Procese QED în câmpuri laser intense
tema 28-bis

M. Penţia

September 3, 2021

.

”Verbum sapienti sat est”

Cuprins

Capitol 1

Particule încărcate în câmp EM

1.1 Potenţialul perturbator de interacţie a particulelor de spin zero

- In electrodinamica clasică, mişcarea unei particule cu sarcina q într-un potenţial electromagnetic A^μ, se obţine prin substituţia

$$p^\mu \longrightarrow p^\mu - qA^\mu \tag{1.1}$$

- Trecerea la mecanica cuantică se face apoi cu trecerea la operatorii covarianţi $\partial^\mu \to D^\mu$

$$\begin{cases} i\hbar\partial^\mu \longrightarrow i\hbar\partial^\mu - qA^\mu \quad \text{sau} \\ \begin{cases} \partial^\mu \quad \longrightarrow \quad \partial^\mu + \dfrac{i}{\hbar}qA^\mu \\ \text{şi} \quad \text{similar} \\ \partial_\mu \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu + \dfrac{i}{\hbar}qA_\mu \end{cases} \end{cases} \tag{1.2}$$

- Atunci, pentru a descrie interacţia unei particule relativiste de spin zero cu un câmp electromagnetic, în **ecuaţia Klein-Gordon** pentru o particulă liberă

$$\boxed{\left(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0} \tag{1.3}$$

- facem înlocuirea (1.2) în (1.3), astfel obţinem Ecuaţia Klein-Gordon pentru o particulă în câmp EM

$$\boxed{\left[\left(\partial_\mu + \frac{i}{\hbar}qA_\mu\right)\left(\partial^\mu + \frac{i}{\hbar}qA^\mu\right) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\psi = 0} \tag{1.4}$$

dezvoltăm (1.4):

$$\left[\partial_\mu\partial^\mu + \frac{i}{\hbar}q\,\partial_\mu A^\mu + \frac{i}{\hbar}qA_\mu\partial^\mu - \frac{q^2}{\hbar^2}A_\mu A^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\psi = 0$$

separăm în membrul stâng partea K-G de particulă liberă, iar în membrul drept partea de interacţie, unde scoatem A^μ prin o dublă transformare $covariant \leftrightarrow contravariant$ $A_\mu\partial^\mu \leftrightarrow A^\mu\partial_\mu$,

$$\left[\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\psi = \underbrace{\left[-\frac{i}{\hbar}q\Big(\partial_\mu A^\mu + \underbrace{A_\mu\partial^\mu}_{A^\mu\partial_\mu}\Big) + \frac{q^2}{\hbar^2}A_\mu A^\mu\right]}_{-\hat{V}}\psi \equiv -\hat{V}\psi \tag{1.5}$$

unde identificăm operatorul potenţial de interacţie:

$$\boxed{\hat{V}(x) = \frac{i}{\hbar}q\Big(\partial_\mu A^\mu + A^\mu\partial_\mu\Big) - \frac{q^2}{\hbar^2}A_\mu A^\mu} \tag{1.6}$$

Semnul lui $\hat{V}$ s-a ales ca să fie acelaşi cu semnul termenului de energie cinetică $\partial_i\partial^i$ $\Big(\partial_\mu\partial^\mu = \partial_0\partial^0 - \partial_i\partial^i\Big)$ din ecuaţia Schrödinger: $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_i\partial^i\right)\psi = \big(E - V\big)\psi$

- Potenţialul V este caracterizat prin parametrul sarcină electrică q, care prin sarcina elementară e este legat de constanta de structură fină $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$ şi care măsoară tăria interacţiei electromagnetice. Valoarea mică a acestui parametru de cuplaj EM permite dezvoltarea V în serie de puteri ale lui α. De aceea, în primul ordin de dezvoltare în serie de puteri, termenul $q^2A^2 \equiv q^2A_\mu A^\mu$ din V se poate omite.

1.2 Potenţialul perturbator de interacţie a particulelor de spin 1/2

- Vom relua dezvoltările anterioare, de data asta pentru particule cu spin 1/2. Adică vom descrie interacţiile electromagnetice ale cuarcilor şi leptonilor. Aceste particule sunt descrise de ecuaţia Dirac, iar rezultatul va consta în regulile Feynman pentru interacţia electromagnetică a cuarcilor şi leptonilor de spin 1/2.

- Pornim de la ecuaţia Dirac originală, pentru o particulă plasată în potenţialul V.

$$\left(\frac{\hat{E}}{c} - \alpha\cdot\hat{p} - \beta\, mc\right)\psi = \hat{V}\psi$$

Apoi, pentru a evidenţia matricile γ, înmulţim la stânga cu β şi trecem la operatorii diferenţiali:

$$\beta\times \left|\left(\frac{\hat{E}}{c} - \alpha^k\,\hat{p}_k - \beta\, mc\right)\psi = \hat{V}\psi \right. \quad \text{înlocuim} \begin{cases} \beta = \gamma^0 \quad \text{şi} \quad \beta\alpha^k = \gamma^k \\ \hat{E}/c \to i\hbar\,\partial_0 \quad \text{şi} \quad \hat{p}_k \to -i\hbar\,\partial_k \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\Big(i\hbar\gamma^0\partial_0 + i\hbar\gamma^k\partial_k - mc\Big)}_{i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc}\psi = \gamma^0 V\psi \qquad \text{deoarece} \quad \beta\beta = 1 \tag{1.7}$$

- Pe de altă parte, ecuaţia Dirac pentru un electron de sarcină $q = -e$ aflat într-un câmp electromagnetic A^μ, este

$$\Big(\underbrace{i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc}_{\text{ecuaţia Dirac pt. particula liberă}} + \underbrace{e\gamma^\mu A_\mu}_{\text{interacţie în câmp EM}}\Big)\psi = 0 \tag{1.8}$$

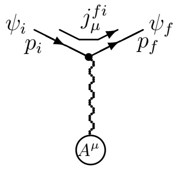
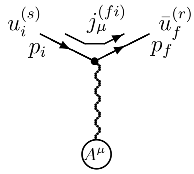
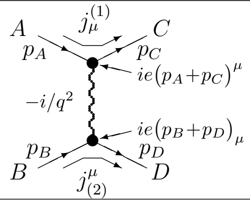
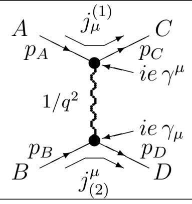
- La fel ca în cazul Klein-Gordon (1.5) pag.4, separăm partea de particulă liberă în membrul stâng, iar în cel drept identificăm potenţialul de interacţie cu $\gamma^0 V$ din (1.7).

$$\begin{aligned}\Big(i\hbar\,\gamma^\mu\partial_\mu - mc\Big)\psi &= -e\,\gamma^\mu A_\mu\psi \\ &= \gamma^0 V\,\psi\end{aligned} \tag{1.9}$$

Astfel am separat operatorul potenţial de interacţie (perturbaţia):

$$\gamma^0 V = -e\gamma^\mu A_\mu$$

1.3 Construcţie diagrame Feynman

	Curenţi de particule Klein-Gordon	**Curenţi de particule Dirac (electroni)**
Amplitudinea de tranziţie		
Amplitudinea de tranziţie (împrăştiere), în aproximaţia întâi din teoria perturbaţiilor, a unei particule de sarcină q_1, între stările ψ_i în ψ_f datotită unui potenţial perturbator $\hat{V}(x)$ de natură electromagnetică,	$T_{fi}=-\frac{i}{\hbar}\int\psi_f^*(x)\,\hat{V}(x)\,\psi_i(x)\,d^4x$ $=-\frac{i}{\hbar}\int\psi_f^*\,\overbrace{i\,q_1\left(\partial_\mu A^\mu+A^\mu\partial_\mu\right)}^{\hat{V}(x)}\,\psi_i\,d^4x$	$T_{fi}=-\frac{i}{\hbar}\int\psi_f^\dagger(x)\,\overset{(\gamma^0)^2}{\downarrow}\,\hat{V}(x)\psi_i(x)\,d^4x$ $=\frac{i}{\hbar}\int\overbrace{\bar{\psi}_f(x)}^{\psi^\dagger\gamma^0}\,\overbrace{\left(-e\,\gamma_\mu\,A^\mu\right)}^{\gamma^0\hat{V}(x)}\,\psi_i(x)\,d^4x$
Rescriem amplitudinea de tranziţie T_{fi} cu separarea unui curent de tranziţie j^{fi}_μ şi a câmpului electromagnetic A^μ:	$T_{fi}=-\frac{i}{\hbar}\int\underbrace{i\,q_1\left[\psi_f^*\,(\partial_\mu\psi_i)-(\partial_\mu\psi_f^*)\psi_i\right]}_{j^{fi}_\mu(x)}A^\mu\,d^4x$	$T_{fi}=-\frac{i}{\hbar}\int\underbrace{\left(-e\,\bar{\psi}_f\,\gamma_\mu\,\psi_i\right)}_{j^{fi}_\mu}A^\mu\,d^4x$
atunci, amplitudinea de tranziţie se poate scrie:	$T_{fi}=-\frac{i}{\hbar}\int j^{fi}_\mu\,A^\mu\,d^4x$	$T_{fi}=-\frac{i}{\hbar}\int j^{fi}_\mu\,A^\mu\,d^4x$
Curentul de tranziţie de particulă		
Am identificat curentul de tranziţie $i\to f$, exprimat prin stările ψ_i şi ψ_f:	$j^{fi}_\mu(x)=i\,q_1\left[\psi_f^*(\partial_\mu\psi_i)-(\partial_\mu\psi_f^*)\psi_i\right]$	$j^{fi}_\mu(x)=-e\,\bar{\psi}_f\,\gamma_\mu\,\psi_i$
Diagrama Feynman de împrăştiere pe câmpul electromagnetic A^μ		
Mişcarea particulelor externe cu p_i, respectiv p_f, este descrisă de unda plană:	$\begin{cases}\psi_i(x)=N_i\,e^{-i\,p_i\cdot x/\hbar}\\ \psi_f^*(x)=N_f\,e^{i\,p_f\cdot x/\hbar}\end{cases}$ unde, N_i şi N_f constante de normare	$\begin{cases}\psi_i(x)=u_i(\vec{p})\,e^{-i\,p_i\cdot x/\hbar}\\ \bar{\psi}_f(x)=\bar{u}_f(\vec{p})\,e^{i\,p_f\cdot x/\hbar}\end{cases}$ unde, u_i şi $\bar{u}_f$ sunt spinorii Dirac
Curentul de tranziţie j^{fi}_μ din diagrama Feynman de mai sus,	$j^{fi}_\mu=\frac{q_1}{\hbar}N_iN_f\,(p_i+p_f)_\mu e^{i\,(p_f-p_i)\cdot x/\hbar}$	$j^{fi}_\mu=\left(-e\bar{u}_f\gamma_\mu u_i\right)\,e^{i(p_f-p_i)\cdot x/\hbar}$
Câmpul de schimb A^μ (fotoni)		
Diagrama Feynman de împrăştierea reciprocă a două particule încărcate		
unde curentul $j^\mu_{(2)}$, ca sursă a câmpului A^μ, este similar j^μ_{fi}	$j^\mu_{(2)}=\frac{q_2}{\hbar}N_BN_D\,(p_D+p_B)^\mu\,e^{i\,(p_D-p_B)\cdot x/\hbar}$	$j^\mu_{(2)}=\left(-e\bar{u}_D\gamma^\mu u_B\right)\,e^{i\,(p_D-p_B)\cdot x/\hbar}$
Câmpul A^μ produs de curentul $j^{(2)}_\mu$, conform ecuaţiei Maxwell	$\partial_\nu\partial^\nu A^\mu=j^\mu_{(2)}$	
Câmpul electromagnetic A^μ, este o undă plană: $A^\mu\sim e^{iq\cdot x}$, unde q este 4-impulsul fotonului. Atunci,	$\partial_\nu\partial^\nu A^\mu=\partial_\nu\partial^\nu e^{i\,q\cdot x/\hbar}=-q^2e^{i\,q\cdot x/\hbar}=-q^2A^\mu$	
Atunci, legătura între câmpul A^μ şi sursa acestuia $j^\mu_{(2)}$ este:	$A^\mu=-\frac{1}{q^2}j^\mu_{(2)}$ unde $q=p_D-p_B$	
Amplitudinea invariantă		
Introducând A^μ în amplitudinea de tranziţie obţinem:	$T_{fi}=-\frac{i}{\hbar}\int j^{(1)}_\mu(x)\left(-\frac{1}{q^2}\right)j^\mu_{(2)}(x)\,d^4x$	
Folosim curenţii $j^{(1)}_\mu$ şi $j^\mu_{(2)}$:	$\begin{cases}j^{(1)}_\mu=\frac{q_1}{\hbar}N_AN_C\,(p_A+p_C)_\mu e^{i\,(p_C-p_A)\cdot x/\hbar}\\ j^\mu_{(2)}=\frac{q_2}{\hbar}N_BN_D\,(p_B+p_D)^\mu e^{i\,(p_D-p_B)\cdot x/\hbar}\end{cases}$	$\begin{cases}j^{(1)}_\mu=-e\,\bar{\psi}_C\,\gamma_\mu\,\psi_A\\ \quad=\left(-e\,\bar{u}_C\,\gamma_\mu\,u_A\right)e^{i(p_C-p_A)\cdot x/\hbar}\\ j^\mu_{(2)}=-e\,\bar{\psi}_D\,\gamma^\mu\,\psi_B\\ \quad=\left(-e\,\bar{u}_D\,\gamma^\mu\,u_B\right)e^{i(p_D-p_B)\cdot x/\hbar}\end{cases}$
In final, amplitudinea de tranziţie va fi:	$T_{fi}=-\frac{i}{\hbar^3}N_AN_BN_CN_D(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_D+p_C-p_B-p_A)\,\mathcal{M}$	$T_{fi}=-\frac{i}{\hbar}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_D+p_C-p_B-p_A)\mathcal{M}$
unde $\mathcal{M}$ este *amplitudinea invariantă*	$\mathcal{M}=\left[q_1\,(p_A+p_C)_\mu\right]\left(-\frac{1}{q^2}\right)\left[q_2\,(p_B+p_D)^\mu\right]$	$\mathcal{M}=\left(-e\,\bar{u}_C\,\gamma_\mu\,u_A\right)\left(-\frac{1}{q^2}\right)\left(-e\,\bar{u}_D\,\gamma^\mu\,u_B\right)$
deseori $\mathcal{M}$ se exprimă ca mărime imaginară:	$-i\mathcal{M}=\left[-iq_1(p_A+p_C)^\mu\right]\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)\left[-iq_2(p_B+p_D)^\nu\right]$	$-i\mathcal{M}=\left(i\,e\,\bar{u}_C\,\gamma^\mu\,u_A\right)\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)\left(i\,e\,\bar{u}_D\,\gamma^\nu\,u_B\right)$