

Procese QED în câmpuri laser intense
tema 24

M. Penția

June 23, 2021

”Verbum sapienti sat est”

Cuprins

1	Secțiunea eficace cu diagrame Feynman	4
1.1	Diagrame Feynman	4
1.2	Normarea stărilor de undă plană	5
1.3	Stări cuantice finale posibile cinematic	6
1.3.1	Spațiul Fazelor	6
1.4	Secțiunea eficace exprimată prin amplitudinea invariantă	8
1.4.1	Rata de producere stări finale (p_C+p_D)	8
1.4.2	Rata de producere interacții inițiale (p_A+p_B)	9

Capitol 1

Secțiunea eficace cu diagrame Feynman

1.1 Diagrame Feynman

- Evaluarea diagramelor Feynman, ca cea din Figura 1.1 ne da amplitudinea invariantă \mathcal{M} , exprimând dinamica interacției. In cazul de față împrăștierea "electron-muon" de spin zero și sarcini $-e$, cu transferul de 4-impuls $q = p_D - p_B$, și sarcinile $q_1 = -e$, $q_2 = -e$,

$$\begin{aligned}
 -i\mathcal{M} &= \underbrace{\left[-iq_1(p_A+p_C)^\mu\right]}_{\text{vertex } e^-\gamma} \underbrace{\left(-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right)}_{\text{propagator } \gamma} \underbrace{\left[-iq_2(p_B+p_D)^\nu\right]}_{\text{vertex } \mu^-\gamma} \\
 &= -i\left(-\frac{e^2(p_A+p_C)_\nu(p_B+p_D)^\nu}{(p_D-p_B)^2}\right)
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

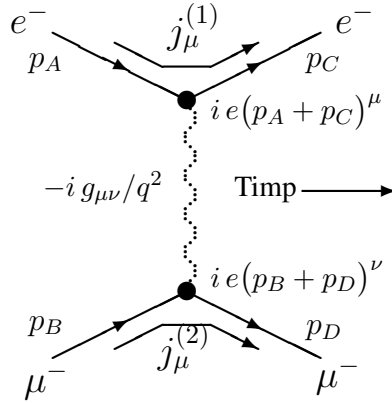


Figura 1.1: Diagrama Feynman de împrăștiere a două particule încărcate cu sarcina $-e$.

iar amplitudinea de tranziție este:

$$\boxed{T_{fi} = -\frac{i}{\hbar^2} N_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_D + p_C - p_B - p_A) \mathcal{M}}
 \tag{1.2}$$

funcția δ exprimă conservarea energie-impuls în procesul de împrăștiere a două particule încărcate.

Pentru evaluarea sarcinilor și curenților avem nevoie de ecuația de mișcare a câmpurilor.

1.2 Normarea stărilor de undă plană

Plecând de la relația relativistă a energiei: $\frac{E^2}{c^2} = \vec{p}^2 + m^2 c^2$ cu substituțiile $\begin{cases} \vec{p} \longrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \\ E \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \end{cases}$

obținem ecuația K-G și cea complex conjugată, care prin înmulțire la stânga, respectiv dreapta, ne dă:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{i}{\hbar} \psi^* \left| -\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + m^2 c^2 \psi \right. \\ \left. -\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + m^2 c^2 \psi^* \right| \frac{i}{\hbar} \psi \end{array} \right. \text{ sau } \left\{ \begin{array}{l} \frac{i\hbar}{c^2} \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = i\hbar \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} m^2 c^2 \psi^* \psi \\ -\frac{i\hbar}{c^2} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} \psi = -i\hbar \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \psi + \frac{i}{\hbar} m^2 c^2 \psi^* \psi \end{array} \right.$$

Prin sumarea lor obținem

$$\frac{i\hbar}{c^2} \left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} \psi \right) = i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \psi \right)$$

sau

$$\underbrace{\frac{i\hbar}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}}_{\rho} \left(\underbrace{\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi}_{\rho} \right) = \underbrace{i\hbar \frac{\partial}{\partial x}}_{-\vec{j}} \left(\underbrace{\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi}_{-\vec{j}} \right) \quad (1.3)$$

unde am separat densitatea ρ și curentul de stare \vec{j} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{i\hbar}{c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) \\ \vec{j} = -i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right) \end{array} \right. \text{ dimensional } \left\{ \begin{array}{l} [\rho] = \left[\frac{\hbar}{c^2 t} \right] [\psi^* \psi] = \frac{Js}{\frac{m^2}{s^2} s} [\psi^* \psi] = \frac{kg \frac{m^2}{s^2} s}{\frac{m^2}{s^2} s} [\psi^* \psi] = kg [\psi^* \psi] \\ [\vec{j}] = \left[\frac{\hbar}{x} \right] [\psi^* \psi] = \frac{Js}{m} [\psi^* \psi] = \frac{kg \frac{m^2}{s^2} s}{m \frac{s^2}{s}} [\psi^* \psi] = kg \frac{m}{s} [\psi^* \psi] \end{array} \right. \quad (1.4)$$

atunci (1.3) reprezintă Ecuația de continuitate: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \vec{j}}{\partial x} = 0$ { sau cu 4-vectorii $\begin{cases} j = (c\rho, -\vec{j}) \\ x = (ct, -\vec{x}) \end{cases}$ ecuația de continuitate covariantă $\partial_\mu j^\mu = 0$ }

Pentru funcția de undă plană: $\psi = N e^{-i p \cdot x / \hbar}$ sau $\begin{cases} \psi = N e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x}) / \hbar} \\ \psi^* = N^* e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x}) / \hbar} \end{cases} \quad (1.5)$

Densitatea și curentul (1.4) de undă plană K-G vor fi: $\begin{cases} \rho = \frac{i\hbar}{c^2} \left[\psi^* \left(-\frac{i}{\hbar} E \right) \psi - \left(\frac{i}{\hbar} E \right) \psi^* \psi \right] = \frac{2E}{c^2} |N|^2 \\ \vec{j} = -i\hbar \left[\psi^* \left(\frac{i}{\hbar} \vec{p} \right) - \left(-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \right) \psi^* \psi \right] = 2\vec{p} |N|^2 \end{cases} \quad (1.6)$

Funcție de mărimea urmărită, descrisă de ψ ca amplitudine de probabilitate de masă, de sarcină, de număr de particule etc. avem densitățile și curenții corespunzatori. Ca exemplificare facem analiza dimensională pentru cea masică. $\begin{cases} [\rho] = \left[\frac{E}{c^2} \right] [N^2] = \frac{kg \frac{m^2}{s^2}}{\frac{m^2}{s^2}} [N^2] = kg [N^2] \\ [\vec{j}] = [\vec{p}] [N^2] = kg \frac{m}{s} [N^2] \end{cases} \quad (1.7)$

- Pentru a face legătura între mărimile determinabile experimental și cele teoretice, va trebui să fixăm normarea N din funcția de undă pentru particula liberă (1.5), folosită în expresia densității și a curentului (1.6).

Normarea stărilor de undă plană (1.5) se face prin integrarea densității ρ (1.6), aici formal densitate masică, pe un volum cutie L^3 :

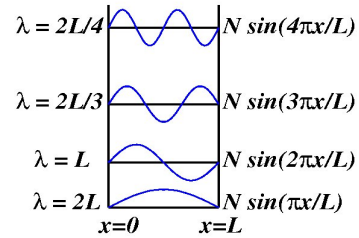
$$\int_{L^3} \rho d^3\mathbf{x} = 1 \quad \text{sau} \quad 2 \frac{E}{c^2} |N|^2 L^3 = 2m |N|^2 L^3 = 1 \quad (1.8)$$

- Pentru densitatea de sarcină, în locul lui m vom folosi sarcina q . Pentru densitatea de particule, luăm $m = 1$, ca număr adimensional. Astfel condiția de normare (1.8), pentru o particulă în volumul $V = L^3$, va fi: $|N|^2 V = 1$, de unde,

$$|N| = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad (1.9)$$

1.3 Stări cuantice finale posibile cinematic

- In cazul simplu al unui sistem finit (cutie), în tratarea unidimensională, cu soluții staționare, din condiția de anulare la margine ($x = L$), avem pe fiecare coordonată (v. Figura): $\sin k_n L = 0$, adică $k_n L = n\pi$, de unde $k_n = n\pi/L$ exprimat prin impuls $k = p_x/\hbar$, rezultă $p_x/\hbar = n\pi/L$,



numărul de stări (oscilații) posibile n , este dat de valoarea impulsului $p_x = 2\pi\hbar/\lambda$,

$$n = \frac{p_x/\hbar}{\pi/L} = \frac{2L p_x}{2\pi\hbar} = \frac{L}{\lambda/2} \quad (\text{vezi Fig.})$$

- Sub o altă formă, putem spune că spațiul fazelor disponibil este cuantificat în stări elementare $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq 2\pi\hbar$ (numitorul termenului după al doilea semn egal).

- Rezultă că numărul de stări (oscilații) posibile, având componenta unidimensională de impuls între p_x și $p_x + dp_x$, va fi

$$dn = \frac{2L dp_x}{2\pi\hbar} \quad (1.10)$$

- Numărul total de stări uniparticulă disponibile (finale) se află din integrarea pe spațiul fazelor de o particulă (on mass shell, vezi în continuare), adică:

$$S_1 = \int \frac{d^3x_1 d^3\vec{p}_1}{(2\pi\hbar)^3} \underbrace{\delta(p_1^2 - m_1^2)}_{1/2E_1} dE_1$$

- Integrând după coordonate, numărul posibil de stări finale uniparticulă este, similar cazului unidimensional (1.10):

$$dn_f = \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3\vec{p}_f}{2E_f} \quad (1.11)$$

- In cazul general determinarea numărului de stări finale disponibile, se face prin integrarea pe spațiul fazelor de n particule.

1.3.1 Spațiul Fazelor

- Spațiul fazelor pentru un sistem de n particule date (prin masele m_i), este alcătuit din totalitatea valorilor de coordonate și momente ale acestui sistem. In esență, extinderea volumului de spațiu fazelor, este determinată de energia totală a acestui sistem, dată de masa efectivă, din care se poate considera că respectivele particule provin, în urma dezintegrării acesteia. Să trecem să evaluăm acest volum disponibil de spațiu fazelor.

- Dacă o stare cuantică uniparticulă ocupă un spațiu al fazelor pentru un singur grad de libertate: $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq 2\pi\hbar$, atunci, numărul de stări finale uniparticulă va fi dat de integrala:

$$S_1 = \int \frac{d^3\vec{x} \cdot d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \quad (1.12)$$

- In cazul unui sistem de n particule, numărul de stări finale disponibile va fi:

$$S_n = \int \prod_{i=1}^n \frac{d^3\vec{x}_i \cdot d^3\vec{p}_i}{(2\pi\hbar)^3} \quad (1.13)$$

- Pentru energia E_{eff} și momentul \vec{p}_{eff} date, ale masei efective a sistemului (1.13), vor trebui separate doar acele stări ce satisfac legile de conservare ale energiei și impulsului ($\sum E_i = E_{eff}$, $\sum \vec{p}_i = \vec{p}_{eff}$), cu condiția de plasare a fiecărei particule "on mass shell". Fiecare din aceste condiții este exprimată prin câte o integrală după dE_i și $d^3\vec{p}_i$, conținând funcția δ -Dirac corespunzătoare,

$$S_n = \int \delta^3\left(\sum \vec{p}_i - \vec{p}_{eff}\right) \delta\left(\sum E_i - E_{eff}\right) \times \\ \times \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3n}} \prod_{i=1}^n \delta(p_i^2 - m_i^2) d^3\vec{x}_i dE_i d^3\vec{p}_i \quad (1.14)$$

- De obicei integrarea după coordonate $\int \prod_{i=1}^n d^3\vec{x}_i$ se include în partea de dinamică, unde se folosește în raport cu volumul: $|\mathcal{M}(p_1, \dots, p_n)|^2 / \prod_{i=1}^n d^3\vec{x}_i$ ca probabilitatea de tranziție în unitatea de volum. Ca urmare, partea care rămâne de rezolvat este cea de energie-impuls. Trecând la notații 4-dimensionale, $p_i = (E_i, \vec{p}_i)$, cu $p_i^2 = E_i^2 - |\vec{p}_i|^2 = m_i^2$, (1.14) devine

$$S_n = \int \delta^4\left(\sum_{i=1}^n p_i - p_{eff}\right) \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3n}} \prod_{i=1}^n \underbrace{\delta(p_i^2 - m_i^2)}_{\delta(E_i^2 - |\vec{p}_i|^2 - m_i^2)} dE_i \cdot d^3\vec{p}_i \quad (1.15)$$

- Efectuăm integrarea după energie, folosind proprietatea funcției δ , după care

$$\delta[\varphi(x)] = \frac{1}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x_0}} \delta(x - x_0) \quad \text{unde } x_0 \text{ e soluția } \varphi(x) = 0$$

$$\text{astfel că} \quad \int \delta(p_i^2 - m_i^2) dE_i = \int \delta(E_i^2 - |\vec{p}_i|^2 - m_i^2) dE_i \\ = \frac{1}{2\sqrt{|\vec{p}_i|^2 + m_i^2}} = \frac{1}{2E_i} \quad (1.16)$$

- Deci, volumul de spațiu fazelor va fi

$$S_n = \int \delta^4\left(\sum_{i=1}^n p_i - p_{eff}\right) \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3n}} \prod_{i=1}^n \frac{d^3\vec{p}_i}{2E_i} \quad (1.17)$$

- Cu ajutorul volumului de spațiu fazelor (1.17) se poate determina probabilitatea realizării sistemului de n particule (probabilitatea dezintegrării unei mase efective m_{eff} sau secțiunea eficace totală de realizare a sistemului), precum și diverse distribuții după variabilele care nu se integrează.

1.4 Secțiunea eficace exprimată prin amplitudinea invariantă

Pentru calculul secțiunii eficace¹ în interacția $A+B \rightarrow C+D$ (Fig.1.1), folosim relația

$$d\sigma = \frac{dN_{ev}/Vt}{F_A \rho_B} \quad (1.18)$$

F_A este fluxul de particule A incidente, ρ_B este densitatea de particule B țintă,

1.4.1 Rata de producere stări finale (p_C+p_D)

- dN_{ev}/Vt este numărul de evenimente (stări finale) produse în unitate de volum și în unitatea de timp, $\left| \frac{dN_{ev}}{Vt} = W_{fi} dn_{fd} \right. \quad (1.19)$

W_{fi} este probabilitatea de tranziție în unitatea de volum și în unitate de timp.

- Pentru particule Klein-Gordon, probabilitatea de ocupare a stărilor disponibile finale în unitatea de volum și în unitatea de timp (probabilitatea de tranziție în unitatea de volum și în unitate de timp) este $\left| W_{fi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{Vt} \right. \quad (1.20)$

V este volumul în care au loc interacțiile, t este intervalul de timp în care au loc interacțiile,

- Numărul de stări finale disponibile dn_{fd} , de două particule finale este dat de produsul elementelor de volum al spațiului fazelor respective (1.11), $\left| dn_{fd} = \frac{V d^3 p_C}{(2\pi\hbar)^3 2E_C} \frac{V d^3 p_D}{(2\pi\hbar)^3 2E_D} \right. \quad (1.21)$

- Să evaluăm mărimile fizice necesare pentru numărul de stări finale dN_{ev} , întâi W_{fi} . Amplitudinea de tranziție este dată de (1.2),

$$T_{fi} = -i N_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) \mathcal{M} \quad (1.22)$$

- Funcția $\delta^{(4)}$ o scriem ca o integrală: $\delta^{(4)}(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-Vt/2}^{+Vt/2} dx e^{ip \cdot x}$

Prin ridicarea la pătrat $|T_{fi}|^2$, o înmulțim din nou cu funcție $\delta^{(4)}$, astfel folosind relația $f(p) \delta(p) = f(0) \delta(p)$, obținem

¹Din egalarea probabilității de interacție, exprimată în două feluri:

$$p = \frac{N_{ev}/t}{N_{inc}/t} = \frac{N_{targ} \sigma}{S}$$

rezultă

$$\sigma = \frac{N_{ev}/t}{(N_{inc}/tS) N_{targ}} = \frac{N_{ev}/Vt}{F_{inc} (N_{targ}/V)} = \frac{N_{ev}/Vt}{F_{inc} \rho_{targ}}$$

unde $N_{inc}/tS = F_{inc}$ reprezintă fluxul F_{inc} de particule incidente în unitate de timp și pe unitatea de suprafață S a țintei (care conține $N_{targ} = \rho_{targ} V$ particule, fiecare de secțiune σ)

$$\begin{aligned}
 [\delta^{(4)}(p)]^2 &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-Vt/2}^{+Vt/2} dx e^{ip \cdot x} \delta^{(4)}(p) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(p) \int_{-Vt/2}^{+Vt/2} dx = \frac{1}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(p) Vt
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

- Atunci, probabilitatea de tranziție W_{fi} (1.20), folosind T_{fi} (1.22) și (1.23), devine

$$\begin{aligned}
 W_{fi} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{Vt} = \overbrace{\frac{1}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) Vt}^{\text{[}\delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B)\text{]}^2} |\mathcal{M}|^2 \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{Vt} N_A^2 N_B^2 N_C^2 N_D^2 (2\pi)^8 \frac{1}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) Vt |\mathcal{M}|^2
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

folosind (1.9) pentru $N_A^2 N_B^2 N_C^2 N_D^2 = \frac{1}{V^4}$ obținem în final

$$\boxed{W_{fi} = (2\pi)^4 \frac{\delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B)}{V^4} |\mathcal{M}|^2} \tag{1.25}$$

1.4.2 Rata de producere interacției inițiale ($p_A + p_B$)

- Fluxul F_A de particule incidente, ca numărul n_A de particule pe unitate de suprafață și în unitate de timp, în SL, îl exprimăm prin densitatea ρ_A , dată de (1.6) cu (1.9)

$$F_A = \frac{n_A}{S \cdot t} = \rho_A \frac{S \cdot |\vec{v}_A| t}{S \cdot t} = \rho_A |\vec{v}_A| = \frac{2E_A}{c^2 V} |\vec{v}_A| \tag{1.26}$$

care nu este altceva decât *curentul de particule* \vec{j}_A (1.6).

- Densitatea de particule B țintă ρ_B este dată de (1.6), $\rho_B = \frac{n_B}{V} = \frac{2E_B}{c^2 V}$ (1.27)

- Reluând expresia secțiunii eficace (1.18) împreună cu relațiile (1.19) și (1.21), avem:

$$d\sigma = \frac{dN_{ev}/Vt}{F_A \rho_B} = \frac{W_{fi}}{F_A \rho_B} dn_{fd} = \frac{W_{fi}}{F_A \rho_B} \frac{V d^3 \vec{p}_C}{(2\pi \hbar)^3 2E_C} \frac{V d^3 \vec{p}_D}{(2\pi \hbar)^3 2E_D} \tag{1.28}$$

- In final, cu ajutorul (1.25), (1.26) și (1.27), secțiunea eficace (1.18) căutată va fi:

$$d\sigma = (2\pi)^4 \frac{\delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B)}{\frac{2E_A}{c^2} \frac{2E_B}{c^2} |\vec{v}_A|} |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 \vec{p}_C}{(2\pi \hbar)^3 2E_C} \frac{d^3 \vec{p}_D}{(2\pi \hbar)^3 2E_D} \tag{1.29}$$

- In numitorul relației (1.29) avem, $|\vec{v}_A| = |\vec{p}_A| c^2 / E_A$ și $E_B = m_B c^2$ (ținta în repaus $\vec{p}_B = 0$). Atunci, numitorul (fluxul) devine:

$$F_A \rho_B = \frac{2E_A}{c^2} \frac{2E_B}{c^2} |\vec{v}_A| = \frac{2E_A}{c^2} \frac{2m_B c^2}{c^2} \frac{|\vec{p}_A| c^2}{E_A} = 4 \underbrace{|\vec{p}_A| m_B}$$

sub formă invariantă, $|\vec{p}_A| m_B = \sqrt{\left(\frac{E_A^2}{c^2} - m_A^2 c^2\right) m_B^2}$ iar $\frac{E_A^2}{c^2} m_B^2 = (p_A \cdot p_B)^2$

înlocuind mai sus, fluxul invariant este: $F \equiv F_A \rho_B = 4\sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2 c^2}$

Expresia secțiunii (1.29) eficace devine:
$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{F} dLips \quad (1.30)$$

- $dLips$ este elementul de spațiu fazelor invariant Lorentz (1.17)

$$dLips = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) \frac{d^3\vec{p}_C}{(2\pi\hbar)^3 2E_C} \frac{d^3\vec{p}_D}{(2\pi\hbar)^3 2E_D}$$

- In acest fel, am determinat atât rata de evenimente finale (urmărite) dN_{ev}/Vt , cât și rata de procese de interacție inițială $F_A \rho_B$, ce ne permit obținerea secțiunii eficace (1.18):

$$d\sigma = \frac{dN_{ev}/Vt}{F_A \rho_B}$$