

**Procese QED în câmpuri laser intense**  
**tema 22**

M. Penția

June 3, 2021

”Verbum sapienti sat est”

# Cuprins

<b>1</b>	<b>Diagrame Feynman</b>	<b>4</b>
1.1	Tranziții cuantice - teoria perturbațiilor dependente de timp . . . . .	6
1.1.1	Metoda variației constantelor . . . . .	7
1.2	Evaluarea perturbativă a probabilității de tranziție . . . . .	9
1.2.1	Electrodinamica particulelor încărcate relativiste de spin zero	10
1.2.2	Electrodinamica împrăștierii a două particule încărcate . . . . .	12
1.2.3	Imprăștierea "electron-muon" cu spin zero . . . . .	14
1.2.4	Imprăștierea "electron-electron" cu spin zero . . . . .	15
1.2.5	Imprăștierea "electron-pozitron" cu spin zero . . . . .	15

# Capitol 1

## Diagrame Feynman

- Densitatea  $\rho$  și Curentul de câmp  $j$  pentru particule relativiste Klein-Gordon:

$$j^0 \equiv c\rho \quad ; \quad j^{1,2,3} \equiv \vec{j}$$

$$j^\mu = i(\psi^* \partial^\mu \psi - \partial^\mu \psi^* \psi)$$
- Folosind soluțiile de undă plană (particulă liberă) a ecuației K-G:

$$\psi = N e^{-i(E \cdot t - \vec{p} \cdot \vec{x})/\hbar} \equiv N e^{-i p \cdot x/\hbar}$$

$$\psi^* = N^* e^{i(E \cdot t - \vec{p} \cdot \vec{x})/\hbar} \equiv N^* e^{i p \cdot x/\hbar}$$
- Densitatea și curentul de câmp Klein-Gordon de undă plană este:

$$\begin{cases} c\rho = 2 \frac{E}{\hbar} |N|^2 & ; \quad \vec{j} = 2 \frac{\vec{p}}{\hbar} |N|^2 \\ j^\mu = 2 p^\mu |N|^2 / \hbar \end{cases}$$
- dacă  $j^\mu$  e 4-curentul unei particule cu sarcina  $q$ , pentru a obține curentul electromagnetic, se înmulțește cu sarcina  $q$ :

$$j^\mu = q \times 2 p^\mu |N|^2 / \hbar$$
- Curentul electromagnetic de particulă (+e) și antiparticulă (-e):

$$j_{em}^\mu(\pi^+) = (+e) \cdot 2|N|^2 \cdot [ +E, +\vec{p} ] / \hbar \text{ sol. } E > 0, \text{ sarcină } +e$$

$$j_{em}^\mu(\pi^-) = (-e) \cdot 2|N|^2 \cdot [ -E, -\vec{p} ] / \hbar \text{ sol. } E < 0, \text{ sarcină } -e$$
- Adică, emisia (+ $\vec{p}$ ) unei particule ( $E > 0$ ) cu sarcină '+e', este echivalentă cu absorbția (- $\vec{p}$ ) unei antiparticule ( $E < 0$ ) cu sarcină '-e'.
- Atunci, în soluția de particulă liberă  $\exp[-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})]$  putem asocia *energia negativă* (-E), cu soluția ce evoluează invers în timp (-t), deoarece

$$\exp[-i(-E)(-t)] = \exp(-iEt)$$

iar *impulsul negativ* (- $\vec{p}$ ) al unei particule, îl putem asocia cu soluția ce evoluează invers în spațiu (- $\vec{x}$ ), deoarece

$$\exp(i(-\vec{p})(-\vec{x})) = \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x})$$

- Deci, un curent de antiparticule cu energie  $E$  și impuls  $\vec{p}$  este echivalent cu un curent de particule cu energie  $-E$  și impuls  $-\vec{p}$ , care se deplasează invers în spațiu ( $-\vec{x}$ ) și timp ( $-t$ ), deoarece unda plană ce descrie mișcarea lor este aceeași:

$$\psi = \exp \underbrace{\left[ -i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x}) \right]}_{\text{antiparticulă}} = \exp \underbrace{\left[ -i[(-E)(-t) - (-\vec{p}) \cdot (-\vec{x})] \right]}_{\text{particulă}}$$

- Cu alte cuvinte, soluțiile de *particule de energie negativă* evoluând ”invers” în timp, descriu *antiparticule de energie pozitivă* evoluând ”înainte” în timp.

$$\left. \begin{array}{c} \downarrow \pi^+ \\ \downarrow E < 0 \equiv \uparrow \pi^- \\ \uparrow E > 0 \end{array} \right\} \uparrow \text{ timp}$$

În acest fel am găsit o utilizare a soluțiilor de energie negativă (sau în general de 4-impuls negativ) ale ecuației Klein-Gordon pentru pioni  $\pi^+$ , anume ele descriu reacțiile cu pioni  $\pi^-$  de energie pozitivă, având sensul de reacție inversat. De aceea este o pură convenție alegerea ceea ce numim particulă respectiv antiparticulă, în perechea particulă - antiparticulă (cazul  $\pi^\pm$  este opus celui  $e^\mp$  !).

- De exemplu, avem dubla împrăștiere a unui electron pe un potențial, reprezentată sub forma unor diagrame în spațiu-timp, vezi Fig.1.1. Cele două diagrame corespund unuia și aceluiași fenomen fizic.

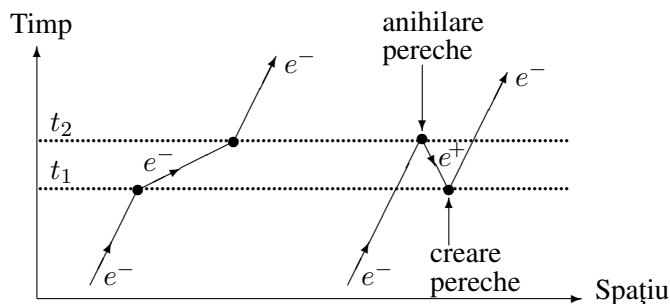


Figura 1.1: Două contribuții la dubla împrăștiere a unui electron, cu ordonări diferite în timp

Deci, avem două ordonări temporale diferite ale celor două împrăștieri ce conduc la unul și același eveniment observabil. Într-adevăr, trebuie notat că traiectoria observabilă a electronului, înainte și după dubla împrăștiere, este aceeași în cele două diagrame. A doua diagramă este posibilă datorită existenței descrierii de antiparticulă: ”La momentul  $t_2$  electronul este împrăștiat ”înăpoi” în timp (având energia  $E < 0$ ). Acest electron evoluând ”înăpoi” în timp este privit ca pozitron (cu  $E > 0$ ), ce merge ”înainte” în timp. Deci, interacțiile prezentate în diagramă pot fi interpretate în felul următor: întâi, la momentul  $t_1$ , se crează o pereche  $e^- e^+$ , apoi la un moment ulterior  $t_2$ ,  $e^+$  este anihilat de electronul inițial  $e^-$ . Ambele împrăștieri duc la același electron din starea finală observabilă, ambele vor trebui incluse în calculul probabilității de interacție. Trebuie de notat că, *vacuum-ul* devine un mediu complex: în care se creează și dispar în permanență perechi  $e^- e^+$ , în general perechi particulă-antiparticulă.

## 1.1 Tranziții cuantice - teoria perturbațiilor dependente de timp

- Evoluția stărilor cuantice de particulă liberă este exprimată ca o funcție de undă plană:

$$\psi_n(\vec{x}, t) = a_n e^{i(\vec{p}_n \cdot \vec{x} - E_n t)/\hbar} = c_n \phi_n(\vec{x}) e^{-i E_n t/\hbar} \quad (1.1)$$

ca soluții ale ecuației de mișcare de particulă liberă, cu energia  $E_n$  și impulsul  $\vec{p}_n$  pentru fiecare stare  $\psi_n(\vec{x}, t)$ :

- Componenta independentă de timp  $\phi_n(\vec{x})$ , satisface ecuația Schrödinger staționară:

$$\hat{H}_0 \phi_n(\vec{x}) = E_n \phi_n(\vec{x}) \quad (1.2)$$

și condițiile de normare

$$\int_V \phi_m^*(\vec{x}) \phi_n(\vec{x}) d^3x = \delta_{mn} \quad \text{sau} \quad \langle \phi_m | \phi_n \rangle = \delta_{mn} \quad (1.3)$$

$\hat{H}_0$  este hamiltonianul de particulă liberă (neperturbat), independent de timp.

- Evoluția stărilor cuantice este dată de ecuațiile de mișcare pentru diverse particule (Schrödinger, Klein-Gordon, Dirac, Proca, etc). ce furnizează funcția de câmp  $\psi(\vec{x}, t)$  corespunzătoare. Fie ecuația Schrödinger dependentă de timp, cu perturbația  $V(\vec{x}, t)$ .

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = [\hat{H}_0 + \hat{V}(\vec{x}, t)] \psi(\vec{x}, t) \quad (1.4)$$

pentru o particulă ce se mișcă sub influența unui potențial de interacție  $V(\vec{x}, t)$ .

- In absența perturbației ( $V = 0$ ), evoluția în timp a sistemului este dată de (1.1), iar probabilitatea de a găsi sistemul în starea  $\psi_n$ , este aceeași la orice moment de timp:

$$P_n(t) = |\psi_n(\vec{x}, t)|^2 = |c_n \phi_n(\vec{x}) e^{-i E_n t/\hbar}|^2 = |c_n|^2 = P_n(t_0) \quad (1.5)$$

deoarece stările proprii staționare  $\phi_n(\vec{x})$  ale hamiltonianului neperturbat  $\hat{H}_0$  (1.2) sunt ortonormate (1.3)  $|\phi_n(\vec{x})|^2 = 1$ .

Deci, în absența perturbației ( $V = 0$ ), probabilitatea de a găsi sistemul în starea  $\psi_n(\vec{x}, t)$  la momentul  $t$  este exact aceeași ca cea de a găsi sistemul în starea inițială (la  $t_0$ ).

- In prezența perturbației ( $V \neq 0$ ), ne așteptăm ca  $P_n(t)$  să difere, să varieze în timp, adică să avem  $c_n \rightarrow c_n(t)$ . Astfel, similar (1.1), putem scrie:

$$\psi_n(\vec{x}, t) = c_n(t) \phi_n(\vec{x}) e^{-i E_n t/\hbar} \quad (1.6)$$

iar probabilitatea de ocupare a stării  $\psi_n$  este  $P_n(t) = |c_n(t)|^2$

Aici, în dependența de timp, am separat oscilația rapidă de fază  $e^{-iE_n t/\hbar}$  a stărilor proprii depinzând de hamiltonian-ul neperturbat, de variația lentă a amplitudinilor  $c_n(t)$ , care depind doar de perturbație ( $c_n$  este constantă dacă  $V=0$ ).

- Soluțiile ecuației (1.4) se caută acum ca o dezvoltare, ca o superpoziție de funcții de undă plană (1.1), folosind metoda variației constantelor ( $c_n \rightarrow c_n(t)$ ), sub forma:

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_n c_n(t) \phi_n(\vec{x}) e^{-i E_n t/\hbar} \quad (1.7)$$

- Amplitudinea unei parțiale  $c_f(t)$  de probabilitate de a găsi sistemul în starea  $\psi_f(\vec{x}, t)$  pentru  $n=f$  în (1.6), este interpretată ca amplitudinea de tranziție  $i \rightarrow f$

$$T_{if}(t) = c_f(t) \quad (1.8)$$

### 1.1.1 Metoda variației constantelor

- Căutăm soluțiile ecuației (1.4) sub forma unor dezvoltări (superpoziții) (1.7) de unde plane (particule libere) (1.1), folosind metoda variației constantelor ( $c_n \rightarrow c_n(t)$ ),
- Pentru a determina amplitudinea undelor parțiale  $c_n(t)$ , vom substitui (1.7) în ecuația Schrödinger (1.4) și obținem:

$$i\hbar \sum_n \frac{dc_n}{dt} \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t/\hbar} = \sum_n \hat{V}(\vec{x}, t) c_n(t) \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t/\hbar}$$

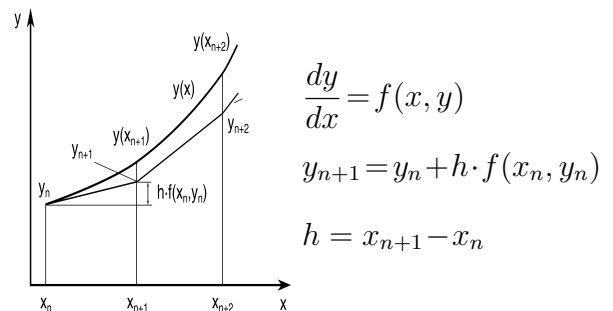
- Pentru a afla toate amplitudinile necunoscute  $c_m(t)$  ale undelor parțiale de particulă liberă  $\phi_m(\vec{x})$  din dezvoltarea (1.7), proiectăm ecuația de mai sus pe fiecare stare  $\phi_m(\vec{x})$ . În acest fel obținem setul de ecuații diferențiale lineare cuplate pentru amplitudinile parțiale  $c_m$ :

$$\frac{dc_m}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \sum_n c_n(t) V_{mn}(t) e^{i(E_m - E_n) t/\hbar} \quad (1.9)$$

unde elementul de matrice este definit ca:

$$V_{mn}(t) = \int \phi_m^*(\vec{x}) \hat{V}(\vec{x}, t) \phi_n(\vec{x}) d^3x \quad \text{sau} \quad V_{mn}(t) = \langle m | \hat{V}(\vec{x}, t) | n \rangle \quad (1.10)$$

- Substituind iterativ o soluție aproximativă  $c_m^{(i)}(t)$ , în aceeași ecuație (1.9), în locul lui  $c_n(t)$  din membrul drept (oarecum similar metodei Euler de rezolvare a ecuațiilor diferențiale de tip  $dy/dx = f(x, y)$  vezi Figura alăturată), obținem o nouă soluție  $c_m^{(i+1)}(t)$ , astfel că la final soluția va fi:



$$c_m(t) = c_m(t_0) - \frac{i}{\hbar} \sum_n \int_{t_0}^t c_n(t') V_{mn}(t') e^{i(E_m - E_n)t'/\hbar} dt' \quad (1.11)$$

- Substituind iterativ soluția  $c_m^{(i)}(t)$ , în aceeași ecuație, în locul  $c_n(t')$  din membrul drept obținem o nouă soluție  $c_m^{(i+1)}(t)$ , astfel că la final soluția va fi:

$$c_m(t) = c_m^{(0)} + c_m^{(1)} + c_m^{(2)} + \dots \quad (1.12)$$

unde soluția după iterația ( $i$ ) este:

$$c_m^{(i)} = -\frac{i}{\hbar} \sum_n \int_{t_0}^t c_n^{(i-1)}(t') V_{mn}(t') e^{i(E_m - E_n)t'/\hbar} dt' \quad (1.13)$$

### Soluțiile în aproximația de ordin întâi

- În absența perturbațiilor, adică  $V_{mn}(t') = 0$  în (1.11), are loc propagarea liberă a unei plane inițiale  $\psi_i(\vec{x}, t) = c_i(t) \phi_i(\vec{x}) e^{-iE_i t/\hbar}$  conform (1.6).

Din descrierea generală (1.11) a propagării amplitudinii  $c_m(t)$ , în aproximația de ordin zero (absența perturbației), conform (1.11), singura amplitudine diferită de zero este  $c_i(t) = c_i(t_0)$ . Deci, amplitudinea în aproximația de ordin zero este:

$$c_m^{(0)}(t) = c_i(t_0) = \delta_{im} \quad (1.14)$$

- Pentru iterația următoare, introducem soluția (1.14) din aproximația zero, în (1.13). Obținem amplitudinea  $c_f^{(1)}$  a stării finale  $\psi_f(t) = c_f^{(1)}(t) \phi_f(\vec{x}) e^{-iE_f t/\hbar}$  numită și amplitudinea de tranziție  $T_{fi}$ , în aproximația I, pornind cu o singură stare inițială  $c_i(t_0) = 1$ ,

$$T_{fi} = c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_{fi}(t') e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} dt' \quad (i \rightarrow f) \quad (1.15)$$

SAU

$$T_{fi} = c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \overbrace{\int \phi_f^*(\vec{x}) \hat{V}(\vec{x}, t') \phi_i(\vec{x}) d^3x}^{V_{fi}(t')} \times e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} dt' \quad (1.16)$$

SAU

$$T_{fi} = c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \langle f | \hat{V}(\vec{x}, t') | i \rangle e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} dt' \quad (1.17)$$

SAU

$$T_{fi} = c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \int \underbrace{[\phi_f^*(\vec{x}) e^{-iE_f t'/\hbar}]^*}_{\psi_f^*(x)} \hat{V}(\vec{x}, t') \underbrace{[\phi_i(\vec{x}) e^{-iE_i t'/\hbar}]}_{\psi_i(x)} d^3x dt' \quad (1.18)$$

SAU sub formă covariantă, 4-dimensională

$$T_{fi} = c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int \psi_f^*(x) \hat{V}(x) \psi_i(x) d^4x \quad (1.19)$$



**Soluțiile în aproximația de ordin doi**

Similar cu cazul anterior, amplitudinea în aproximația de ordin doi  $c_f^{(2)}(t)$  se exprimă cu ajutorul soluției din aproximația anterioară  $c_n^{(1)}(t)$  (1.15), adică

$$T_{fn} = c_f^{(2)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t c_n^{(1)}(t') V_{fn}(t') e^{i(E_f - E_n)t'/\hbar} dt' \quad (n \rightarrow f) \quad (1.20)$$

$$\text{unde} \quad c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} c_i^{(0)}(t'') V_{ni}(t'') e^{i(E_n - E_i)t''/\hbar} dt'' \quad (i \rightarrow n) \quad (1.21)$$

În cazul în care avem o singură stare inițială:  $c_i^{(0)}(t) = 1$ .

**Soluțiile în aproximația de ordin trei**

- Similar cu sistemul de ecuații pentru amplitudinile undelor parțiale în aproximația de ordin doi (1.20) - (1.21), putem scrie ecuațiile pentru amplitudinile în aproximația trei:

$$\text{unde} \quad c_f^{(3)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t c_m^{(2)}(t') V_{fm}(t') e^{i(E_f - E_m)t'/\hbar} dt' \quad (m \rightarrow f) \quad (1.22)$$

$$c_m^{(2)}(t') = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} c_n^{(1)}(t'') V_{mn}(t'') e^{i(E_m - E_n)t''/\hbar} dt'' \quad (n \rightarrow m) \quad (1.23)$$

$$\text{unde} \quad c_n^{(1)}(t'') = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t''} c_i^{(0)}(t''') V_{ni}(t''') e^{i(E_n - E_i)t'''/\hbar} dt''' \quad (i \rightarrow n) \quad (1.24)$$

$$\text{unde} \quad c_i^{(0)}(t) = c_i(t_0) = 1 \quad (\text{o singură stare inițială})$$

$$\text{iar} \quad V_{mn}(t) = \int \phi_m^*(\vec{x}) \hat{V}(\vec{x}, t) \phi_n(\vec{x})$$

**1.2 Evaluarea perturbativă a probabilității de tranziție**

Cu ajutorul amplitudinii de tranziție  $T_{fi}(t)$  (1.8) putem calcula probabilitatea de tranziție. Dar într-un interval limitat de timp între  $t$  și  $t + dt$ , această probabilitate de ocupare a stării  $\phi_f$  ar trebui să crească linear cu timpul, chiar dacă  $V$  este constant în timp. De aceea, luăm cazul în care potențialul  $V(\vec{x}, t) = V(\vec{x})$  este independent de timp, iar integrarea se face după timp de la  $-\infty$  la  $+\infty$ . Atunci (1.15) poate fi scris sub forma

$$c_f^{(1)}(t) \equiv T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} V_{fi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} dt'}_{2\pi\delta(E_f - E_i)/\hbar} = -2\pi i V_{fi} \delta(E_f - E_i) \quad (1.25)$$

$$\text{unde am folosit: } \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{a} \quad \text{cu } x = E_f - E_i \quad \text{\textbf{și}} \quad \alpha = \frac{1}{\hbar}$$

### 1.2.1 Electrodinamica particulelor încărcate relativiste de spin zero

- In electrodinamica clasică, mișcarea unei particule cu sarcina  $q$  într-un potențial electromagnetic  $A^\mu$ , se obține prin substituția:
 
$$p^\mu \longrightarrow p^\mu - qA^\mu \quad (1.26)$$

- Trecerea la mecanica cuantică se face apoi cu trecerea la operatorii covarianți  $\partial^\mu \rightarrow D^\mu$ , adică
 
$$\begin{cases} \partial^\mu \longrightarrow \partial^\mu + \frac{i}{\hbar}qA^\mu \\ \text{\texttt{și similar}} \\ \partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu + \frac{i}{\hbar}qA_\mu \end{cases} \quad (1.27)$$

- Atunci, pentru a descrie interacția unei particule relativiste de spin 0 cu un câmp electromagnetic, în **ecuația Klein-Gordon** pentru o particulă liberă este:
 
$$\left( \partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \quad (1.28)$$

- facem înlocuirea (1.27) în (1.28), astfel obținem **Ecuația Klein-Gordon pentru o particulă în câmp EM**

$$\left[ \left( \partial_\mu + \frac{i}{\hbar}qA_\mu \right) \left( \partial^\mu + \frac{i}{\hbar}qA^\mu \right) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi = 0 \quad (1.29)$$

dezvoltăm (1.29):

$$\left[ \partial_\mu \partial^\mu + \frac{i}{\hbar}q \partial_\mu A^\mu + \frac{i}{\hbar}q A_\mu \partial^\mu - \frac{q^2}{\hbar^2} A_\mu A^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi = 0$$

separăm partea K-G de particulă liberă în membrul stâng, iar în membrul drept separăm partea de interacție, unde evidențiem  $A^\mu$  prin o dublă transformare *covariant*  $\leftrightarrow$  *contravariant*  $A_\mu \partial^\mu \leftrightarrow A^\mu \partial_\mu$ ,

$$\left[ \partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi = \underbrace{\left[ -\frac{i}{\hbar}q \left( \partial_\mu A^\mu + \underbrace{A_\mu \partial^\mu}_{A^\mu \partial_\mu} \right) + \frac{q^2}{\hbar^2} A_\mu A^\mu \right]}_{-\hat{V}} \psi \equiv -\hat{V} \psi$$

unde putem separa operatorul potențial de interacție:

$$\hat{V}(x) = \frac{i}{\hbar}q \left( \partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu \right) - \frac{q^2}{\hbar^2} A_\mu A^\mu \quad (1.30)$$

Semnului lui  $V$  s-a ales ca să fie același cu semnul termenului de energie cinetică  $\partial_i \partial^i$  ( $\partial_\mu \partial^\mu = \partial_0 \partial^0 - \partial_i \partial^i$ ) din ecuația Schrödinger:  $\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \partial^i \right) \psi = (E - V) \psi$

- In aproximația de prim ordin din dezvoltarea în serie de puteri, termenul  $q^2 A^2 \equiv q^2 A_\mu A^\mu$  din  $V$  se poate omite.
- Atunci, amplitudinea de tranziție (împrăștiera) (1.19) a unei particule de sarcină  $q_1$ , din starea  $\psi_i$  în starea  $\psi_f$  pe un potențial electromagnetic  $A_\mu$  (vezi Fig.1.2) este
 
$$\begin{aligned} c_f^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int \psi_f^*(x) \hat{V}(x) \psi_i(x) d^4x \\ &= -\frac{i}{\hbar^2} \int \psi_f^* i q_1 \left( \partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu \right) \psi_i d^4x \end{aligned} \quad (1.31)$$

- Căutăm să separăm  $A^\mu$ . Prima derivată  $\partial_\mu$  din paranteze, ce acționează atât asupra lui  $A^\mu$  cât și asupra lui  $\psi_i$ , poate fi trecută peste  $A^\mu$  prin integrare prin părți ( $\int_a^b u dv = u v|_a^b - \int_a^b v du$ ), pentru a acționa asupra lui  $\psi_f^*$ . Ținem cont că termenul de suprafață este nul, deoarece potențialul se anulează pentru  $(|\vec{x}|, t) \rightarrow \pm\infty$ . Atunci,

$$\int \psi_f^* \partial_\mu (A^\mu \psi_i) d^4x = - \int (A^\mu \psi_i) \partial_\mu \psi_f^* d^4x$$

- Atunci putem scrie amplitudinea de tranziție  $c_f^{(1)}(t) \equiv T_{fi}$  (1.31) cu  $A^\mu$  separat apoi în dreapta, ca:

$$\begin{aligned} T_{fi} \equiv c_f^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar^2} \int i q_1 \left[ -\partial_\mu \psi_f^* (A^\mu \psi_i) + \psi_f^* A^\mu (\partial_\mu \psi_i) \right] d^4x \\ &= -\frac{i}{\hbar^2} \int \underbrace{i q_1 \left[ \psi_f^* (\partial_\mu \psi_i) - (\partial_\mu \psi_f^*) \psi_i \right]}_{j_\mu^{fi}(x)} A^\mu d^4x \end{aligned} \quad (1.32)$$

unde am identificat un curent de câmp între stările  $\psi_i$  și  $\psi_f$ :

$$j_\mu^{fi}(x) = i q_1 \left[ \psi_f^* (\partial_\mu \psi_i) - (\partial_\mu \psi_f^*) \psi_i \right] \quad (1.33)$$

iar amplitudinea de tranziție (1.32) este:

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar^2} \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x \quad (1.34)$$

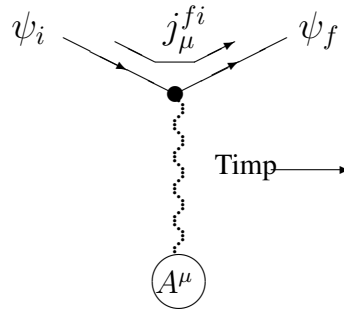


Figura 1.2: Diagrama Feynman de împrăștiere a unei particule încărcate pe un câmp  $A^\mu$ .

- Dacă mișcarea particulei incidente de 4-impuls  $p_i$  și a celei emergente de 4-impuls  $p_f$ , este descrisă de undele plane:

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= N_i e^{-i p_i \cdot x} \\ \psi_f(x) &= N_f e^{-i p_f \cdot x} \end{aligned} \quad (1.35)$$

unde,  $N_i$  și  $N_f$  constante de normare

- Curentul de tranziție (1.33) din diagrama Feynman din Figura 1.2 va fi

$$j_\mu^{fi} = q_1 N_i N_f (p_i + p_f)_\mu e^{i(p_f - p_i) \cdot x} \quad (1.36)$$

### 1.2.2 Electrodinamica împrăștierii a două particule încărcate

- Folosind rezultatul anterior (1.34) al împrăștierii unei particule încărcate pe un potențial electromagnetic  $A^\mu$ , prezentată în Figura 1.2, putem calcula amplitudinea de împrăștiere a aceleiași particule încărcate pe potențialul creat de altă particulă încărcată. Diagrama Feynman pentru această împrăștiere a două particule încărcate este prezentată în Figura 1.3

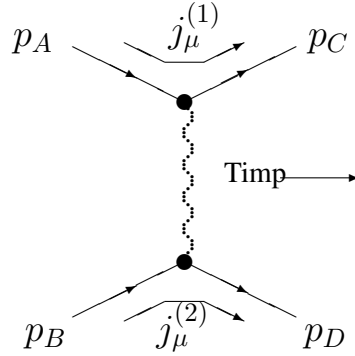


Figura 1.3: Diagrama Feynman de împrăștiere a două particule încărcate.

- Figura 1.3 sugerează abordarea problemei, prin extinderea diagramei Feynman din Figura 1.2, la care trebuie adăugată sursa potențialului  $A^\mu$ , ca produs fiind de a doua sarcină.
- Potențialul  $A^\mu$  este dat de ecuația Maxwell neomogenă  $\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = \mu_0 j^\mu$ , cu sursa dată de curentul  $j_{(2)}^\mu$ . Dacă folosim calibrarea Lorenz  $\partial_\nu A^\nu = 0$ , avem:
 
$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \mu_0 j_{(2)}^\mu \quad (1.37)$$
- Curentul  $j_{(2)}^\mu$  al sarcinii  $q_2$ , similar  $j_{(1)}^\mu$  (1.36), este:
 
$$j_{(2)}^\mu = q_2 N_B N_D (p_D + p_B)^\mu e^{i(p_D - p_B) \cdot x} \quad (1.38)$$

4-impulsurile  $p_A, p_B, p_C, p_D$  sunt indicate în Figura 1.3.

- Câmpul electromagnetic  $A^\mu$ , ca soluție a ecuației Maxwell, este o undă plană:  $A^\mu \sim e^{iq \cdot x}$ , unde  $q$  este 4-impulsul fotonului. Atunci, termenul I din (1.37) este:
 
$$\begin{aligned} \partial_\nu \partial^\nu A^\mu &= \partial_\nu \partial^\nu e^{iq \cdot x} = \\ &= -q^2 e^{iq \cdot x} = -q^2 A^\mu \end{aligned} \quad (1.39)$$
- Atunci din (1.37) avem legătura între câmpul  $A^\mu$  și sursa acestuia  $j_{(2)}^\mu$ :
 
$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} j_{(2)}^\mu \quad \text{unde } q = p_D - p_B \quad (1.40)$$

$q$  - transferul de 4-impuls

- Introducând această soluție în amplitudinea de tranziție (1.34) obținem:

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar^2} \int j_{\mu}^{(1)}(x) \left(-\frac{1}{q^2}\right) j_{(2)}^{\mu}(x) d^4x \quad (1.41)$$

- Folosind curenții  $j_{\mu}^{(1)}$  (1.36) și  $j_{(2)}^{\mu}$  (1.38),

$$\begin{cases} j_{\mu}^{(1)} = q_1 N_A N_C (p_A + p_C)_{\mu} e^{i(p_C - p_A) \cdot x} \\ j_{(2)}^{\mu} = q_2 N_B N_D (p_B + p_D)^{\mu} e^{i(p_D - p_B) \cdot x} \end{cases} \quad (1.42)$$

- Efectuând integrarea după  $x$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p_D + p_C - p_B - p_A) \cdot x} d^4x = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_D + p_C - p_B - p_A) \quad (1.43)$$

- In final, amplitudinea de tranziție (1.41) va fi:

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar^2} N_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_D + p_C - p_B - p_A) \mathcal{M} \quad (1.44)$$

funcția  $\delta$  exprimă conservarea energie-impuls în procesul de împrăștiere a două particule încărcate.

- unde  $\mathcal{M}$  este amplitudinea invariantă

$$\mathcal{M} = \left[ q_1 (p_A + p_C)_{\mu} \right] \left( -\frac{1}{q^2} \right) \left[ q_2 (p_B + p_D)^{\mu} \right] \quad (1.45)$$

- deseori  $\mathcal{M}$  se exprimă ca mărime imaginară:

$$-i\mathcal{M} = \left[ -iq_1 (p_A + p_C)^{\mu} \right] \left( -i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) \left[ -iq_2 (p_B + p_D)^{\nu} \right] \quad (1.46)$$

- Factorii imaginari, cu  $-i$  în (1.46), s-au ales astfel încât să poată fi utilizați și pentru diagramele de ordin superior. A se observa că înmulțirea acestor trei factori dă  $-i$  din membrul întâi  $-i\mathcal{M}$ .

După cum se vede din simetria expresiei amplitudinii invariante (1.45), aceasta este aceeași fie că se consideră particula (1) în câmpul produs de particula (2), fie particula (2) în câmpul particulei (1).

- In concluzie: Am obținut expresia amplitudinii de tranziție (1.46) pentru o particulă (boson) încărcată în interacție cu un câmp electromagnetic (boson), interacție descrisă prin ecuația Klein-Gordon (1.29).

### 1.2.3 Împrăștierea "electron-muon" cu spin zero

- Este interesant a reprezenta aceeași interacție pentru forma invariantă  $\mathcal{M}$  (1.46) a dezvoltării în serie de perturbații a amplitudinii de tranziție pentru particule Klein-Gordon (bosoni) încărcate în interacție cu un câmp electromagnetic (fotoni de spin zero) (1.29).

De exemplu în Figura 1.4 este reprezentată împrăștierea unui "electron" ( $q_1 = -e$ ) fictiv, pe un "muon" ( $q_2 = -e$ ) fictiv, ambii cu spin zero (numiți de aceea fictivi), în aproximația de ordin doi în  $e^2$  (sau  $\alpha$ ), cu amplitudinile date de (1.44) și (1.46). Aceasta este diagrama Feynman de ordinul cel mai scăzut.

- Linia ondulată reprezintă fotonul de 4-impuls  $q$ , de schimb între cei doi "leptoni", cu factorul corespunzător  $-ig_{\mu\nu}/q^2$ , numit *propagator fonic*. Acesta conține indicii Lorenz, deoarece fotonul este o particulă de spin 1. 4-impulsul  $q$  al fotonului respectă legea de conservare a 4-impulsului în punctele de interacție (vertex-uri). Trebuie observat că  $q^2 \neq 0$ , adică nu reprezintă masa fotonului. De aceea spunem că fotonul este virtual sau "off-mass shell" (cel pentru care relația  $q^2 \equiv E^2/c^2 + \vec{p}^2 = m^2c^2$  "on-mass shell" nu este valabilă).
- Vertex-urile conțin întotdeauna factorii de cuplaj. În cazul de față cel electromagnetic  $e$  și un indice de 4-vector, prin care se conectează cu indicele fotonului virtual.
- Ori de câte ori într-o diagramă Feynman apar asemenea vertex-uri conectate la câte o linie internă (aici de foton), factorul corespunzător de conectare va contribui multiplicativ la amplitudinea  $-i\mathcal{M}$  pentru diagrama respectivă.

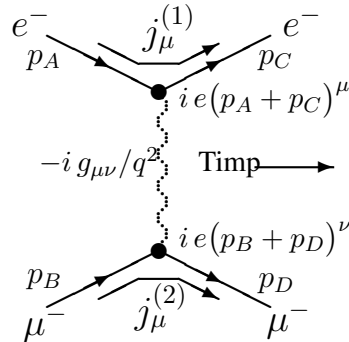


Figura 1.4: Diagrama Feynman de împrăștiere a două particule încărcate cu sarcina  $-e$ .

- Evaluarea diagramei Feynman din Figura 1.4 ne va da amplitudinea invariantă (1.46) pentru împrăștierea "electron-muon" de spin zero și sarcini  $-e$ , cu transferul de 4-impuls  $q = p_D - p_B$ , și sarcinile  $q_1 = -e$ ,  $q_2 = -e$ ,

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M} &= \underbrace{\left[-iq_1(p_A+p_C)^\mu\right]}_{\text{vertex } e^- \gamma} \underbrace{\left(-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right)}_{\text{propagator } \gamma} \underbrace{\left[-iq_2(p_B+p_D)^\nu\right]}_{\text{vertex } \mu^- \gamma} \\
 &= -i \left( -\frac{e^2 (p_A+p_C)_\nu (p_B+p_D)^\nu}{(p_D-p_B)^2} \right)
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

### 1.2.4 Imprăștierea "electron-electron" cu spin zero

- Să trecem la determinarea amplitudinii de împrăștiere de particule identice ("electroni" de spin zero), cu ajutorul diagramelor Feynman. Cum particulele sunt identice, în starea finală particulele sunt interschimbabile, ele pot proveni din oricare din cele două particule inițiale. Adică avem contribuția celor două diagrame Feynman din Figura 1.5.

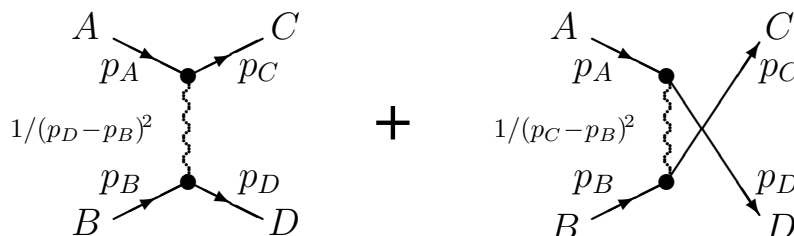


Figura 1.5: Diagrame Feynman de împrăștiere a două particule încărcate identice.

- Nu există posibilități experimentale de a determina dacă electronul  $C$  provine din  $A$  sau  $B$ . De aceea va trebui să adunăm amplitudinile (nu probabilitățile) de tranziție ale celor două posibilități. Astfel, amplitudinea invariantă de împrăștiere a "electronilor" de spin zero, în aproximația de cel mai scăzut ordin, este suma amplitudinilor din diagramele din Figura 1.5.

$$-i\mathcal{M} = -i \left( -\frac{e^2 (p_A + p_C)_\mu (p_B + p_D)^\mu}{(p_D - p_B)^2} - \frac{e^2 (p_A + p_D)_\mu (p_B + p_C)^\mu}{(p_C - p_B)^2} \right) \quad (1.48)$$

### 1.2.5 Imprăștierea "electron-positron" cu spin zero

- În acest caz avem două diagrame Feynman posibile. Deoarece, folosim descrierea în termeni de stări de particulă, stările de antiparticule se va reprezenta cu linii de sens opus particulelor.

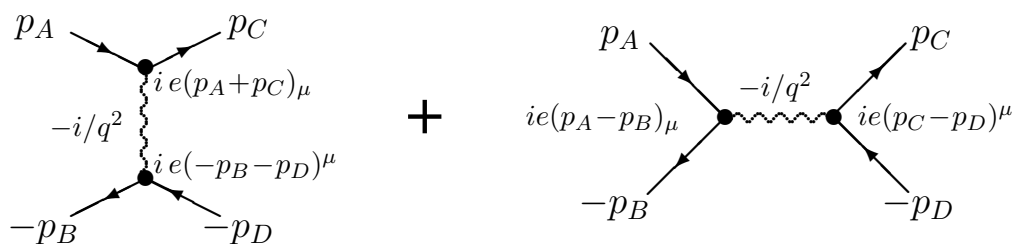


Figura 1.6: Diagrame Feynman de împrăștiere particulă - antiparticulă încărcate.

Amplitudinea de împrăștiere invariantă electron - pozitron conform Figurii 1.6 va fi:

$$-i\mathcal{M} = -i \left( -\frac{e^2 (p_A + p_C)_\mu (-p_B - p_D)^\mu}{(-p_D + p_B)^2} - \frac{e^2 (p_A - p_B)_\mu (-p_D + p_C)^\mu}{(p_C + p_D)^2} \right) \quad (1.49)$$