

Procese QED în câmpuri laser intense
tema 30

M. Penția

September 9, 2021

”Verbum sapienti sat est”

Cuprins

1	Perturbații dependente de timp	4
1.1	Amplitudinea de tranziție în aproximația de ordin întâi	5
1.2	Amplitudinea de tranziție în aproximația de ordin doi	5
2	Originea propagatorului	7

Capitol 1

Perturbații dependente de timp

- Căutăm soluția $\psi(\vec{x}, t)$ de câmp dependentă de timp, în cazul nerelativist, cu perturbația $V(\vec{x}, t)$.
- Soluțiile se caută ca dezvoltări (superpoziții) de unde plane (particule libere), sub forma,

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_n c_n(t) \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t/\hbar} \quad (1.1)$$

- In prezența perturbației $V(\vec{x}, t)$, se schimbă propagarea unei unde plane inițiale ψ_i . Are loc o tranziție pe una din stările de superpoziție (1.1): $\psi_f(t) = c_f^{(1)}(t) \phi_f(\vec{x}) e^{-iE_f t/\hbar}$
- Prin aproximații succesive $n = 1, 2, \dots$ se caută amplitudinile stărilor finale (amplitudinile de tranziție) $c_f^{(n)}(t)$. In primă aproximație, avem:

$$c_f^{(n)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t c_i^{(n-1)}(t') V_{fi}(t') e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} dt' \quad (1.2)$$

unde elementul de matrice este $V_{mn}(t) = \int \phi_m^*(\vec{x}) \hat{V}(\vec{x}, t) \phi_n(\vec{x}) d^3\vec{x}$

$\phi_n(\vec{x})$ sunt stările staționare (independente de timp) nerelativiste.

- Plecând de la o singură stare inițială staționară $\phi_i(\vec{x})$, de amplitudine $c_i^{(0)}(t) = 1$, atunci *amplitudinea stărilor finale* $c_f(t)$ se obține prin aproximații succesive:

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t c_i^{(0)}(t''') V_{ni}(t''') e^{i(E_n - E_i)t'''/\hbar} dt''' \quad (i \rightarrow n) \quad (1.3)$$

$$c_m^{(2)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t c_n^{(1)}(t'') V_{mn}(t'') e^{i(E_m - E_n)t''/\hbar} dt'' \quad (n \rightarrow m) \quad (1.4)$$

$$c_f^{(3)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t c_m^{(2)}(t') V_{fm}(t') e^{i(E_f - E_m)t'/\hbar} dt' \quad (m \rightarrow f) \quad (1.5)$$

1.1 Amplitudinea de tranziție în aproximația de ordin întâi

- Cu o singură stare inițială de amplitudine $c_i^{(0)}(t) = 1$, modificarea amplitudinii (corecția în aproximația întâi) este dată de (1.3):

$$T_{ni}^{(1)} = c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_{ni}(t') e^{i(E_n - E_i)t'/\hbar} dt' \quad (i \rightarrow n) \quad (1.6)$$

Cu amplitudinea de tranziție $T_{ni}(t)$ (1.6) putem afla probabilitatea de tranziție $\psi_i \rightarrow \psi_n$.

- În cazul în care starea n este stare finală f , iar potențialul $V(\vec{x}, t) = V(\vec{x})$ este independent de timp, cu integrarea între $-\infty$ și $+\infty$, amplitudinea de tranziție în starea finală, în aproximația de ordin întâi va fi:

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} V_{fi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} dt'}_{2\pi\delta[(E_f - E_i)/\hbar]} = -2\pi i V_{fi} \delta(E_f - E_i) \quad (1.7)$$

unde \hbar s-a simplificat, deoarece $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{a}$ cu $a = \frac{1}{\hbar}$ și $x = E_f - E_i$.

1.2 Amplitudinea de tranziție în aproximația de ordin doi

- Având mai multe soluții $\psi_n(t)$ de unde parțiale după prima iterație, cu corecțiile $c_n^{(1)}(t)$ (1.6), atunci după a doua iterație, corecția pentru amplitudinea de tranziție finală $c_f^{(2)}(t)$, va fi o sumă după toate amplitudinile $c_n^{(1)}(t)$

$$T_{fn}^{(2)} = c_f^{(2)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_n \int_{t_0}^t c_n^{(1)}(t') V_{fn}(t') e^{i(E_f - E_n)t'/\hbar} dt' \quad (n \rightarrow f) \quad (1.8)$$

înlocuind, amplitudinea $c_n^{(1)}(t)$ (1.6), cu $V_{ni} \sim \text{const}$ și $V_{fn} \sim \text{const}$, corecția în aproximația de ordin doi $c_f^{(2)}(t)$ a stării finale, este:

$$T_{fi}^{(2)} = c_f^{(2)}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{n \neq i} V_{fn} V_{ni} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E_f - E_n)t/\hbar} dt \int_{-\infty}^t e^{i(E_n - E_i)t'/\hbar} dt' \quad (i \rightarrow n \rightarrow f) \quad (1.9)$$

- Pentru a face ca integrala după dt' să aibe sens fizic, trebuie să introducem un nou termen în exponent, o mărime pozitivă mică ϵ , pe care apoi o facem să tindă la zero, după integrare

$$\int_{-\infty}^t e^{i(E_n - E_i - i\epsilon)t'/\hbar} dt' = \frac{e^{i(E_n - E_i - i\epsilon)t/\hbar}}{i(E_n - E_i - i\epsilon)/\hbar} \Big|_{-\infty}^t = i\hbar \frac{e^{i(E_n - E_i - i\epsilon)t/\hbar}}{E_i - E_n + i\epsilon} \quad (1.10)$$

- Folosind legătura cu funcția δ (vezi Anexa):
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E_f - E_n)t/\hbar} e^{i(E_n - E_i)t/\hbar} dt = 2\pi \hbar \delta(E_f - E_i)$$

corecția amplitudinii de tranziție, în aproximația de ordin doi $c_f^{(2)}$ (1.9) va fi:

$$T_{fi}^{(2)} = c_f^{(2)}(t) = -2\pi i \sum_{n \neq i} \frac{V_{fn} V_{ni}}{E_i - E_n + i\epsilon} \delta(E_f - E_i) \quad (i \rightarrow n \rightarrow f) \quad (1.11)$$

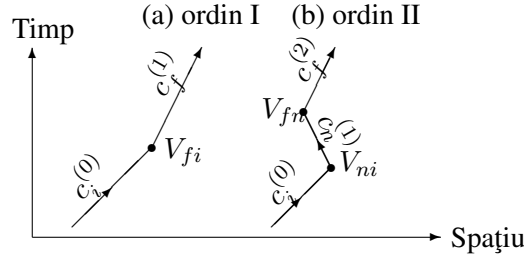


Figura 1.1: Propagarea stărilor de câmp în cazul unor perturbații V_{fi} (1.8) de ordin I și V_{fn} și V_{ni} de ordin II la tranziția $i \rightarrow f$

- Rata tranziției $i \rightarrow f$ în aproximația de ordin doi, se obține din sumarea contribuțiilor celor doi termeni din seria de aproximații a amplitudinii de tranziție (1.7) și (1.11)

$$T_{fi}^{(1)} = -2\pi i V_{fi} \delta(E_f - E_i) \quad (1.7)$$

$$T_{fi}^{(2)} = -2\pi i \sum_{n \neq i} \frac{V_{fn} V_{ni}}{E_i - E_n + i\epsilon} \delta(E_f - E_i) \quad (1.11)$$

adică se face substituția

$$V_{fi} \rightarrow V_{fi} + \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n + i\epsilon} V_{ni} + \dots \quad (i \rightarrow n \rightarrow f) \quad (1.12)$$

- Ecuația (1.12) reprezintă dezvoltarea amplitudinii în serie de termeni perturbativi în V . Această dezvoltare s-a făcut în cadrul "old-fashioned perturbation theory" (OFPT). Diagramele din Figura 1.1 reprezintă primii doi termeni din seria de perturbații nerelativiste.
- Pentru fiecare vertex de interacție avem un factor V_{ni} , iar propagarea fiecărei stări intermediare se exprimă prin factorul de "propagare" $1/(E_i - E_n)$. Stările intermediare sunt "virtuale", în sensul că energia nu se conservă, $E_n \neq E_i$, însă avem conservarea energiei între stările inițiale și cele finale, $E_f = E_i$, după cum indică funcția delta $\delta(E_f - E_i)$. Problema centrală este generalizarea acestei scheme pentru a putea descrie și particulele relativiste, inclusiv antiparticulele.

Capitol 2

Originea propagatorului

- Am văzut anterior că o linie ondulată de foton virtual corespunde unui propagator $1/q^2$, unde q este 4-impulsul transferat de acest foton.
- De exemplu, propagatorul fonic din procesul de anihilare $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow e^-e^+$ din Fig.2.1 este de forma $1/q^2$, unde $q=p_A + p_B$ este dat de conservarea 4-impulsului.

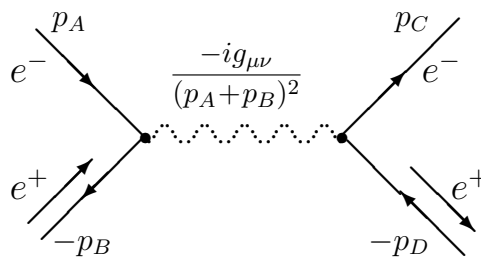


Figura 2.1: Diagrama Feynman de anihilare $e^-e^+ \rightarrow \gamma \rightarrow e^-e^+$.

- În general o particulă de masă m poate constitui un propagator de tip $1/(p^2c^2 - m^2c^4)$. La început studiem propagatorul fonic din Fig.2.1 între cele două vertex-uri de interacție. În acest caz putem interpreta diagrama Feynman ca o descriere a termenului de ordin doi (1.11) din seria de perturbații nerelativiste, ordonate temporal, pe care o vom folosi la generalizarea relativistă.

$$T_{fi}^{(2)} = -i \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} V_{ni} 2\pi \delta(E_f - E_i) \quad (1.11)$$

- Să vedem cum se face trecerea la propagator prin diferența de energii relativiste: $\frac{1}{E_i - E_n} \rightarrow \frac{1}{(p_A + p_B)^2 c^2}$ (2.1)
- O diagrama Feynman este o sumă de diagrame ordonate temporal. Astfel, pentru cazul din Fig.2.1 avem două diagrame ordonate temporal.

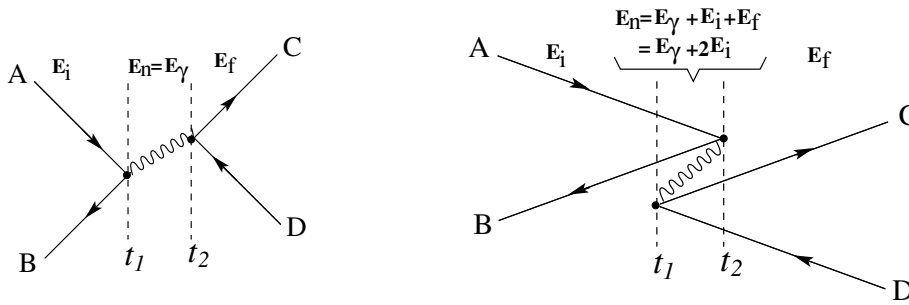


Figura 2.2: Diagrama Feynman de anihilare $e^- e^+ \rightarrow \gamma \rightarrow e^- e^+$ în OFPT

- Amplitudinea de tranziție (partea invariantă), în aproximația de ordin doi, va fi de forma

$$\mathcal{M} \sim V_{fn} \frac{1}{E_i - E_\gamma} V_{ni} + V_{fn} \frac{1}{E_i - 2E_i - E_\gamma} V_{ni} = V_{fn} \frac{2E_\gamma}{E_i^2 - E_\gamma^2} V_{ni} \quad (2.2)$$

- Metoda de calcul folosită aici este numită "old-fashioned perturbation theory" (OFPT).
 În OFPT impulsul 3-dim. se conservă în fiecare vertex, nu însă și energia particulelor virtuale (vezi pag.6). Totuși acestea se află "on mass shell" ($p^2 = m^2 c^2$).

- Pentru evaluarea propagatorului ținem cont de relația $p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2$
- $$\left. \begin{array}{l} E_i^2 = (E_A + E_B)^2 = (p_A + p_B)^2 c^2 + (\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2 c^2 \\ E_\gamma^2 = m_\gamma^2 c^4 + \vec{p}_\gamma^2 c^2 \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

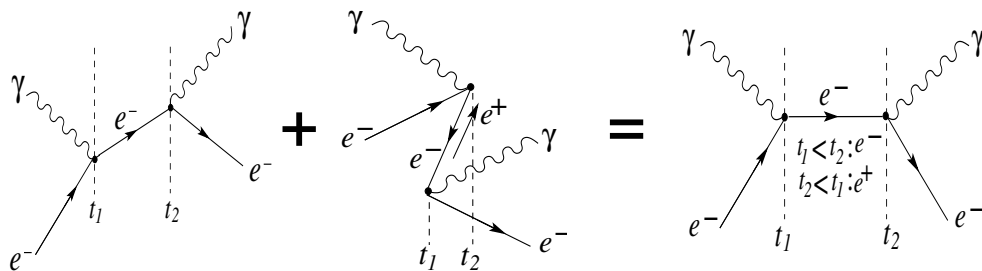
- Deoarece $\vec{p}_\gamma = \vec{p}_A + \vec{p}_B$ din (2.3) propagatorul este:
$$\frac{1}{E_i^2 - E_\gamma^2} = \frac{1}{(p_A + p_B)^2 c^2 - m_\gamma^2 c^4} = \frac{1}{q^2} \quad (2.4)$$

- Am specificat în (2.4) masa particulei de schimb ca m_γ (deși pentru foton $m_\gamma = 0$), pentru a putea fi utilă și în cazul în care avem o particulă de schimb cu $m \neq 0$. Generalizarea relativistă a propagatorului pentru o particulă de schimb de masă m și spin zero, este:

$$\frac{1}{(p_A + p_B)^2 c^2 - m^2 c^4} = \frac{1}{p^2 c^2 - m^2 c^4} \quad (2.5)$$

- Fiecare din cele două diagrame ordonate temporal din Fig.2.2 (considerate separat) nu sunt invariante. Prin includerea celui de-al doilea termen alături de primul (nerelativist), s-a obținut o expresie invariantă.
- Diferența importantă față de OFPT din tratare nerelativistă a perturbațiilor este că acum atât energia cât și impulsul 3-dimensional se conservă în fiecare vertex.

- Un alt exemplu, cu electronul ca particulă de schimb este procesul $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$. În acest caz putem face comparația dintre tratarea nerelativistă a OFPT (vechea teorie a perturbațiilor) cu teoria perturbațiilor covariante (tratarea relativistă).



În OFPT impulsul 3-dimensional se conservă în fiecare vertex, nu însă și energia. Particula de schimb se află "on mass shell": $p^2 = m^2 c^2$

Impulsul 4-dim se conservă în fiecare vertex, inclusiv energia (vezi (1.11)). Particula de schimb însă nu se află "on mass shell" $p^2 \neq m^2 c^2$.

Figura 2.3: Diagrama Feynman $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$.

- Diagrama Feynman rezultată cuprinde ambele posibilități, în care particula de schimb este un electron cu secvența temporală $t_1 < t_2$, sau un pozitron în cazul inversării temporale $t_2 < t_1$ a evenimentelor.