

Procese QED în câmpuri laser intense
tema 34

M. Penția

October 8, 2021

”Verbum sapienti sat est”

Cuprins

1	Procese QED perturbative de ordin întâi	4
1.1	Imprăștierea Møller: $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$	6
1.2	Imprăștierea $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$	7
1.3	Imprăștierea $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$	8
1.4	Imprăștierea $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$	9
1.5	Imprăștierea Compton $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$	10
1.6	Imprăștierea $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$	12

Capitol 1

Procese QED perturbative de ordin întâi

- Luăm diagramele Feynman de ordin cel mai scăzut, cu două vertex-uri între care avem un foton virtual de schimb:

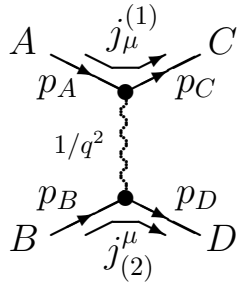


Figura 1.1: Diagrame Feynman de împrăștiere $AB \rightarrow CD$.

- Amplitudinea de tranziție:
$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar^2} \int j_\mu^{(1)}(x) \left(-\frac{1}{q^2}\right) j_\mu^{(2)}(x) d^4x \quad (1.1)$$

- Folosind curenții Dirac $j_\mu^{(1)}$ și $j_\mu^{(2)}$:
$$\begin{cases} j_\mu^{(1)} = -e \bar{\psi}_C \gamma_\mu \psi_A = (-e \bar{u}_C \gamma_\mu u_A) e^{i(p_C - p_A) \cdot x} \\ j_\mu^{(2)} = -e \bar{\psi}_D \gamma_\mu \psi_B = (-e \bar{u}_D \gamma_\mu u_B) e^{i(p_D - p_B) \cdot x} \end{cases} \quad (1.2)$$

- Efectuând integrarea după x în expresia amplitudinii de tranziție (1.1), obținem

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -\frac{i}{\hbar^2} \underbrace{\left(-e \bar{u}_C \gamma_\mu u_A\right) \left(-\frac{1}{q^2}\right) \left(-e \bar{u}_D \gamma^\mu u_B\right)}_{\mathcal{M}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_D + p_C - p_B - p_A) \\ &= -\frac{i}{\hbar^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_D + p_C - p_B - p_A) \mathcal{M} \end{aligned}$$

unde transferul de 4-impuls $q = p_C - p_A$, iar amplitudinea invariantă \mathcal{M} este:

$$\mathcal{M} = \left(e \bar{u}_C \gamma^\mu u_A \right) \left(\frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} \right) \left(e \bar{u}_D \gamma^\mu u_B \right) \quad (1.3)$$

- Pe baza amplitudinii invariante \mathcal{M} se determină secțiunea eficace diferențială de împrăștiere (interacție):

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{F} dQ \quad (1.4)$$

- unde F este fluxul de particule incidente, iar dQ este elementul de spațiul fazelor invariant Lorentz

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D} \quad (1.5)$$

1.1 Împrăștierea Møller: $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$

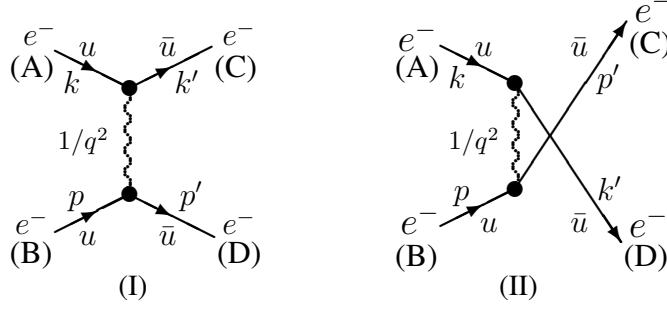


Figura 1.2: Diagramele Feynman împrăștiere $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ (Møller)

$$\mathcal{M} = -e^2 \frac{(\bar{u}_C \gamma_\mu u_A)(\bar{u}_D \gamma^\mu u_B)}{(k' - k)^2} + e^2 \frac{(\bar{u}_D \gamma_\mu u_A)(\bar{u}_C \gamma^\mu u_B)}{(k' - k)^2} \quad (1.6)$$

- Evaluarea secțiunii eficace de împrăștiere e^-e^- nepolarizați și nerelativiști $|\vec{p}| \rightarrow 0$ utilizăm spinorii pentru e^- incident și e^- emergent, exprimați prin stările de spin $\chi^{(1)} \uparrow$ și $\chi^{(2)} \downarrow$:

$$e^- \text{ incident: } u^{(s)} = \sqrt{2mc^2} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

$$e^- \text{ emergent: } \bar{u}^{(s)} = \sqrt{2mc^2} (\chi^{(s)\dagger} \quad 0)$$

- In calculul secțiunii eficace de împrăștiere a electronilor cu medierea polarizării, ca în cazul experimental, luăm toate configurațiile posibile de spin.

$$|\mathcal{M}|^2 \longrightarrow \overline{|\mathcal{M}|^2} \equiv \frac{1}{(2s_A+1)(2s_B+1)} \sum_{\text{toate stările de spin}} |\mathcal{M}|^2 \quad (1.8)$$

Prin sumarea și medierea celor opt combinații posibile de stări de spin: $\uparrow\uparrow \rightarrow \uparrow\uparrow$ (I)+(II), $\downarrow\downarrow \rightarrow \downarrow\downarrow$ (I)+(II), $\uparrow\downarrow \rightarrow \uparrow\downarrow$ (I), $\downarrow\uparrow \rightarrow \downarrow\uparrow$ (I), $\uparrow\downarrow \rightarrow \downarrow\uparrow$ (II), $\downarrow\uparrow \rightarrow \uparrow\downarrow$ (II) obținem:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4} (4m^2c^4e^2)^2 2 \left[\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u} \right)^2 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} \right] \quad (1.9)$$

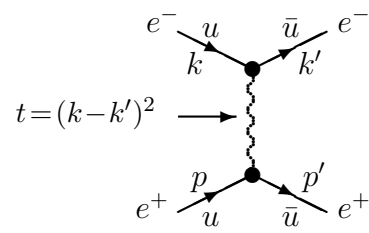
Unde variabilele Mandelstam în SCM sunt

$$\begin{cases} t = -2p^2(1 - \cos \theta) = -4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ u = -2p^2(1 + \cos \theta) = -4p^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

- unde θ este unghiul de împrăștiere, iar $p = |\vec{p}_i|$ cu $i = A, B, C, D$. Inlocuind $|\mathcal{M}|^2$ în relația ce face legătura cu secțiunea eficace, obținem expresia secțiunii eficace diferențială de împrăștiere Møller e^-e^- :

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{scm} = \frac{1}{64\pi^2s} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} |\mathcal{M}|^2 = \frac{m^2c^4\alpha^2}{16p^4} \left(\frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right) \quad (1.10)$$

unde $\alpha = e^2/4\pi$.

1.2 Imprăștierea $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ Figura 1.3: Diagrama Feynman împrăștiere $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$ (Bhabha)

1.3 Imprăștierea $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

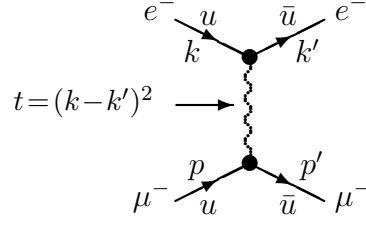
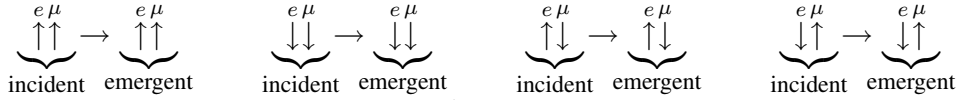


Figura 1.4: Diagrama Feynman de împrăștiere $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

$$\mathcal{M} = -e^2 \left(\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \right) \left(\frac{1}{q^2} \right) \left(\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \right) \quad (1.11)$$

- Pentru a obține secțiunea eficace (nepolarizată), va trebui să mediem pătratul amplitudinii invariante după componentele de spin inițiale și sumare după componentele de spin finale. Separăm sumele după spinii electronului și ai muonului, adică:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \equiv \frac{1}{(2(1/2)+1)(2(1/2)+1)} \sum_{\text{toate stările de spin}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} L_{el}^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{muon}$$



unde tensorul asociat cu vertexul de electron este

$$L_{el}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{e^-} \left[\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \right] \left[\bar{u}(k') \gamma^\nu u(k) \right]^*$$

similar, tensorul asociat cu vertexul de muon este

$$L_{\mu\nu}^{mu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu^-} \left[\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \right] \left[\bar{u}(p') \gamma_\nu u(p) \right]^*$$

- folosind teoremele de trace, $L_{el}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} Tr \left[(k' + mc^2) \gamma^\mu (k + mc^2) \gamma^\nu \right]$
 $= 2 \left(k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - (k' \cdot k - m^2 c^4) g^{\mu\nu} \right)$
 similar $L_{\mu\nu}^{mu} = 2 \left(p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - (p' \cdot p - M^2 c^4) g_{\mu\nu} \right)$

unde m este masa electronului, iar M este masa muonului.

- La limita relativistă, putem neglija termenii cu $m^2 c^4$ și $M^2 c^4$, de aceea,

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{(k - k')^4} \left[(k' \cdot p')(k \cdot p) + (k' \cdot p)(k \cdot p') \right] \quad (1.12)$$

- In plus, la această limită, variabilele Mandelstam devin:

$$\begin{cases} s \equiv (k + p)^2 = 2k \cdot p = 2k' \cdot p' \\ t \equiv (k - k')^2 = -2k \cdot k' = -2p \cdot p' \\ u \equiv (k - p')^2 = -2k \cdot p' = -2k' \cdot p \end{cases} \quad (1.13)$$

- Astfel, la energii înalte, împrăștierea $e^- \mu^-$ nepolarizată, are amplitudinea invariantă

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2} \quad (1.14)$$

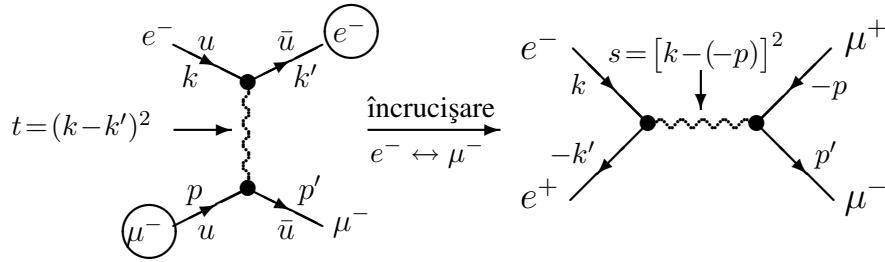
1.4 Imprăștierea $e^- e^+ \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 

Figura 1.5: Diagrama Feynman $e^- e^+ \rightarrow \mu^+ \mu^-$, obținută din interacția $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ prin încrucișarea $e^- \leftrightarrow \mu^-$

$$\mathcal{M} = -e^2 \left(\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \right) \left(\frac{1}{q^2} \right) \left(\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \right) \quad (1.11)$$

- Bazat pe rezultatele anterioare, putem obține imediat amplitudinea pentru interacția $e^- e^+ \rightarrow \mu^+ \mu^-$. Din interacția anterioară $e^-(k) \mu^-(p) \rightarrow e^-(k') \mu^-(p')$, facem "încrucișarea" $\mu^-(p) \leftrightarrow e^-(k')$, adică facem trecerea $e^-(k')$ final la $e^+(-k')$ inițial și a $\mu^-(p)$ inițial la $\mu^+(-p)$ final. Interschimbarea termenilor (1.13) face $k' \leftrightarrow -p$, cu schimbarea semnului 4-impulsurilor, adică se interschimbă canalele $s \leftrightarrow t$ în (1.14).

- Atunci, interacția $e^- e^+ \rightarrow \mu^+ \mu^-$ are amplitudinea invariantă (1.12),
$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2} \quad (1.15)$$

- De data asta interacția $e^- e^+ \rightarrow \mu^+ \mu^-$ este un proces pe canalul s , iar diagrama corespunzătoare este prezentată în Figura 1.5.

- Folosind legătura cu secțiunea eficace diferențială
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{scm} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \quad (1.16)$$

- Atunci, secțiunea eficace diferențială pentru împrăștierea $e^- e^+ \rightarrow \mu^+ \mu^-$,
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{scm} = \frac{1}{64\pi^2 s} 2e^4 \left[\frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \right] \quad (1.17)$$

mărimea din parantezele drepte este $(t^2 + u^2)/s^2$ din expresia (1.15).

1.5 Împrăștierea Compton $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$

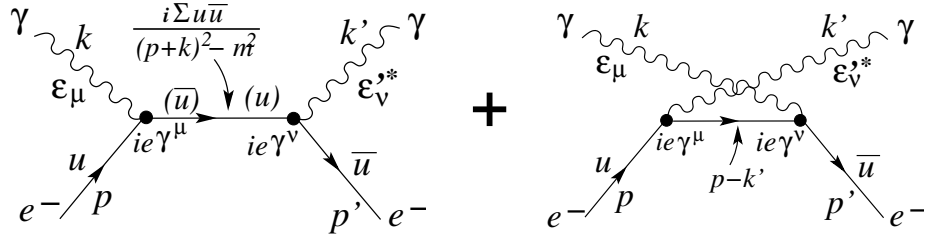


Figura 1.6: Diagramele Feynman de împrăștiere Compton $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$

- Cele două diagrame Feynman de prim ordin pentru împrăștierea Compton sunt prezentate în Fig.1.6, unde sunt indicați și factorii de calcul ai amplitudinii invariante.

- Pentru fotonul incident avem ecuația unei plane:
$$A_\mu = \epsilon_\mu e^{-ik \cdot x / \hbar} \quad (1.18)$$

unde ϵ_μ este vectorul de polarizare al fotonului. Prin integrare după x exponențiala dispare, și apare condiția de conservare a 4-impulsului în vertex.

De aceea, vom atașa liniei fotonice, ca funcție de stare, doar factorul ϵ_μ .

Similar, pentru fotonul emergent ($\epsilon'_\nu e^{-ik' \cdot x / \hbar}$)*, atașăm, ca funcție de stare, factorul $(\epsilon'_\nu)^*$.

- atunci, termenul de vertex electron-foton, este:
$$|\quad (\bar{u} \gamma^\mu u) \epsilon_\mu \quad (1.19)$$

- De data asta, \bar{u} este deja conținut în propagatorul de electron, iar starea ϵ_μ este inclusă în fotonul incident. Folosind regulile Feynman, obținem următoarele amplitudini invariante pentru cele două diagrame Feynman:

$$-i\mathcal{M}_1 = \bar{u}^{(s')}(p') \left[\epsilon'_\nu{}^* (ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2} (ie\gamma^\mu) \epsilon_\mu \right] u^{(s)}(p) \quad (1.20)$$

$$-i\mathcal{M}_2 = \bar{u}^{(s')}(p') \left[\epsilon'_\mu{}^* (ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2} (ie\gamma^\nu) \epsilon'_\nu{}^* \right] u^{(s)}(p) \quad (1.21)$$

unde p, s și p', s' sunt 4-impulsul și spinul electronului incident, respectiv emergent. Similar, k, ϵ și k', ϵ' sunt 4-impulsul și vectorul polarizare a fotonului incident respectiv emergent.

- De remarcat, amplitudinea invariantă a împrăștierii Compton ($\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$) este simetrică la interschimbarea (încrucșarea) celor doi fotoni.
$$k, \epsilon \longleftrightarrow k', \epsilon'^* \quad (1.22)$$

- In continuare vom neglija masa electronului, astfel variabilele Mandelstam (1.13) pentru procesul $\gamma(k) + e(p) \rightarrow \gamma(k') + e(p')$, sunt
$$\begin{cases} s \equiv (k+p)^2 = 2k \cdot p = 2k' \cdot p' \\ t \equiv (k-k')^2 = -2k \cdot k' = -2p \cdot p' \\ u \equiv (k-p')^2 = -2k \cdot p' = -2k' \cdot p \end{cases} \quad (1.13)$$

- Cele două amplitudini invariante, (1.20) și (1.21), sunt
$$\begin{cases} \mathcal{M}_1 = \epsilon'_\nu{}^* \epsilon_\mu \bar{u}(p') \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\mu u(p) / s \\ \mathcal{M}_2 = \epsilon'_\nu{}^* \epsilon_\mu \bar{u}(p') \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu u(p) / u \end{cases} \quad (1.23)$$

- Pentru a obține secțiunea eficace nepolarizată, va trebui să sumăm și să mediem $|\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2$ pe toate stările de spin ale electronului și fotonului inițiali și finali.

- Pentru fotonii fizici, putem face înlocuirea
$$\sum_T \epsilon_\mu^{T*} \epsilon_{\mu'}^T \longrightarrow -g_{\mu\mu'} \quad (1.24)$$
 T indică componenta transversală a polarizării.

Pentru stările ϵ' de foton emergent avem o relație similară.

- Pentru amplitudinea invariantă \mathcal{M}_1 , avem

$$|\overline{\mathcal{M}_1}|^2 = \frac{e^4}{4s^2} \sum_{s,s'} \left(\bar{u}^{(s')} \gamma^\nu (\not{p}' + \not{k}) \gamma^\mu u^{(s)} \right) \left(\bar{u}^{(s)} \gamma_\mu (\not{p}' + \not{k}) \gamma_\nu u^{(s')} \right) \quad (1.25)$$

Factorul $1/4$ provine din medierea asupra stărilor inițiale de spin ale electronului și fotonului.

- Relația de completitudine permite sumarea după stările $u\bar{u}$

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}_1}|^2 &= \frac{e^4}{4s^2} \text{Tr} \left(\underbrace{\not{p}' \gamma^\nu (\not{p}' + \not{k}) \gamma^\mu}_{-2\not{p}'} \underbrace{\not{p}' \gamma_\mu (\not{p}' + \not{k}) \gamma_\nu}_{-2\not{p}'} \right) \\ &= \frac{e^4}{s^2} \text{Tr} (\not{p}' \not{k} \not{p}' \not{k}) = \frac{4e^4}{s^2} 2(p' \cdot k)(p \cdot k) = 2e^4 \left(-\frac{u}{s} \right) \end{aligned} \quad (1.26)$$

unde am folosit $\not{p}^2 = p^2 = 0$ precum și proprietățile trace-ilor cu $u = (p - k')^2$.

$$\text{Similar, obținem pentru } |\overline{\mathcal{M}_2}|^2 = 2e^4 \left(-\frac{s}{u} \right) \quad (1.27)$$

$$\text{iar } \overline{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^*} = 0$$

- Astfel, amplitudinea Compton mediată după spin, este
$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \overline{|\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2} = 2e^4 \left(-\frac{u}{s} - \frac{s}{u} \right) \quad (1.28)$$

1.6 Imprăștierea $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$

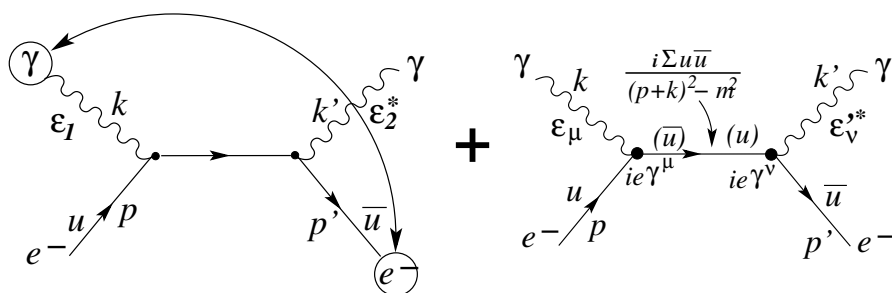


Figura 1.7: Diagramele Feynman anihilare perechi $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$