ la momentul t este exact aceeași ca cea de a găsi sistemul în starea inițială (la t_0).

- Dacă însă avem o perturbație ($V \neq 0$), ne așteptăm ca $P_n(t)$ să difere, să varieze în timp, adică să avem $c_n \rightarrow c_n(t)$. Astfel, putem scrie:

$$\psi_n(\vec{x}, t) = c_n(t) \phi_n(\vec{x}) e^{-i E_n t/\hbar} \quad (1.7)$$

iar probabilitatea de ocupare a stării ψ_n este $P_n(t) = |c_n(t)|^2$

Aici, în dependența de timp, am separat oscilația rapidă de fază $e^{-i E_n t/\hbar}$ a stărilor proprii depinzând de hamiltonian-ul neperturbat, de variația lentă a amplitudinilor $c_n(t)$, care depind doar de perturbație (c_n este constantă dacă $V = 0$).

- Amplitudinea unei parțiale $c_f(t)$ de probabilitate de a găsi sistemul în starea $\psi_f(\vec{x}, t)$ pentru $n = f$ în (1.7), este interpretată ca amplitudinea de tranziție $i \rightarrow f$

$$T_{if}(t) = c_f(t) \quad (1.8)$$

- Scopul urmărit este cel de obținere a soluției $\psi(\vec{x}, t)$ a ecuației de câmp. Fie aceasta, *ecuația Schrödinger dependentă de timp*, cu perturbația $V(\vec{x}, t)$.

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = [\hat{H}_0 + \hat{V}(\vec{x}, t)] \psi(\vec{x}, t)} \quad (1.9)$$

pentru o particulă ce se mișcă sub influența unui potențial de interacție $V(\vec{x}, t)$.

- Soluțiile ecuației (1.9) se caută ca dezvoltări (superpoziții) de unde plane (particule libere) (1.3), folosind metoda variației constantelor ($c_n \rightarrow c_n(t)$), sub forma,

$$\boxed{\psi(\vec{x}, t) = \sum_n c_n(t) \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t/\hbar}} \quad (1.10)$$

- Acum, pentru a determina amplitudinea undelor parțiale $c_n(t)$, vom substitui (1.10) în ecuația Schrödinger (1.9),

$$\begin{aligned} i\hbar \sum_n \left(\frac{dc_n}{dt} \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t/\hbar} - \frac{i}{\hbar} E_n c_n(t) \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t/\hbar} \right) \\ = \left[\hat{H}_0 + \hat{V}(\vec{x}, t) \right] \sum_n c_n(t) \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t/\hbar} \end{aligned}$$

unde, folosind ecuația (1.4) $\hat{H}_0 \phi_n(\vec{x}) = E_n \phi_n(\vec{x})$, obținem

$$\boxed{i\hbar \sum_n \frac{dc_n}{dt} \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t/\hbar} = \sum_n \hat{V}(\vec{x}, t) c_n(t) \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t/\hbar}}$$

- Pentru a afla toate amplitudinile necunoscute $c_m(t)$ ale undelor parțiale de particulă liberă $\phi_m(\vec{x})$ din dezvoltarea (1.10), proiectăm ecuația pe fiecare stare $\phi_m(\vec{x})$, adică înmulțim ecuația cu $\phi_m^*(\vec{x})$ și integrăm pe volum (înmulțim la stânga cu $\langle m|$), folosind relația de normare (1.5) $\langle \phi_m | \phi_n \rangle = \int \phi_m^* \phi_n d^3x = \delta_{mn}$. În acest fel în membrul stâng se separă termenul cu dc_m/dt ,

$$i\hbar \frac{dc_m}{dt} e^{-iE_m t/\hbar} = \sum_n c_n(t) \underbrace{\int \phi_m^*(\vec{x}) \hat{V}(\vec{x}, t) \phi_n(\vec{x}) d^3x}_{V_{mn}(t)} e^{-iE_n t/\hbar}$$

unde elementul de matrice este definit ca:

$$V_{mn}(t) = \int \phi_m^*(\vec{x}) \hat{V}(\vec{x}, t) \phi_n(\vec{x}) d^3x \quad \text{sau} \quad V_{mn}(t) = \langle m | \hat{V}(\vec{x}, t) | n \rangle \quad (1.11)$$

astfel obținem următorul set de *ecuații diferențiale lineare cuplate* pentru *amplitudinile parțiale* c_m :

$$\boxed{\frac{dc_m}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \sum_n c_n(t) V_{mn}(t) e^{i(E_m - E_n)t/\hbar}} \quad (1.12)$$

sau dacă notăm

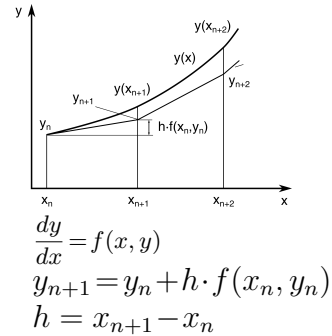
$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$$

avem sistemul de ecuații diferențiale cuplate (1.12) explicit sub forma

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \dot{c}_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = -\frac{i}{\hbar} \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12}e^{i\omega_{12}t} & V_{13}e^{i\omega_{13}t} & \cdots \\ V_{21}e^{i\omega_{21}t} & V_{22} & V_{23}e^{i\omega_{23}t} & \cdots \\ V_{31}e^{i\omega_{31}t} & V_{32}e^{i\omega_{32}t} & V_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Acesta este sistemul de bază de ecuații diferențiale cuplate care trebuie rezolvat pentru a obține probabilitatea $|c_m(t)|^2$ de a afla starea $\psi_m(\vec{x}, t)$, în funcție de t .

- De remarcat că ecuația (1.12) este una exactă, deoarece nu am făcut nici o aproximație în obținerea acesteia. Prin specificarea valorilor inițiale $c_n(t)$, putem în principiu integra exact sistemul de ecuații diferențiale (1.13). Acesta este ușor de rezolvat pentru cazul particular al unui sistem cu două nivele de energie (adică $n = 2$).
- Din nefericire nu putem afla o soluție generală a acestui sistem de ecuații diferențiale, astfel că trebuie să apelăm la soluții aproximative. Substituind iterativ o soluție aproximativă $c_m^{(i)}(t)$, în aceeași ecuație (1.12), în locul lui $c_n(t)$ din membrul drept (oarecum similar metodei Euler de rezolvare a ecuațiilor diferențiale de tip $dy/dx = f(x, y)$ vezi Figura alăturată), obținem o nouă soluție $c_m^{(i+1)}(t)$, astfel că la final soluția va fi:
- Prin integrarea ecuației (1.12) soluția se poate scrie:



$$\boxed{c_m(t) = c_m(t_0) - \frac{i}{\hbar} \sum_n \int_{t_0}^t c_n(t') V_{mn}(t') e^{i(E_m - E_n)t'/\hbar} dt'} \quad (1.14)$$

- Substituind iterativ soluția $c_m^{(i)}(t)$, în aceeași ecuație, în locul $c_n(t')$ din membrul drept obținem o nouă soluție $c_m^{(i+1)}(t)$, astfel că la final soluția va fi:

$$\boxed{c_m(t) = c_m^{(0)} + c_m^{(1)} + c_m^{(2)} + \dots} \quad (1.15)$$

unde soluția după iterația (i) se va putea scrie

$$c_m^{(i)} = -\frac{i}{\hbar} \sum_n \int_{t_0}^t c_n^{(i-1)}(t') V_{mn}(t') e^{i(E_m - E_n)t'/\hbar} dt' \quad (1.16)$$

1.4 Aproximații succesive în calculul amplitudinii undelor parțiale

Pentru a putea determina în final probabilitățile de tranziție între diversele stări posibile (cuantificate), va trebui să evaluăm întâi amplitudinile $c_n(t)$ ale stărilor de undă neperturbate ϕ_n : $\psi_n(t) = c_n(t) \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t/\hbar}$ (1.7) și implicit starea finală $\psi_f(t)$.

- Probabilitatea de ocupare a stării finale ϕ_f poate fi dezvoltată în serie perturbativă

$$P_f(t) = |c_f(t)|^2 = \left| \delta_{fi} + c_f^{(1)} + c_f^{(2)} + \dots \right|^2 \quad (1.17)$$

De notat, că prin ridicarea la pătrat apar și termeni încrucișați, adică avem interferență între amplitudinile de diferite ordine.

- Presupunem că starea finală diferă de cea inițială, de aceea studiem cazurile în care $f \neq i$, astfel că primul termen din relația (1.17) se anulează.

1.4.1 Starea inițială - o singură stare neperturbată de undă plană

Soluțiile în aproximația de ordin zero

Pentru aflarea amplitudinilor $c_n(t)$, facem integrarea ecuației (1.12), pornind cu diverse condiții inițiale.

- Una din cele mai des întâlnite situații este cea conform căreia la momentul inițial $t = t_0$, înainte ca potențialul perturbator \tilde{V} să intre în acțiune, particula era într-una din stările neperturbate $\psi_i(x)$ de undă plană (1.3).
- Amplitudinile undelor parțiale la momentul inițial t_0 specifică condiția inițială:
$$\begin{cases} c_i(t_0) = 1 \\ c_n(t_0) = 0 \text{ pentru } n \neq i \end{cases} \quad (1.18)$$
- In absența perturbațiilor, adică $V_{mn}(t') = 0$ în (1.14), are loc propagarea liberă a undei plane inițiale $\psi_i(\vec{x}, t) = c_i(t) \phi_i(\vec{x}) e^{-iE_i t/\hbar}$ conform (1.7).

Din descrierea generală (1.14) a propagării în timp a amplitudinii $c_m(t)$, în aproximația de ordin zero (absența perturbației) aceasta este constantă, adică egală cu amplitudinea inițială $c_i(t_0)$. Deci, și amplitudinea finală în aproximația de ordin zero $c_f^{(0)}(t)$, la orice moment t , este egală cu cea la momentul t_0 (vezi Figura 1.3),

$$\boxed{c_f^{(0)}(t) = c_i(t_0) = \delta_{if}} \quad (1.19)$$

ce constituie soluția de amplitudini parțiale în aproximația de ordin zero (vezi Fig.1.3).

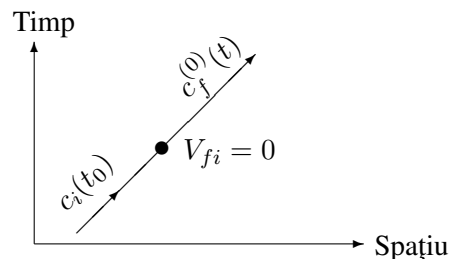


Figura 1.3: Propagarea undelor în cazul unei perturbații de ordin zero la tranziția $i \rightarrow f$

Soluțiile în aproximația de ordin întâi

Introducând acum soluția din aproximația de ordin zero (1.19) $c_i^{(0)}(t) = c_i(t_0)$ în ecuația (1.12), se separă doar termenul cu $n = i$ (celelalte amplitudini $c_n(t) = 0$ pentru $n \neq i$). Ecuația (1.12) pentru amplitudinea de probabilitate $c_f^{(1)}$ de stări finale ψ_f cu o singură stare inițială $c_i(t_0) = 1$, în primă aproximație, devine:

$$\frac{dc_f^{(1)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} c_i^{(0)}(t) V_{fi}(t) e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} \quad (1.20)$$

care prin integrare ne dă amplitudinea $c_f^{(1)}(t)$ în aproximația de ordin întâi.

$$c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t c_i^{(0)}(t') V_{fi}(t') e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} dt'$$

- In prezența perturbației, se schimbă propagarea undei plane inițiale ψ_i . Are loc o tranziție pe o altă stare ψ_f . Starea finală devine $\psi_f(t) = c_f^{(1)}(t) \phi_f(\vec{x}) e^{-iE_f t/\hbar}$ cu amplitudinea

$$c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_{fi}(t') e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} dt' \quad (1.21)$$

SAU

$$c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \int \overbrace{\phi_f^*(\vec{x}) \hat{V}(\vec{x}, t') \phi_i(\vec{x})}^{V_{fi}(t')} d^3x \times e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} dt' \quad (1.22)$$

SAU

$$c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \langle f | \hat{V}(\vec{x}, t') | i \rangle e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} dt' \quad (1.23)$$

SAU

$$c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \int \underbrace{[\phi_f(\vec{x}) e^{-iE_f t'/\hbar}]^*}_{\psi_f^*(x)} \hat{V}(\vec{x}, t') \underbrace{[\phi_i(\vec{x}) e^{-iE_i t'/\hbar}]}_{\psi_i(x)} d^3x dt' \quad (1.24)$$

SAU sub formă covariantă, 4-dimensională

$$c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int \psi_f^*(x) \hat{V}(x) \psi_i(x) d^4x \quad (1.25)$$

Soluțiile în aproximația de ordin doi

Similar cu cazul anterior (1.20), ecuația în aproximația de ordin doi se poate scrie:

$$\frac{dc_f^{(2)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} c_n^{(1)}(t) V_{fn}(t) e^{i(E_f - E_n)t/\hbar} \quad (1.26)$$

prin integrare, *amplitudinea în aproximația de ordin doi* $c_f^{(2)}(t)$ se exprimă cu ajutorul soluției din aproximația anterioară $c_n^{(1)}(t)$ (1.21), adică

$$c_f^{(2)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t c_n^{(1)}(t') V_{fn}(t') e^{i(E_f - E_n)t'/\hbar} dt' \quad (1.27)$$

unde
$$c_n^{(1)}(t') = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} c_i^{(0)}(t'') V_{ni}(t'') e^{i(E_n - E_i)t''/\hbar} dt'' \quad (1.28)$$

In cazul în care avem o singură stare inițială, atunci $c_i^{(0)}(t) = 1$,

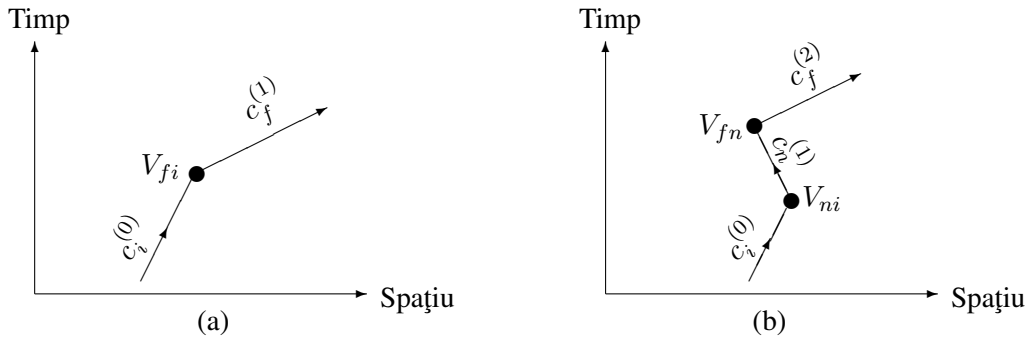


Figura 1.4: Propagarea stărilor de câmp în cazul unor perturbații (a) V_{fi} de ordin I (1.21) și (b) V_{fn} (1.27), V_{ni} (1.28) de ordin II la tranziția $i \rightarrow f$

Soluțiile în aproximația de ordin trei

- Similar cu sistemul de ecuații pentru amplitudinile undelor parțiale în aproximația de ordin doi (1.27) - (1.28), putem scrie ecuațiile pentru amplitudinile în aproximația trei:

$$c_f^{(3)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t c_m^{(2)}(t') V_{fm}(t') e^{i(E_f - E_m)t'/\hbar} dt' \quad (1.29)$$

unde

$$c_m^{(2)}(t') = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} c_n^{(1)}(t'') V_{mn}(t'') e^{i(E_m - E_n)t''/\hbar} dt'' \quad (1.30)$$

unde

$$c_n^{(1)}(t'') = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t''} c_i^{(0)}(t''') V_{ni}(t''') e^{i(E_n - E_i)t'''/\hbar} dt''' \quad (1.31)$$

unde $c_i^{(0)}(t) = c_i(t_0) = 1$ (o singură stare inițială)

iar

$$V_{mn}(t) = \int \phi_m^*(\vec{x}) \hat{V}(\vec{x}, t) \phi_n(\vec{x})$$

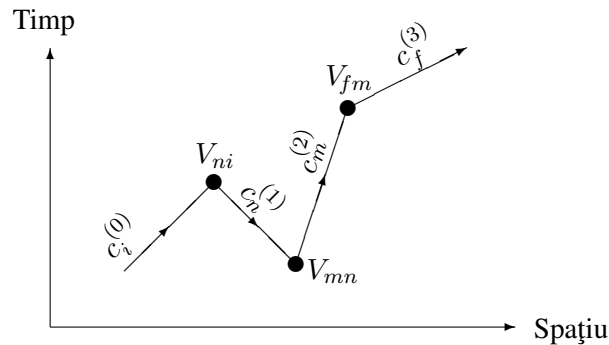


Figura 1.5: Propagarea stărilor de câmp în cazul unor perturbații V_{fm} (1.29), V_{mn} (1.30) și V_{ni} (1.31) de ordin III la tranziția $i \rightarrow f$

1.4.2 Starea inițială - superpoziție de stări neperturbate de undă plană

- Până acum am considerat doar o singură stare inițială $\psi_i(x)$ (1.3) de amplitudine nenulă $c_i^{(0)}(t_0) = 1$ (1.18), drept condiție inițială în integrarea sistemului de ecuații diferențiale (1.12).

$$\boxed{\frac{dc_n^{(1)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \sum_i c_i^{(0)}(t) V_{ni}(t) e^{i(E_n - E_i)t/\hbar}} \quad (1.32)$$

În cazul în care folosim alte condiții inițiale, în integrarea ecuației (1.12) va trebui să luăm în considerare superpoziția tuturor amplitudinilor undelor parțiale $c_i^{(0)}(t)$, astfel că soluția generală pentru amplitudinea de tranziție $c_n^{(1)}(t)$ în starea finală ψ_n , va fi o sumă după toate amplitudinile inițiale $c_i^{(0)}$ similare (1.21), adică

$$\boxed{c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_i \int_{t_0}^t c_i^{(0)}(t') V_{fi}(t') e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} dt'} \quad (1.33)$$

- La fel, putem îmbunătăți aproximația de ordin întâi (1.21) prin înlocuirea în (1.33) $c_i^{(0)}(t)$ cu $c_n^{(1)}(t)$ în membrul drept al ecuației (1.32), iar amplitudinea $c_f^{(2)}(t)$ în aproximația de ordin doi, devine

$$c_f^{(2)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_n \int_{t_0}^t c_n^{(1)}(t') V_{fn}(t') e^{i(E_f - E_n)t'/\hbar} dt' \quad (1.34)$$

unde

$$c_n^{(1)}(t') = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} c_i^{(0)}(t'') V_{ni}(t'') e^{i(E_n - E_i)t''/\hbar} dt'' \quad (1.35)$$

Cu o stare inițială de amplitudine $c_i^{(0)}(t) = 1$ și amplitudinea în aproximația întâi (1.21)

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_{ni}(t') e^{i(E_n - E_i)t'/\hbar} dt'$$

amplitudinea $c_f^{(2)}$ a stării finale, cu $V_{ni} \sim \text{const}$ și $V_{fn} \sim \text{const}$, în aproximația de ordin doi este:

$$\boxed{c_f^{(2)}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{n \neq i} V_{fn} V_{ni} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E_f - E_n)t/\hbar} dt \int_{-\infty}^t e^{i(E_n - E_i)t'/\hbar} dt'} \quad (1.36)$$

- Pentru a face ca integrala după dt' să aibe sens fizic, trebuie să introducem un nou termen în exponent, sub forma unei mărimi mici pozitive ϵ , pe care apoi o facem să tindă la zero, după integrare

$$\int_{-\infty}^t e^{i(E_n - E_i - i\epsilon)t'/\hbar} dt' = i\hbar \frac{e^{i(E_n - E_i - i\epsilon)t/\hbar}}{E_i - E_n + i\epsilon}$$

- Folosind legătura cu funcția δ (vezi Anexa):
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E_f - E_n)t} e^{i(E_n - E_i)t} dt = 2\pi\delta(E_f - E_i)$$
 corecțiile de ordin doi pentru $c_f^{(2)}$ vor fi

$$c_f^{(2)}(t) = -\frac{2\pi i}{\hbar^2} \sum_{n \neq i} \frac{V_{fn} V_{ni}}{E_i - E_n + i\epsilon} \delta(E_f - E_i) \quad (1.37)$$

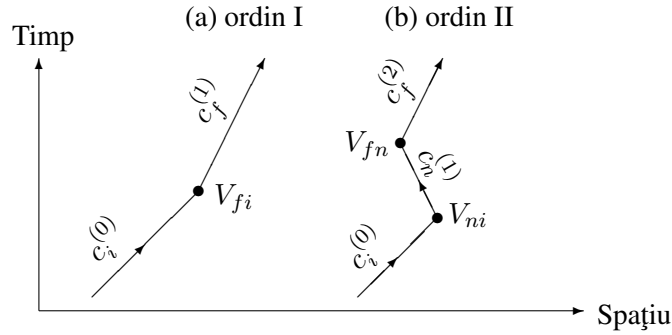


Figura 1.6: Propagarea stărilor de câmp în cazul unor perturbații V_{fi} (1.33) de ordin I și V_{fn} (1.34) și V_{ni} (1.35) de ordin II la tranziția $i \rightarrow f$

- Rata tranziției $i \rightarrow f$ în aproximația de ordin doi se obține prin înlocuirea

$$V_{fi} \rightarrow V_{fi} + \sum_{n \neq i} V_{fn} \left(\frac{1}{E_i - E_n + i\epsilon} V_{ni} \right) + \dots \quad (1.38)$$

Similar se obțin corecțiile de ordin superior.

$$\sum_{\substack{n \neq i \\ m \neq n}} V_{fn} \left(\frac{1}{E_m - E_n + i\epsilon} V_{nm} \right) \left(\frac{1}{E_i - E_m + i\epsilon} V_{mi} \right)$$

- Ecuația (1.38) reprezintă dezvoltarea amplitudinii în serie de perturbații, cu termeni de ordin întâi, doi, ..., în V . Diagramele din Figura 1.6 reprezintă primii doi termeni din seria de perturbații.
- Pentru fiecare vertex de interacție, avem un factor V_{ni} , și pentru propagarea fiecărei stări intermediare, avem un factor de "propagare" $1/(E_i - E_n)$. Stările intermediare sunt "virtuale", în sensul că energia nu se conservă, $E_n \neq E_i$, însă avem evident o conservare a energiei între stările inițiale și cele finale, $E_f = E_i$, după cum indică funcția delta $\delta(E_f - E_i)$. Problema centrală este generalizarea acestei scheme pentru a putea descrie și particulele relativiste, inclusiv antiparticulele.

1.5 Aplicații

1.5.1 Amplitudinea de tranziție

Cu ajutorul amplitudinii de tranziție $T_{fi}(t)$ (1.8) putem calcula probabilitatea de tranziție. Dar într-un interval limitat de timp între t și $t + dt$, această probabilitate de ocupare a stării ϕ_f ar trebui să crească linear cu timpul, chiar dacă V este constant în timp. De aceea, luăm cazul în care potențialul $V(\vec{x}, t) = V(\vec{x})$ este independent de timp, iar integrarea se face după timp de la $-\infty$ la $+\infty$. Atunci (1.21) poate fi scris sub forma

$$c_f^{(1)}(t) \equiv T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} V_{fi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} dt'}_{2\pi\delta(E_f - E_i)/\hbar} = -2\pi i V_{fi} \delta(E_f - E_i) \quad (1.39)$$

unde am folosit: $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{a}$ cu $x = E_f - E_i$ și $\alpha = \frac{1}{\hbar}$

1.5.2 Electrodinamica particulelor încărcate nerelativiste

O aplicație importantă este cazul unui potențial perturbator de natură electromagnetică, ce oscilează în timp.

Ecuția Schrödinger este: $\hat{H}\psi(\vec{x}, t) = \hat{E}\psi(\vec{x}, t)$

Cu Hamiltonianul pentru o particulă încărcată q de spin zero (??), în prezența unui câmp electromagnetic descris prin potențialul vector $\vec{A}(\vec{x}, t)$,

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m}$$

unde pentru cuantificare se face trecerea la operatori: $\begin{cases} \hat{p} = -i\hbar\nabla \\ \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \end{cases}$ obținem

$$\frac{1}{2m} \left(-i\hbar\hat{\nabla} - q\hat{A} \right)^2 \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial\psi(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad \text{iar în Calibrarea Coulomb } (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{iq\hbar}{2m} \left(\underbrace{\hat{\nabla} \cdot \hat{A}}_{=0} + \hat{A} \cdot \hat{\nabla} \right) + \frac{q^2}{2m} \vec{A}^2 \right] \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial\psi(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (1.40)$$

In aproximația de ordin I, termenul pătratic \vec{A}^2 cu $q^2/(2mc^2)$ poate fi neglijat, astfel că operatorul de perturbație este

$$\hat{V}(\vec{x}, t) = \frac{iq\hbar}{m} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \quad (1.41)$$

Potențialul vector $\vec{A}(\vec{x}, t)$ satisface ecuația undelor (vezi Anexa ??)

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.42)$$

pentru care soluția este

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + \vec{A}_0^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (1.43)$$

reprezentând un potențial real, cu vector de propagare \vec{k} și pulsație ω ($\omega = c|\vec{k}|$).

De remarcat că relația $A(\mathbf{x}, t)$ (1.43) conține un termen cu $e^{-i\omega t}$ plus un termen cu $e^{+i\omega t}$. Atunci, din (1.21) amplitudinea de tranziție $i \rightarrow f$, în cazul aproximației de prim ordin în $V(\mathbf{x}, t)$, va fi

$$c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_{fi}(t') e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} dt' \quad (1.21)$$

$$\text{unde } V_{fi}(t) = \int \phi_f^*(\vec{x}) \hat{V}(\vec{x}, t) \phi_i(\vec{x}) d^3x$$

$$\text{în acest caz cu (1.41) } \hat{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{iq\hbar}{m} \vec{A} \cdot \vec{\nabla}$$

$$\text{și (1.43) } \vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + \vec{A}_0^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$\text{potențialul perturbator este } V_{fi}(t) = e^{-i\omega t} H_{fi} + e^{i\omega t} H'_{fi} \quad (1.44)$$

$$\text{unde componentele independente de timp: } \left\{ \begin{array}{l} H_{fi} = \int \phi_f^*(\vec{x}) \left(e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{iq\hbar}{m} \vec{A}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \phi_i(\vec{x}) d^3x \\ H'_{fi} = \int \phi_f^*(\vec{x}) \left(e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{iq\hbar}{m} \vec{A}_0^* \cdot \vec{\nabla} \right) \phi_i(\vec{x}) d^3x \end{array} \right.$$

Inlocuind (1.44) în (1.21) și alegând $t_0 = 0$ obținem amplitudinea de tranziție în aproximația de ordin I:

$$\begin{aligned} c_f^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \left(H_{fi} e^{-i\omega t'} + H'_{fi} e^{i\omega t'} \right) e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} dt' \\ &= -\frac{i}{\hbar} H_{fi} \frac{e^{i(E_f - E_i - \omega)t/\hbar}}{(E_f - E_i)/\hbar - \omega} - \frac{i}{\hbar} H'_{fi} \frac{e^{i(E_f - E_i + \omega)t/\hbar}}{(E_f - E_i)/\hbar + \omega} \end{aligned} \quad (1.45)$$

Probabilitatea de tranziție $|c_f^{(1)}(t)|^2$ va fi considerabilă

$$\begin{aligned} \text{fie în cazul } (E_f - E_i)/\hbar \approx \omega, & \quad \text{adică } E_f \approx E_i + \hbar\omega \\ \text{fie în cel } (E_f - E_i)/\hbar \approx -\omega, & \quad \text{adică } E_f \approx E_i - \hbar\omega \end{aligned} \quad (1.46)$$

În primul caz, energia stării finale este $\hbar\omega$ mai mare ca cea a stării inițiale; în acest caz spunem că s-a absorbit o cantă de energie $\hbar\omega$. În al doilea caz, energia stării finale este $\hbar\omega$ mai mică ca cea a stării inițiale; caz în care spunem că o cantă de energie $\hbar\omega$ a fost emisă.

Deci, de remarcat că partea $e^{-i\omega t}$ din potențial este asociată cu absorbția unei cuante de energie $\hbar\omega$, în timp ce partea $e^{+i\omega t}$ din potențial este asociată cu emisia unei cuante de energie $\hbar\omega$. Acestea sunt cuante ale câmpului electromagnetic, adică fotoni, iar cazurile amintite mai sus reprezintă absorbția și emisia de fotoni de energie $\hbar\omega$.

1.5.3 Electrodinamica particulelor relativiste de spin zero

- In electrodinamica clasică, mișcarea unei particule de sarcină q într-un potențial electromagnetic A^μ , se obține prin substituția:
$$p^\mu \longrightarrow p^\mu - qA^\mu \quad (1.47)$$

- Trecerea la mecanica cuantică se face apoi cu trecerea la operatorii covarianți $\partial^\mu \rightarrow D^\mu$
$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar\partial^\mu \longrightarrow i\hbar\partial^\mu - qA^\mu \text{ sau} \\ \partial^\mu \longrightarrow \partial^\mu + \frac{i}{\hbar}qA^\mu \\ \text{\texttt{și similar}} \\ \partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu + \frac{i}{\hbar}qA_\mu \end{array} \right. \quad (1.48)$$

- Atunci, pentru a descrie interacția unei particule relativiste de spin 0 cu un câmp electromagnetic, în **ecuația Klein-Gordon** pentru o particulă liberă (vezi Tabel pag.5)
$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \quad (1.49)$$

- facem înlocuirea (1.48) în (1.49), astfel obținem **Ecuația Klein-Gordon pentru o particulă în câmp EM**
$$\left[\left(\partial_\mu + \frac{i}{\hbar}qA_\mu \right) \left(\partial^\mu + \frac{i}{\hbar}qA^\mu \right) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right] \psi = 0 \quad (1.50)$$

dezvoltăm (1.50):

$$\left[\partial_\mu\partial^\mu + \frac{i}{\hbar}q\partial_\mu A^\mu + \frac{i}{\hbar}qA_\mu\partial^\mu - \frac{q^2}{\hbar^2}A_\mu A^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right] \psi = 0$$

separăm partea K-G de particulă liberă în membrul stâng, iar în membrul drept separăm partea de interacție, unde evidențiem A^μ prin o dublă transformare *covariant* \leftrightarrow *contravariant* $A_\mu\partial^\mu \leftrightarrow A^\mu\partial_\mu$,

$$\left[\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right] \psi = \underbrace{\left[-\frac{i}{\hbar}q\left(\partial_\mu A^\mu + \underbrace{A_\mu\partial^\mu}_{A^\mu\partial_\mu} \right) + \frac{q^2}{\hbar^2}A_\mu A^\mu \right]}_{-\hat{V}} \psi \equiv -\hat{V}\psi$$

unde operatorul potențial de interacție este

$$\hat{V}(x) = \frac{i}{\hbar}q\left(\partial_\mu A^\mu + A^\mu\partial_\mu \right) - \frac{q^2}{\hbar^2}A_\mu A^\mu \quad (1.51)$$

Semnului lui V s-a ales ca să fie același cu semnul termenului de energie cinetică $\partial_i\partial^i$ ($\partial_\mu\partial^\mu = \partial_0\partial^0 - \partial_i\partial^i$), din ecuația Schrödinger: $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_i\partial^i \right) \psi = (E - V)\psi$

- Potențialul V este caracterizat prin parametrul sarcină electrică q , care prin sarcina elementară e este legat de constanta de structură fină $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$ și care măsoară tăria interacției electromagnetice. Valoarea mică a acestui parametru de cuplaj EM permite dezvoltarea V în serie de puteri ale lui α . De aceea, în primul ordin de dezvoltare în serie de puteri, termenul $q^2A^2 \equiv q^2A_\mu A^\mu$ din V se poate omite.

- Atunci, amplitudinea de tranziție (împrăștiere) (1.25) a unei particule de sarcină q , din starea ψ_i în starea ψ_f pe un potențial electromagnetic A_μ (vezi Fig.1.7) este

$$c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int \psi_f^*(x) \hat{V}(x) \psi_i(x) d^4x$$

$$= -\frac{i}{\hbar^2} \int \psi_f^* i q (\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) \psi_i d^4x$$
(1.52)

- Căutăm să separăm A^μ . Prima derivată ∂_μ din paranteze, ce acționează atât asupra lui A^μ cât și asupra lui ψ_i , poate fi trecută peste A^μ prin integrare prin părți ($\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$), pentru a acționa asupra lui ψ_f^* . Tinem cont că termenul de suprafață este nul, deoarece potențialul se anulează pentru $(|\vec{x}|, t) \rightarrow \pm\infty$. Atunci,

$$\int \psi_f^* \partial_\mu (A^\mu \psi_i) d^4x = - \int (A^\mu \psi_i) \partial_\mu \psi_f^* d^4x$$

- Atunci putem scrie amplitudinea de tranziție $c_f^{(1)}(t) \equiv T_{fi}$ (1.52) cu A^μ separat apoi în dreapta, ca:

$$T_{fi} \equiv c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar^2} \int i q \left[-\partial_\mu \psi_f^* (A^\mu \psi_i) + \psi_f^* A^\mu (\partial_\mu \psi_i) \right] d^4x$$

$$= -\frac{i}{\hbar^2} \int i q \underbrace{\left[\psi_f^* (\partial_\mu \psi_i) - (\partial_\mu \psi_f^*) \psi_i \right]}_{j_\mu^{fi}(x)} A^\mu d^4x$$
(1.53)

unde am identificat un curent de câmp între stările ψ_i și ψ_f :

$$j_\mu^{fi}(x) = i q \left[\psi_f^* (\partial_\mu \psi_i) - (\partial_\mu \psi_f^*) \psi_i \right]$$
(1.54)

iar amplitudinea de tranziție (1.53) este:

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar^2} \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x$$
(1.55)

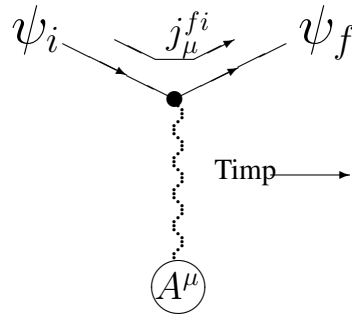


Figura 1.7: Diagrama Feynman de împrăștiere particulă încărcată pe câmp A^μ .

- Dacă mișcarea particulei incidente de 4-impuls p_i și a celei emergente de 4-impuls p_f , este descrisă de undele plane:

$$\psi_i(x) = N_i e^{-i p_i \cdot x}$$

$$\psi_f(x) = N_f e^{-i p_f \cdot x}$$
(1.56)
 unde, N_i și N_f constante de normare
- Curentul de tranziție (1.54) din diagrama Feynman din Figura 1.7 va fi

$$j_\mu^{fi} = q N_i N_f (p_i + p_f)_\mu e^{i(p_f - p_i) \cdot x}$$
(1.57)