

Procese QED în câmpuri laser intense
tema 28

M. Penția

July 22, 2021

”Verbum sapienti sat est”

Cuprins

1	Formula Rutherford în mecanica clasică	4
1.1	Secțiunea eficace de împrăștiere Rutherford	5
2	Imprăștierea Coulomb relativă	7
2.1	Electrodinamica particulelor încărcate relativiste de spin zero	7
2.1.1	Imprăștierea Coulomb a particulelor Klein-Gordon - de spin zero	10
2.2	Electrodinamica particulelor încărcate de spin 1/2	12
2.2.1	Imprăștierea Coulomb a particulelor Dirac - de spin 1/2	13

Capitol 1

Formula Rutherford în mecanica clasică

Împrăștierea nerelativistă a electronului în câmpul Coulombian al sarcinii Ze , masive în raport cu e , este prezentată în Fig. 1.1.

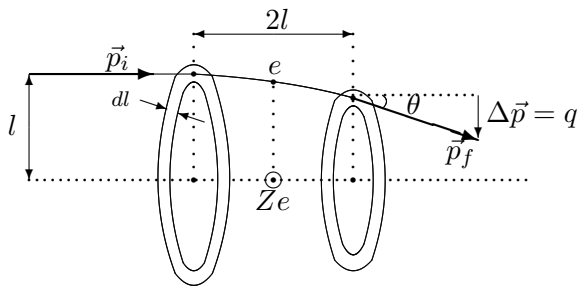


Figura 1.1:

- l - parametrul de impact
- \vec{v} - viteza electronului
- m - masa electronului
- $\vec{p} = m\vec{v}$ - momentul electronului
- θ - unghiul de împrăștiere

Dacă se neglijează reculul nucleului țintă, masiv, atunci schimbarea momentului electronului $\Delta\vec{p}$ este așa-numitul *transfer de moment* q . Relația 4-dimensională a *transferului de moment* este

$$q^2 = \Delta E^2 - \Delta\vec{p}^2$$

$\Delta E = E_f - E_i = 0$, deci transferul de 4-moment q^2 este egal cu transferul de 3-moment cu semn schimbat: $q^2 = -\Delta\vec{p}^2$.

Transferul de 4-moment se poate scrie,

$$\begin{aligned} q^2 &= (q_f - q_i)^2 = 2m^2 - 2q_i q_f = 2m^2 - 2(E_i E_f - \vec{p}_i \cdot \vec{p}_f) \\ &= 2m^2 - 2E_i E_f + 2p_i p_f \cos \theta = 2(m^2 - E^2) + 2p^2 \cos \theta \\ &= -2p^2 + 2p^2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) = -4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Transferul de 3-moment se poate scrie,

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t = \frac{Ze^2}{4\pi l^2} \frac{2l}{v} = \frac{2Ze^2}{4\pi l v} = \frac{2Ze^2 m}{4\pi l p} \quad (1.2)$$

iar din Fig.1.1 avem

$$|\Delta \vec{p}| \approx p \theta \quad (1.3)$$

1.1 Secțiunea eficace de împrăștiere Rutherford

Din Fig.1.2 putem evalua secțiunea eficace de împrăștiere

$$d\sigma = 2\pi l dl$$

Din definiția unghiului solid ($d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$), avem

$$d\Omega = 2\pi \theta d\theta$$

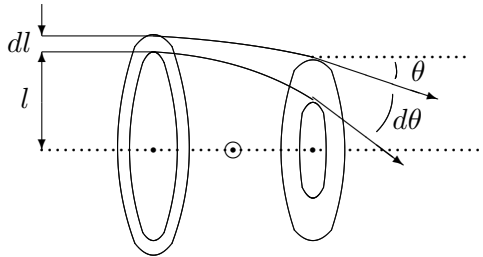


Figura 1.2:

Secțiunea diferențială de împrăștiere este dată de raportul celor două relații de mai sus,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{l}{\theta} \frac{dl}{d\theta} \quad (1.4)$$

Legătura $l = f(\theta)$ se obține din (1.2) și (1.3),

$$l = \frac{2Ze^2 m}{4\pi p^2 \theta}$$

de unde, prin derivare, obținem

$$\left| \frac{dl}{d\theta} \right| = \frac{2Ze^2 m}{4\pi p^2 \theta^2}$$

Inlocuind în (1.4), ținând cont de (1.3), avem

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{2Z (e^2/4\pi) m}{p^2 \theta^2} \right]^2 = \frac{4Z^2 (e^2/4\pi)^2 m^2}{(\Delta\vec{p})^4}$$

deoarece $|\Delta\vec{p}|^2 = q^2$ și folosind expresia lui q^2 (1.1), avem

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2 (e^2/4\pi)^2 m^2}{q^4} = \frac{Z^2 (e^2/4\pi)^2 m^2}{4p^4 \sin^4(\theta/2)} \quad (1.5)$$

relație ce exprimă *formula Rutherford* pentru secțiunea de împrăștiere.

Capitol 2

Imprăștierea Coulomb relativită

2.1 Electrodinamica particulelor încărcate relativiste de spin zero

- In electrodinamica clasică, mișcarea unei particule cu sarcina q într-un potențial electromagnetic A^μ , se obține prin substituția

$$p^\mu \longrightarrow p^\mu - qA^\mu \quad (2.1)$$

- Trecerea la mecanica cuantică se face apoi cu trecerea la operatorii covarianți $\partial^\mu \rightarrow D^\mu$

$$\left\{ \begin{array}{l} i\hbar\partial^\mu \longrightarrow i\hbar\partial^\mu - qA^\mu \text{ sau} \\ \partial^\mu \longrightarrow \partial^\mu + \frac{i}{\hbar}qA^\mu \\ \text{\textit{și similar}} \\ \partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu + \frac{i}{\hbar}qA_\mu \end{array} \right. \quad (2.2)$$

- Atunci, pentru a descrie interacția unei particule relativiste de spin zero cu un câmp electromagnetic, în **ecuația Klein-Gordon** pentru o particulă liberă

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \quad (2.3)$$

- facem înlocuirea (2.2) în (2.3), astfel obținem

Ecuția Klein-Gordon pentru o particulă în câmp EM

$$\left[\left(\partial_\mu + \frac{i}{\hbar}qA_\mu \right) \left(\partial^\mu + \frac{i}{\hbar}qA^\mu \right) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right] \psi = 0 \quad (2.4)$$

dezvoltăm (2.4):

$$\left[\partial_\mu\partial^\mu + \frac{i}{\hbar}q\partial_\mu A^\mu + \frac{i}{\hbar}qA_\mu\partial^\mu - \frac{q^2}{\hbar^2}A_\mu A^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right] \psi = 0$$

separăm în membrul stâng partea K-G de particulă liberă, iar în membrul drept partea de interacție, unde scoatem A^μ prin o dublă transformare *covariant* \leftrightarrow *contravariant* $A_\mu\partial^\mu \leftrightarrow A^\mu\partial_\mu$,

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi = \underbrace{\left[-\frac{i}{\hbar} q \left(\partial_\mu A^\mu + \underbrace{A_\mu \partial^\mu}_{A^\mu \partial_\mu} \right) + \frac{q^2}{\hbar^2} A_\mu A^\mu \right]}_{-\hat{V}} \psi \equiv -\hat{V} \psi \quad (2.5)$$

unde identificăm operatorul potențial de interacție:

$$\hat{V}(x) = \frac{i}{\hbar} q \left(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu \right) - \frac{q^2}{\hbar^2} A_\mu A^\mu \quad (2.6)$$

Semnului lui \hat{V} s-a ales ca să fie același cu semnul termenului de energie cinetică $\partial_i \partial^i$ ($\partial_\mu \partial^\mu = \partial_0 \partial^0 - \partial_i \partial^i$) din ecuația Schrödinger: $\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_i \partial^i \right) \psi = (E - V) \psi$

- Potențialul V este caracterizat prin parametrul sarcină electrică q , care prin sarcina elementară e este legat de constanta de structură fină $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$ și care măsoară tăria interacției electromagnetice. Valoarea mică a acestui parametru de cuplaj EM permite dezvoltarea V în serie de puteri ale lui α . De aceea, în primul ordin de dezvoltare în serie de puteri, termenul $q^2 A^2 \equiv q^2 A_\mu A^\mu$ din V se poate omite.
- Atunci, amplitudinea de tranziție (împrăștiere) a unei particule de sarcină q_1 , din ψ_i în ψ_f pe un potențial A_μ (vezi Fig. de mai jos) este

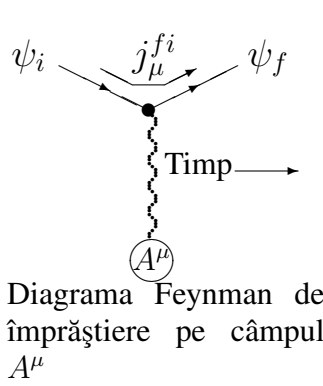
$$\begin{aligned} c_f^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int \psi_f^*(x) \hat{V}(x) \psi_i(x) d^4x \\ &= -\frac{i}{\hbar^2} \int \psi_f^* i q_1 \left(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu \right) \psi_i d^4x \end{aligned} \quad (2.7)$$
- Căutăm să separăm A^μ . Prima derivată ∂_μ din paranteze, ce acționează atât asupra lui A^μ cât și asupra lui ψ_i , poate fi trecută peste A^μ prin integrare prin părți ($\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$), pentru a acționa asupra lui ψ_f^* . Tinem cont că termenul de suprafață este nul, deoarece potențialul se anulează pentru $(|\vec{x}|, t) \rightarrow \pm\infty$. Atunci,

$$\int \psi_f^* \partial_\mu (A^\mu \psi_i) d^4x = - \int (A^\mu \psi_i) \partial_\mu \psi_f^* d^4x$$

- Scriem amplitudinea de tranziție $c_f^{(1)}(t) \equiv T_{fi}$ (2.7) cu A^μ separat apoi în dreapta, ca:

$$\begin{aligned} T_{fi} \equiv c_f^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar^2} \int i q_1 \left[-\partial_\mu \psi_f^* (A^\mu \psi_i) + \psi_f^* A^\mu (\partial_\mu \psi_i) \right] d^4x \\ &= -\frac{i}{\hbar^2} \int i q_1 \underbrace{\left[\psi_f^* (\partial_\mu \psi_i) - (\partial_\mu \psi_f^*) \psi_i \right]}_{j_\mu^{fi}(x)} A^\mu d^4x \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.1. ELECTRODINAMICA PARTICULELOR ÎNCĂRCATE RELATIVISTE DE SPIN ZERO 9



în (2.8) am identificat un curent K-G între stările ψ_i și ψ_f :

$$j_\mu^{fi}(x) = i q_1 \left[\psi_f^* (\partial_\mu \psi_i) - (\partial_\mu \psi_f^*) \psi_i \right] \quad (2.9)$$

atunci, amplitudinea de tranziție (2.8) se poate scrie:

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar^2} \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x \quad (2.10)$$

- Dacă mișcarea particulei incidente de 4-impuls p_i și a celei emergente de 4-impuls p_f , este descrisă de undele plane:

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= N_i e^{-i p_i \cdot x} \\ \psi_f(x) &= N_f e^{-i p_f \cdot x} \end{aligned} \quad (2.11)$$

unde, N_i și N_f constante de normare

- Curentul de tranziție (2.9) din diagrama Feynman din Figura de mai sus, va fi,

$$\begin{aligned} j_\mu^{fi} &= i q_1 \left[\overbrace{N_f e^{i p_f \cdot x}}^{\psi_f^*} \overbrace{(-i) p_i N_i e^{-i p_i \cdot x}}^{\partial_\mu \psi_i} - \overbrace{i p_f N_f e^{i p_f \cdot x}}^{\partial_\mu \psi_f^*} \overbrace{N_i e^{-i p_i \cdot x}}^{\psi_i} \right] \\ &= q_1 N_i N_f (p_i + p_f)_\mu e^{i (p_f - p_i) \cdot x} \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.1.1 Imprăștierea Coulomb a particulelor Klein-Gordon - de spin zero

Vom studia un caz din cele mai simple de interacție electromagnetică, respectiv împrăștierea unei particule cu sarcina $+e$ și spin zero pe un potențial Coulomb staționar, tratat ca un câmp clasic. Această abordare ne va conduce la formula Rutherford a secțiunii eficace de împrăștiere, relativistă de data asta, a unei particule încărcate pe câmpul electrostatic al unui nucleu. In acest fel vom face un exercițiu util de abordare a problemelor din teoria cuantică a câmpurilor.

Procesul de împrăștiere este prezentat în Figura de la pagina anterioară 9.

- Am văzut (2.6), potențialul perturbator de câmp K-G în aproximația de ordin întâi (am neglijat termenul de ordin doi în e^2), este:

$$\hat{V}(x) = \frac{i}{\hbar} e \left(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu \right) \quad (2.13)$$

- Cu amplitudinea de tranziție (2.10)

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar^2} \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x \quad (2.10)$$

- și curentul de tranziție (2.12)

$$j_\mu^{fi} = e N_i N_f (p_i + p_f)_\mu e^{i(p_f - p_i) \cdot x} \quad (2.12)$$

- In cazul nostru, câmpul electrostatic împrăștiator este produs de sarcina Ze a nucleului, considerat în repaus. Deci, potențialul A^μ are componentele:

$$\begin{cases} A^0 = \frac{Ze}{4\pi|\vec{x}|} \\ \vec{A} = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

- Introducem în amplitudinea de tranziție T_{fi} (2.10), potențialul A^μ (2.14) și curentul j_μ^{fi} (2.12), și separăm componenta temporală de cele spațiale $p_\mu = (E, -\vec{p})$:

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -\frac{i}{\hbar^2} \int \overbrace{e N_i N_f (p_i + p_f)_0}^{j_0^{fi}} e^{i(p_f - p_i) \cdot x} \overbrace{\frac{Ze}{4\pi|\vec{x}|}}^{A^0} d^4x \\ &= -\frac{i}{\hbar^2} N_i N_f Z e^2 \underbrace{(E_i + E_f)}_{2E} \underbrace{\int e^{i(E_f - E_i)t} dt}_{2\pi\delta(E_f - E_i)} \underbrace{\int \frac{e^{-i(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{x}}}{4\pi|\vec{x}|} d^3\vec{x}}_{f(\vec{q})} \end{aligned} \quad (2.15)$$

- Integrala spațială de forma

$$f(\vec{q}) = \int F(\vec{x}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} d^3\vec{x}$$

este transformata Fourier pentru funcția $F(\vec{x}) = 1/(4\pi|\vec{x}|)$

$$f(\vec{q}) = \int \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} d^3\vec{x} = \frac{1}{|\vec{q}|^2} \quad (2.16)$$

- Atunci,

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar^2} N_i N_f 2\pi\delta(E_f - E_i) \frac{Ze^2}{|\vec{q}|^2} 2E \quad (2.17)$$

unde am folosit $E_f = E_i = E$.

2.1. ELECTRODINAMICA PARTICULELOR ÎNCĂRCATE RELATIVISTE DE SPIN ZERO 11

Probabilitatea de tranziție în unitatea de timp și unitatea de volum este $W_{fi} = 2\pi |T_{fi}|^2 \rho(E_f)$

Numărul de stări finale în intervalul dE_f este $\rho(E_f) dE_f = \frac{|\vec{p}_f|^2 d|\vec{p}_f|}{(2\pi)^3 2E_f} d\Omega$

Folosim $E_f = \sqrt{m^2 + \vec{p}_f^2}$ obținem $\rho(E_f) = \frac{|\vec{p}_f| d\Omega}{16\pi^3}$

Pentru a obține secțiunea eficace trebuie să împărțim cu fluxul incident, care este $2|\vec{p}_i|$.

$$\text{Atunci} \quad d\sigma = \frac{4Z^2 e^4}{16\pi^2 \vec{q}^4} d\Omega$$

$$\text{Deoarece} \quad \vec{q} = (\vec{p}_f - \vec{p}_i)^2 = 4|\vec{p}|^2 \sin^2 \theta/2$$

Atunci, secțiunea eficace este:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (Z\alpha)^2 \frac{E^2}{4|\vec{p}|^4} \frac{1}{\sin^4 \theta/2}$$

Aceasta este formula Rutherford relativistă, cu dependența secțiunii eficace: $\sin^{-4} \theta/2$.

Forma nerelativistă se poate obține dacă se înlocuiește E cu m .

2.2 Electrodinamica particulelor încărcate de spin 1/2

- Vom relua dezvoltările anterioare, de data asta pentru particule cu spin 1/2. Adică vom descrie interacțiile electromagnetice ale cuarcilor și leptonilor. Aceste particule sunt descrise de ecuația Dirac, iar rezultatul va consta în regulile Feynman pentru interacția electromagnetică a cuarcilor și leptonilor de spin 1/2.

- Pornim de la ecuația Dirac originală, pentru o particulă plasată în potențialul V .

$$\left(\frac{\hat{E}}{c} - \alpha \cdot \hat{p} - \beta mc \right) \psi = \hat{V} \psi$$

Apoi, pentru a evidenția matricile γ , înmulțim la stânga cu β și trecem la operatorii diferențiali:

$$\beta \times \left(\frac{\hat{E}}{c} - \alpha^k \hat{p}_k - \beta mc \right) \psi = \hat{V} \psi \quad \text{înlocuim } \begin{cases} \beta = \gamma^0 & \text{și} & \beta \alpha^k = \gamma^k \\ \hat{E}/c \rightarrow i\hbar \partial_0 & \text{și} & \hat{p}_k \rightarrow -i\hbar \partial_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(i\hbar \gamma^0 \partial_0 + i\hbar \gamma^k \partial_k - mc \right)}_{i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc} \psi = \gamma^0 V \psi \quad \text{deoarece } \beta\beta = 1 \quad (2.18)$$

- Pe de altă parte, ecuația Dirac pentru un electron de sarcină $q = -e$ aflat într-un câmp electromagnetic A^μ , este

$$\left(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc + e \gamma^\mu A_\mu \right) \psi = 0 \quad (2.19)$$
 ecuația Dirac interacție în pt. particula câmp liberă EM

- La fel ca în cazul Klein-Gordon (2.5) pag.7, separăm partea de particulă liberă în membrul stâng, iar în cel drept identificăm potențialul de interacție cu $\gamma^0 V$ din (2.18).

$$\left(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc \right) \psi = -e \gamma^\mu A_\mu \psi = \gamma^0 V \psi \quad (2.20)$$

Astfel am separat operatorul potențial de interacție (perturbația): $\gamma^0 V = -e \gamma^\mu A_\mu$

- Folosind perturbațiile de ordin întâi în expresia amplitudinii de împrăștiere a electronului între starea ψ_i și ψ_f , precum și definițiile ψ^\dagger și γ^0

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int \psi_f^\dagger \downarrow V \psi_i d^4x \quad \left| \times (\gamma^0)^2 = I \quad \text{cu} \quad \psi^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi} \quad \gamma^0 V = -e \gamma_\mu A^\mu \right.$$

$$= \frac{i}{\hbar} e \int \bar{\psi}_f \gamma_\mu A^\mu \psi_i d^4x \quad \left| \begin{array}{|l} \text{unde} \\ \text{am identificat} \\ \text{un curent Dirac} \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{|l} j_\mu^{fi} = -e \bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_i \end{array} \right. \quad (2.21)$$

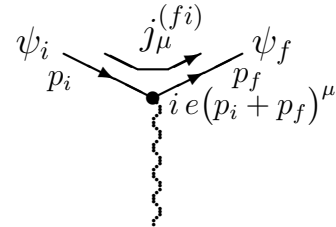
$$= -\frac{i}{\hbar} \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x \quad \left| \begin{array}{|l} \text{unde} \\ \text{folosind soluțiile Dirac, este} \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{|l} j_\mu^{fi} = -e \bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_i \\ = -e \bar{u}_f \gamma_\mu u_i e^{i(p_f - p_i) \cdot x / \hbar} \end{array} \right. \quad (2.22)$$

acesta poate fi privit ca un curent de tranziție electromagnetică între stările i și f ale electronului.

- Comparăm acest curent de tranziție Dirac cu expresia curentului Klein-Gordon corespunzător (2.12):

$$j_\mu^{fi} = -e (p_f + p_i)_\mu e^{i(p_f - p_i) \cdot x / \hbar}$$

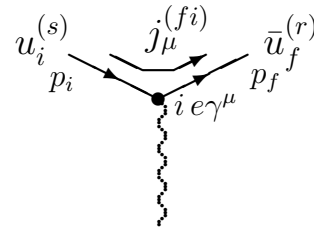
corespunzător unei diagrame Feynman de vertex $ie(p_i + p_f)^\mu$



- De data asta, curentul Dirac (2.22) (de spin 1/2) este:

$$j_\mu^{fi} = -e (\bar{u}_f \gamma_\mu u_i) e^{i(p_f - p_i) \cdot x / \hbar} \quad (2.23)$$

corespunzător unei diagrame Feynman cu factor de vertex $ie\gamma^\mu$, ca o matrice 4×4 în spațiul de spin. Acesta este flancat de spinorii coloană $u_i^{(s)}$ și linie $\bar{u}_f^{(r)}$, ce descriu electronii inițial și final de impuls p_i , respectiv p_f și stări de spin s și r .



2.2.1 Imprăștierea Coulomb a particulelor Dirac - de spin 1/2

- Amplitudinea de tranziție (împrăștiere) pentru particule Dirac, am văzut (2.21) este

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int j_\mu^{fi}(x) A^\mu(x) d^4x \quad (2.21)$$

- unde, curentul de tranziție pentru particule Dirac, am văzut (2.22) este

$$j_\mu^{fi} = -e \bar{u}_f \gamma_\mu u_i e^{iq \cdot x / \hbar} \quad (2.22)$$

- Înlocuind în amplitudinea de tranziție (2.21), obținem

$$T_{fi} = \frac{i}{\hbar} \int \overbrace{e \bar{u}_f \gamma_\mu u_i e^{iq \cdot x / \hbar} A^\mu(x) d^4x}^{j_\mu^{fi}} = \frac{i}{\hbar} e \bar{u}_f \gamma_\mu u_i A^\mu(q) \quad (2.24)$$

= $A^\mu(q)$ transf. Fourier

- Unde potențialul $A^\mu(q)$ este dat de transformata Fourier a potențialului $A^\mu(x)$:

$$\begin{aligned} A^\mu(q) &= \int e^{iq \cdot x / \hbar} A^\mu(x) d^4x \\ &= \underbrace{\int e^{i(E_f - E_i)t / \hbar} dt}_{= 2\pi\delta(E_f - E_i)} \underbrace{\int e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x} / \hbar} A^\mu(\vec{x}) d^3\vec{x}}_{= A^\mu(\vec{q}) \text{ transf. Fourier}} = 2\pi\delta(E_f - E_i) A^\mu(\vec{q}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

- Determinăm $A^\mu(\vec{q})$, din ecuațiile Maxwell, $\partial_\nu \partial^\nu A^\mu(x) = j^\mu(x)$ (2.26)

Tinând cont că în cazul de față potențialul $A^\mu(x)$ este independent de timp, atunci $\partial_\nu \partial^\nu = \partial_i \partial^i$, iar: $\partial_i \partial^i A^\mu(\vec{x}) = j^\mu(\vec{x})$ (2.27)

- Luăm d'Alambertian-ul $\partial_\nu \partial^\nu A^\mu(q)$ din componenta spațială a ecuației (2.25):

– Pe de o parte

$$\left[\partial_\nu \partial^\nu A^\mu(\vec{q}) \right]_{sp} = \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar} \underbrace{(\partial_i \partial^i A^\mu(\vec{x}))}_{j^\mu(\vec{x})} d^3\vec{x} = \int \underbrace{j^\mu(\vec{x}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar}}_{j^\mu(\vec{q})} d^3\vec{x} = j^\mu(\vec{q}) \quad (2.28)$$

– Pe de altă parte facem o integrare prin părți ($\int u dv = uv - \int v du$), cu anularea termenului de graniță uv ,

$$\begin{aligned} \left[\partial_\nu \partial^\nu A^\mu(\vec{q}) \right]_{sp} &= \int \underbrace{e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}/\hbar}}_u \underbrace{(\partial_i \partial^i A^\mu(\vec{x}))}_{dv} d^3\vec{x} \\ &= \int -A^\mu(\vec{x}) (\partial_i \partial^i e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}) d^3\vec{x} = \int -A^\mu(\vec{x}) (-|\vec{q}|^2 e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}) d^3\vec{x} \\ &= |\vec{q}|^2 \int \underbrace{A^\mu(\vec{x}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}}_{A^\mu(\vec{q})} d^3\vec{x} = |\vec{q}|^2 A^\mu(\vec{q}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Deci, din relațiile (2.28) și (2.29) avem: $A^\mu(\vec{q}) = \frac{1}{|\vec{q}|^2} j^\mu(\vec{q})$ (2.30)

- Inlocuind această componenta spațială $A^\mu(\vec{q})$ în (2.25), avem: $A^\mu(q) = 2\pi \delta(E_f - E_i) \frac{1}{|\vec{q}|^2} j^\mu(\vec{q})$ (2.31)

- Inlocuind pe mai departe $A^\mu(q)$ în amplitudinea de împrăștiere T_{fi} (2.24) obținem,

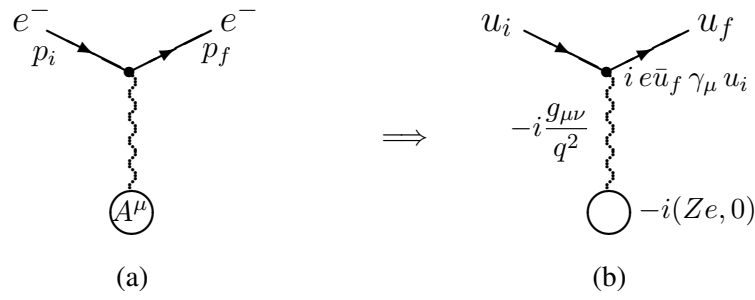
$$T_{fi} = \frac{2\pi i}{\hbar} \delta(E_f - E_i) \left(e \bar{u}_f \gamma_\mu u_i \right) \left(\frac{1}{|\vec{q}|^2} \right) \left(j^\mu(\vec{q}) \right) \quad (2.32)$$

- Imprăștierea unui electron pe un potențial electrostatic $A^0 \neq 0$, vezi Fig.2.1, are loc cu $\vec{p}_i \neq \vec{p}_f$, însă $E_i = E_f$ (conservarea energiei), înseamnă că transferul de 4-impuls are componenta $q^0 = 0$. De aceea, $q^2 = -|\vec{q}|^2$ (2.33)

- Amplitudinea invariantă conține dinamica interacției, fără contribuția cinematică (cu funcția $2\pi\delta$ în (2.32)),

$$-i\mathcal{M} = \frac{1}{\hbar} \left(i e \bar{u} \gamma^\nu u_i \right) \left(\frac{-ig_{\nu\mu}}{q^2} \right) \left(-i j^\mu(\vec{q}) \right) \quad (2.34)$$

- Recunoaștem în amplitudinea invariantă de mai sus factorul de vertex și propagatorul fonic din diagrama Feynman pentru calculul amplitudinii invariante $-i\mathcal{M}$. Factorul $-i j^\mu$ este asociat sursei de câmp electromagnetic. În cazul unui nucleu în repaus sarcina Ze a acestuia este cea care crează câmpul electrostatic, de aceea,


 Figura 2.1: Împrăștierea unui electron pe un potențial electrostatic $A^0 \neq 0$

$$j^0(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) = Ze \delta(\vec{x}) \quad ; \quad \vec{j}(\vec{x}) = 0 \quad (2.35)$$

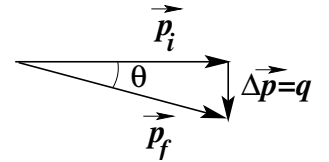
atunci

$$\boxed{-i\mathcal{M} = \left(i e \bar{u}_f \gamma_0 u_i \right) \left(\frac{-i}{q^2} \right) \left(-i Ze \right)} \quad (2.36)$$

Diagrama corespunzătoare este prezentată în Fig.2.1 (b).

- Pentru un nucleu în repaus, (2.36) descrie dependența secțiunii de împrăștiere Rutherford de transferul de 4-impuls q (cu $E_f = E_i$).

$$\begin{aligned} q^2 &= (p_f - p_i)^2 = 2m^2 - 2p_i \cdot p_f = 2m^2 - 2(E_i E_f - \vec{p}_i \cdot \vec{p}_f) \\ &= 2m^2 - 2E_i E_f + 2|\vec{p}_i||\vec{p}_f| \cos \theta = 2(m^2 - E^2) + 2|\vec{p}|^2 \cos \theta \\ &= -2|\vec{p}|^2(1 - \cos \theta) = -4|\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2) \end{aligned}$$



Intr-adevăr, am văzut

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim |\mathcal{M}|^2 \sim \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

- Secțiunea eficace de împrăștiere Rutherford este,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4E^2} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$