

Procese QED în câmpuri laser intense
tema 36

M. Penția

January 25, 2022

”Verbum sapienti sat est”

Cuprins

1	Curenți de tranziție - stări reale de particulă	4
1.1	Amplitudinea de probabilitate tranziție	4
1.2	Particule încărcate nerelativiste în câmp EM (Schrödinger)	6
1.3	Particule încărcate relativiste de spin zero în câmp EM (Klein-Gordon)	7
1.4	Particule încărcate relativiste de spin 1/2 în câmp EM (Dirac)	9
1.5	Imprăștierea a două particule încărcate (Klein-Gordon)	10
2	Propagatori - stări virtuale de particulă	12
2.1	Propagatori	12
2.1.1	Propagatorul de particule de spin zero (Klein-Gordon)	15
2.1.2	Propagatorul de electroni (Dirac)	16
2.1.3	Propagatorul de fotoni (Maxwell)	17
2.1.4	Propagatorul de bosoni masivi vectoriali (Proca)	17

Capitol 1

Curenți de tranziție - stări reale de particulă

1.1 Amplitudinea de probabilitate tranziție

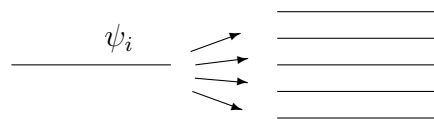
- Scopul urmărit este cel de obținere a soluțiilor $\psi(\vec{x}, t)$ ale ecuației de stare (câmp). Pentru început luăm mișcarea unei particule sub influența unui potențial de interacție $V(\vec{x}, t)$, descrisă prin *ecuația Schrödinger dependentă de timp*,

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = [\hat{H}_0 + \hat{V}(\vec{x}, t)] \psi(\vec{x}, t) \quad (1.1)$$

- Soluțiile ecuației (1.1) se caută ca dezvoltări (superpoziții) de unde plane (particule libere)

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_n c_n(t) \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t/\hbar} \quad (1.2)$$

- Pentru a determina *amplitudinea de tranziție* T_{fi} , adică amplitudinile undelor parțiale $c_n(t)$, vom substitui (1.2) în ecuația Schrödinger (1.1),



- astfel obținem sistemul de *ecuații diferențiale lineare cuplate* pentru amplitudinile parțiale c_m :

$$\frac{dc_f^{(1)}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} c_i^{(0)}(t) V_{fi}(t) e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} \quad (1.3)$$

unde, $V_{fi}(t) = \int \phi_f^*(\vec{x}) \hat{V}(\vec{x}, t) \phi_i(\vec{x}) d^3\vec{x}$ sau $V_{fi}(t) = \langle f | \hat{V}(\vec{x}, t) | i \rangle$ (1.4)

- Prin integrarea (1.3) obținem amplitudinea $c_f^{(1)}(t)$ în aproximația de ordin întâi, cu o singură stare inițială: $c_i^{(0)} = 1$

$$c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t c_i^{(0)}(t') V_{fi}(t') e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} dt' \quad (1.5)$$

introducând $V_{fi}(t)$ de mai sus

$$T_{fi} = c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int \psi_f^*(x) \hat{V}(x) \psi_i(x) d^4x$$

- Deci, în prezența perturbației, se schimbă propagarea (amplitudinea inițială $c_i^{(0)} = 1$ și frecvența $\omega_i = E_i/\hbar$) unei plane inițiale $\psi_i(t) = c_i^{(0)} e^{-iE_i t/\hbar}$, vezi Figura 1.1 (a). Are loc o tranziție pe o altă stare ψ_f . Starea finală devine $\psi_f(t) = c_f^{(1)}(t) e^{-iE_f t/\hbar}$.

- În cazul în care potențialul $V(\vec{x}, t) = V(\vec{x})$ este independent de timp, prin integrarea restului după timp de la $-\infty$ la $+\infty$, amplitudinea de tranziție $T_{fi}^{(1)} \equiv c_{fi}^{(1)}$ (1.5) devine

$$T_{fi}^{(1)} \equiv c_{fi}^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} V_{fi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} dt'}_{2\pi\delta[(E_f - E_i)/\hbar]} = -2\pi i V_{fi} \delta(E_f - E_i) \quad (1.6)$$

unde \hbar s-a simplificat, deoarece $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{a}$ cu $a = \frac{1}{\hbar}$ și $x = E_f - E_i$.

- Amplitudinile de unde parțiale în aproximațiile de ordin superior sunt:

$$c_f^{(3)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t c_m^{(2)}(t') V_{fm}(t') e^{i(E_f - E_m)t'/\hbar} dt' \quad (m \rightarrow f) \quad (1.7)$$

unde

$$c_m^{(2)}(t') = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} c_n^{(1)}(t'') V_{mn}(t'') e^{i(E_m - E_n)t''/\hbar} dt'' \quad (n \rightarrow m) \quad (1.8)$$

unde

$$c_n^{(1)}(t'') = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t''} c_i^{(0)}(t''') V_{ni}(t''') e^{i(E_n - E_i)t'''/\hbar} dt''' \quad (i \rightarrow n) \quad (1.9)$$

unde

$$c_i^{(0)}(t) = c_i(t_0) = 1 \quad (\text{o singură stare inițială})$$

vezi diagrama din Figura 1.1 (c).

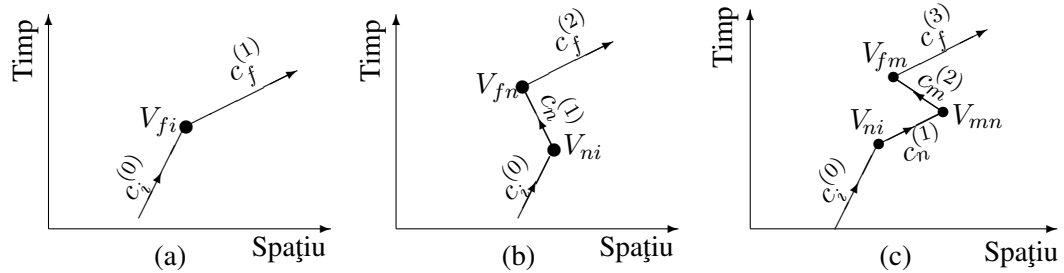


Figura 1.1: Propagarea stărilor de câmp la următoarele perturbații:

- (a) V_{fi} (1.5) \equiv (1.9) de ordin I la tranziția $i \rightarrow f$
- (b) V_{fn} (1.10) \equiv (1.8) și V_{ni} (1.9) de ordin II la tranziția $i \rightarrow f$
- (c) V_{fm} (1.7), V_{mn} (1.8) și V_{ni} (1.9) de ordin III la tranziția $i \rightarrow f$

- Amplitudinea de tranziție în aproximația de ordin doi se exprimă cu ajutorul soluției din aproximația anterioară de ordin întâi $c_n^{(1)}(t)$, adică,

$$T_{fn}^{(2)} = c_f^{(2)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t c_n^{(1)}(t') V_{fn}(t') e^{i(E_f - E_n)t'/\hbar} dt' \quad (n \rightarrow f) \quad (1.10)$$

- La fel ca în cazul anterior, dacă potențialul $V(\vec{x}, t) = V(\vec{x})$ este independent de timp, după integrarea de la $-\infty$ la $+\infty$, amplitudinea de tranziție în aproximația a doua este:

$$T_{fi}^{(2)} = c_f^{(2)}(t) = -2\pi i \sum_{n \neq i} \frac{V_{fn} V_{ni}}{E_i - E_n} \delta(E_f - E_i) \quad (i \rightarrow n \rightarrow f) \quad (1.11)$$

- Prin iterații succesive, obținem $c_m^{(i)}(t)$ din iterația i , cu ajutorul soluției anterioare $c_m^{(i-1)}(t')$, astfel că la final soluția pentru amplitudinea $c_m(t)$ va fi:

$$c_m(t) = c_m^{(0)} + c_m^{(1)} + c_m^{(2)} + \dots \quad (1.12)$$

În calculul corecțiilor succesive de amplitudini (1.7) - (1.9), se face substituția

$$V_{fi} \rightarrow V_{fi} + V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} V_{ni} + \dots \quad (i \rightarrow n \rightarrow f) \quad (1.13)$$

adică, prin sumarea celor două contribuții (1.6) și (1.11), amplitudinea de tranziție va fi:

$$T_{fi} = -2\pi i \delta(E_f - E_i) \left[V_{fi} + V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} V_{ni} + \dots \right] \quad (1.14)$$

1.2 Particule încărcate nerelativiste în câmp EM (Schrödinger)

- Ecuația Schrödinger pentru descrierea stării particulei: $\hat{H}\psi(\vec{x}, t) = E\psi(\vec{x}, t)$

cu Hamiltonianul pentru o particulă încărcată q de spin zero, în prezența unui câmp electromagnetic descris prin potențialul vector $\vec{A}(\vec{x}, t)$,

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m}$$

pentru cuantificare se trece la operatori: $\hat{p} = -i\hbar\nabla$

iar, ecuația Schrödinger pentru o particulă încărcată aflată în câmp electromagnetic este:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \underbrace{\frac{i q \hbar}{2m} (\underbrace{\hat{\nabla} \cdot \hat{A}}_{=0} + \hat{A} \cdot \hat{\nabla}) + \cancel{\frac{q^2}{2m} \hat{A}^2}}_{\hat{V}(x,t)} \right] \psi(\vec{x}, t) = E\psi(\vec{x}, t) \quad (1.15)$$

$$\text{sau} \quad \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E \right)}_{\text{ec. particulă liberă}} \psi = \underbrace{\left(\frac{i q \hbar}{2m} \hat{A} \cdot \hat{\nabla} \right)}_{\hat{V}(x,t)} \psi \quad (1.16)$$

de unde potențialul de perturbație electromagnetic este: $\hat{V}(\vec{x}, t) = \frac{i q \hbar}{2m} \vec{A} \cdot \vec{\nabla}$ (1.17)

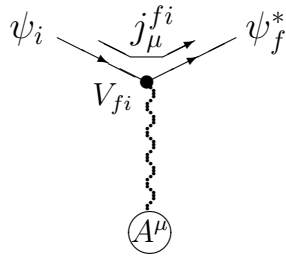
Atunci, din (1.5), amplitudinea de tranziție $i \rightarrow f$, în cazul aproximației de prim ordin va fi

$$T_{fi} = c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_{fi}(t') e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar} dt' \quad (1.5)$$

unde $V_{fi}(t) = \int \phi_f^*(\vec{x}) \hat{V}(\vec{x}, t) \phi_i(\vec{x}) d^3x$ cu $\hat{V}(\vec{x}, t)$ dat de (1.17)

1.3. PARTICULE ÎNCĂRCATE RELATIVISTE DE SPIN ZERO ÎN CÂMP EM (KLEIN-GORDON) 7

iar câmpul electromagnetic poate fi o undă plană $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} + \vec{A}_0^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$



Amplitudinea de tranziție în aproximația de ordin întâi (1.6) este:

$$T_{fi}^{(1)} = -2\pi i V_{fi} \delta(E_f - E_i) \quad (1.18)$$

Diagrama Feynman de împrăștiere pe câmpul A^μ

1.3 Particule încărcate relativiste de spin zero în câmp EM (Klein-Gordon)

- In electrodinamica clasică, mișcarea unei particule cu sarcina q într-un potențial electromagnetic A^μ , se obține prin substituția:

$$p^\mu \longrightarrow p^\mu - qA^\mu \quad (1.19)$$

- Cuantificarea se face prin trecerea la operatori:

$$\begin{aligned} i\hbar\partial^\mu &\longrightarrow i\hbar\partial^\mu - qA^\mu \quad \text{sau} \\ \partial^\mu &\longrightarrow \partial^\mu + \frac{i}{\hbar}qA^\mu \end{aligned} \quad (1.20)$$

Atunci, în ecuația Klein-Gordon pentru o particulă liberă

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0 \quad (1.21)$$

introducem interacția cu câmpul electromagnetic, prin înlocuirile (1.20),

Ecuația Klein-Gordon pentru o particulă în câmp EM

$$\left[\left(\partial_\mu + \frac{i}{\hbar}qA_\mu\right)\left(\partial^\mu + \frac{i}{\hbar}qA^\mu\right) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\psi = 0 \quad (1.22)$$

dezvoltăm (1.22) și separăm în membrul stâng partea Klein Gordon de particulă liberă, iar în membrul drept partea de interacție,

$$\left[\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\psi = \underbrace{\left[-\frac{i}{\hbar}q\left(\partial_\mu A^\mu + \underbrace{A_\mu\partial^\mu}_{A^\mu\partial_\mu}\right) + \frac{q^2}{\hbar^2}A_\mu A^\mu\right]}_{-\hat{V}}\psi \equiv -\hat{V}\psi \quad (1.23)$$

unde am identificat operatorul potențial de interacție:

$$\hat{V}(x) = \frac{i}{\hbar}q\left(\partial_\mu A^\mu + A^\mu\partial_\mu\right) \quad (1.24)$$

Semnul lui \hat{V} s-a ales ca să fie același cu semnul termenului de energie cinetică $\partial_i\partial^i$ ($\partial_\mu\partial^\mu = \partial_0\partial^0 - \partial_i\partial^i$) din ecuația Schrödinger: $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_i\partial^i\right)\psi = (E - V)\psi$

- Amplitudinea de tranziție în primă aproximația, a unei particule de sarcină q_1 , din ψ_i în ψ_f pe un potențial A_μ (vezi Fig. de mai jos) este

$$T_{fi}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int \psi_f^*(x) \hat{V}(x) \psi_i(x) d^4x \quad (1.25)$$

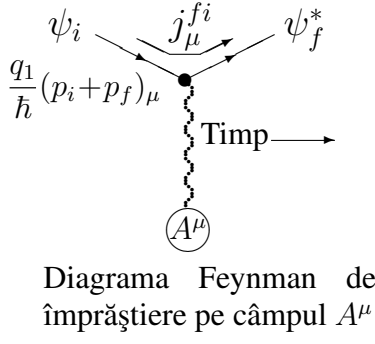
$$= -\frac{i}{\hbar^2} \int \psi_f^* i q_1 (\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) \psi_i d^4x$$
- Căutăm să separăm A^μ , folosind,

$$\int \psi_f^* \partial_\mu (A^\mu \psi_i) d^4x = - \int (A^\mu \psi_i) \partial_\mu \psi_f^* d^4x$$

Atunci, amplitudinea de tranziție T_{fi} (1.25) cu A^μ separat apoi în dreapta, este:

$$T_{fi} \equiv c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar^2} \int i q_1 \left[-\partial_\mu \psi_f^* (A^\mu \psi_i) + \psi_f^* A^\mu (\partial_\mu \psi_i) \right] d^4x$$

$$= -\frac{i}{\hbar^2} \int i q_1 \underbrace{\left[\psi_f^* (\partial_\mu \psi_i) - (\partial_\mu \psi_f^*) \psi_i \right]}_{j_\mu^{fi}(x)} A^\mu d^4x \quad (1.26)$$



în (1.26) am identificat un curent de tip Klein-Gordon de tranziție între stările ψ_i și ψ_f :

$$j_\mu^{fi}(x) = i q_1 \left[\psi_f^* (\partial_\mu \psi_i) - (\partial_\mu \psi_f^*) \psi_i \right] \quad (1.27)$$

atunci, amplitudinea de tranziție (1.26) se poate scrie:

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar^2} \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x \quad (1.28)$$

- Dacă mișcarea particulei incidente de 4-impuls p_i și a celei emergente de 4-impuls p_f , este descrisă de undele plane:

$$\psi_i(x) = N_i e^{-i p_i \cdot x / \hbar}$$

$$\psi_f^*(x) = N_f e^{+i p_f \cdot x / \hbar} \quad (1.29)$$
 unde, N_i și N_f constante de normare

- Curentul de tranziție (1.27) din diagrama Feynman din Figura de mai sus, va fi,

$$j_\mu^{fi} = i \frac{q_1}{\hbar} \left[\overbrace{N_f e^{i p_f \cdot x / \hbar}}^{\psi_f^*} \overbrace{(-i) p_i N_i e^{-i p_i \cdot x / \hbar}}^{\partial_\mu \psi_i} - \overbrace{i p_f N_f e^{i p_f \cdot x / \hbar}}^{\partial_\mu \psi_f^*} \overbrace{N_i e^{-i p_i \cdot x / \hbar}}^{\psi_i} \right]$$

$$= \underbrace{N_f e^{i p_f \cdot x / \hbar}}_{\psi_f^*} \underbrace{\left[\frac{q_1}{\hbar} (p_i + p_f)_\mu \right]}_{\text{factor vertex}} \underbrace{N_i e^{-i p_i \cdot x / \hbar}}_{\psi_i} \quad \leftarrow \text{descriere prin diagrama Feynman}$$

$$= \psi_i \left[\frac{q_1}{\hbar} (p_i + p_f)_\mu \right] \psi_f^* = N_i N_f \left[\frac{q_1}{\hbar} (p_i + p_f)_\mu \right] e^{i (p_f - p_i) \cdot x / \hbar} \quad (1.30)$$

1.4 Particule încărcate relativiste de spin 1/2 în câmp EM (Dirac)

- Ecuția Dirac pentru o particulă de sarcină $-e$ aflată într-un câmp electromagnetic A^μ

$\left(\underbrace{i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc}_{\text{ecuația Dirac pt. particula liberă}} + \underbrace{e\gamma^\mu A_\mu}_{\text{potențial interacție}} \right) \psi = 0 \quad (1.31)$
--

Astfel am separat operatorul potențial de interacție (perturbația): $\gamma^0 \hat{V} = -e\gamma^\mu A_\mu$

- În aproximația de ordin întâi, amplitudinea de tranziție (1.5) pentru electron între starea ψ_i și ψ_f , cu definițiile ψ^\dagger și γ^0 , apoi A^μ separat în dreapta, este:

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int \psi_f^\dagger \overset{\downarrow (\gamma^0)^2 = I}{V} \psi_i d^4x = -\frac{i}{\hbar} \int \underbrace{\psi_f^\dagger \gamma^0}_{\bar{\psi}} \underbrace{\gamma^0 V}_{-e\gamma^\mu A^\mu} \psi_i d^4x = \frac{i}{\hbar} \int \underbrace{e \bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_i}_{j_\mu^{fi}} A^\mu d^4x \quad (1.32)$$

- în (1.32) am identificat un **curent de tip Dirac** de tranziție între stările ψ_i și ψ_f

$$j_\mu^{fi}(x) = e \bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_i \quad (1.33)$$

- atunci, amplitudinea de tranziție (1.32) se poate scrie:

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x \quad (1.34)$$

- Mișcarea particulei incidente de 4-impuls p_i și a celei emergente de 4-impuls p_f , este descrisă de undele plane, cu spinorii Dirac u_i și \bar{u}_f :

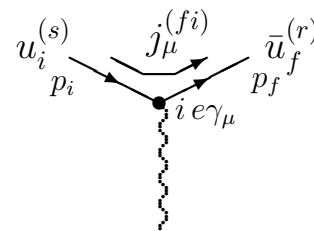
$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= u_i e^{-ip_i \cdot x / \hbar} \\ \bar{\psi}_f(x) &= \bar{u}_f e^{+ip_f \cdot x / \hbar} \end{aligned} \quad (1.35)$$

- Curentul de tranziție (1.33), folosind soluțiile Dirac, este

$$\begin{aligned} j_\mu^{fi} &= \bar{\psi}_f \underbrace{(e\gamma_\mu)}_{\text{factor vertex}} \psi_i \leftarrow \text{descriere prin diagrama Feynman} \\ &= \bar{u}_f \underbrace{(e\gamma_\mu)}_{\text{factor vertex}} u_i e^{i(p_f - p_i) \cdot x / \hbar} \end{aligned} \quad (1.36)$$

acesta este un curent de tranziție electromagnetic între stările i și f ale electronului.

- Curentul Dirac (1.36) este reprezentat în diagrama Feynman, cu factorul de vertex $ie\gamma^\mu$, ca o matrice 4×4 în spațiul de spin, flancat de spinorii coloană $u_i^{(s)}$ și linie $\bar{u}_f^{(r)}$, ce descriu electronii inițial și final de impuls p_i , respectiv p_f și stările de spin s și r .



1.5 Împrăștierea a două particule încărcate (Klein-Gordon)

- Folosind rezultatul anterior (1.28) al împrăștierei unei particule încărcate pe un potențial electromagnetic A^μ , ca în Figura de la pag. 8, putem calcula amplitudinea de împrăștiere a aceleiași particule încărcate pe potențialul creat de altă particulă încărcată. Diagrama Feynman pentru această împrăștiere a două particule încărcate este prezentată în Figura 1.2

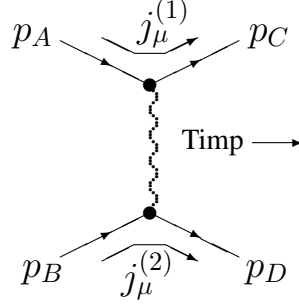


Figura 1.2: Diagrama Feynman de împrăștiere a două particule încărcate.

- Figura 1.2 sugerează abordarea problemei, prin extinderea diagramei Feynman din Figura de la pag. 8, la care trebuie adăugată sursa potențialului A^μ , ca fiind produs de a doua sarcină.
- Potențialul A^μ este dat de ecuația Maxwell neomogenă, cu sursa dată de curentul $j_\mu^{(2)}$. Dacă folosim calibrarea Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$, avem:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = j_{(2)}^\mu \quad (1.37)$$

- Curentul $j_{(2)}^\mu$ al sarcinii q_2 , similar $j_\mu^{(1)}$ (1.30), este:

$$j_{(2)}^\mu = \frac{q_2}{\hbar} N_B N_D (p_D + p_B)^\mu e^{i(p_D - p_B) \cdot x / \hbar} \quad (1.38)$$

4-impulsurile p_A, p_B, p_C, p_D sunt indicate în Figura 1.2.

- Câmpul electromagnetic A^μ , ca soluție a ecuației Maxwell, este o undă plană: $A^\mu \sim e^{iq \cdot x}$, unde q este 4-impulsul fotonului. Atunci, termenul I din (1.37) este:

$$\begin{aligned} \partial_\nu \partial^\nu A^\mu &= \partial_\nu \partial^\nu e^{iq \cdot x} = \\ &= -q^2 e^{iq \cdot x} = -q^2 A^\mu \end{aligned} \quad (1.39)$$

- Atunci din (1.37) avem legătura între câmpul A^μ și sursa acestuia $j_{(2)}^\mu$:

$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} j_{(2)}^\mu \quad \text{unde } q = p_D - p_B \quad (1.40)$$

q - transferul de 4-impuls

- Introducând această soluție în amplitudinea de tranziție (1.28) obținem:

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar^2} \int j_\mu^{(1)}(x) \left(-\frac{1}{q^2} \right) j_{(2)}^\mu(x) d^4x \quad (1.41)$$

- Folosind curenții $j_\mu^{(1)}$ (1.30) și $j_{(2)}^\mu$ (1.38),

$$\begin{cases} j_\mu^{(1)} = \frac{q_1}{\hbar} N_A N_C (p_A + p_C)_\mu e^{i(p_C - p_A) \cdot x / \hbar} \\ j_{(2)}^\mu = \frac{q_2}{\hbar} N_B N_D (p_B + p_D)^\mu e^{i(p_D - p_B) \cdot x / \hbar} \end{cases} \quad (1.42)$$

- Inlocuind curenții (1.42) în amplitudinea de tranziție (1.41), aceasta devine:

$$\begin{aligned}
T_{fi} &= -\frac{i}{\hbar^2} \int \left(q_1 N_A N_C (p_A + p_C)_\mu e^{i(p_C - p_A) \cdot x / \hbar} \right) \left(-\frac{1}{q^2} \right) \times \\
&\quad \times \left(q_2 N_B N_D (p_B + p_D)^\mu e^{i(p_D - p_B) \cdot x / \hbar} \right) d^4 x \\
&= -\frac{i}{\hbar^2} N_A N_B N_C N_D \underbrace{\int e^{i(p_C - p_A + p_D - p_B) \cdot x / \hbar} d^4 x}_{(2\pi)^4 \delta^{(4)}[(p_C + p_D - p_A - p_B) / \hbar]} \times \\
&\quad \times \underbrace{\left(q_1 (p_A + p_C)_\mu \right) \left(-\frac{1}{q^2} \right) \left(q_2 (p_B + p_D)^\mu \right)}_{\mathcal{M}}
\end{aligned}$$

- Efectuând integrarea după x ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{i(p_D + p_C - p_B - p_A) \cdot x / \hbar} d^4 x}_{(2\pi)^4 \delta^{(4)}[(p_D + p_C - p_B - p_A) / \hbar]} = (2\pi)^4 \hbar \delta^{(4)}(p_D + p_C - p_B - p_A) \quad (1.43)$$

\hbar a apărut deoarece $\delta(ay) = \frac{\delta(y)}{a}$ cu $a = \frac{1}{\hbar}$ și $y = p_D + p_C - p_B - p_A$

- In final, amplitudinea de tranziție (1.41) va fi:

$$\boxed{T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} N_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_D + p_C - p_B - p_A) \mathcal{M}} \quad (1.44)$$

funcția δ exprimă conservarea energie-impuls în procesul de împrăștiere a două particule încărcate.

- unde \mathcal{M} este amplitudinea invariantă
- $$\mathcal{M} = \left[q_1 (p_A + p_C)_\mu \right] \left(-\frac{1}{q^2} \right) \left[q_2 (p_B + p_D)^\mu \right] \quad (1.45)$$

- deseori \mathcal{M} se exprimă ca mărime imaginară:
- $$-i\mathcal{M} = \left[-iq_1 (p_A + p_C)^\mu \right] \left(-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) \left[-iq_2 (p_B + p_D)^\nu \right] \quad (1.46)$$

- Factorii imaginari, cu $-i$ în (1.46), s-au ales astfel încât să poată fi utilizați și pentru diagramele de ordin superior. A se observa că înmulțirea acestor trei factori $(-i)(+i)(-i)$ din membrul doi, dă $-i$ din membrul întâi.

După cum se vede din simetria amplitudinii invariante (1.45), aceasta este aceeași fie că se ia particula (1) în câmpul produs de particula (2), fie particula (2) în câmpul particulei (1).

- **In concluzie:** Am obținut expresia amplitudinii de tranziție (1.46) pentru o particulă (boson) încărcată în interacție cu un câmp electromagnetic (boson), interacție descrisă prin ecuația Klein-Gordon (1.22).

Capitol 2

Propagatori - stări virtuale de particulă

2.1 Propagatori

- Am văzut că o linie ondulată de foton virtual (vezi de ex. Figura 1.2) reprezintă propagatorul interacției ca $1/q^2$, adică inversul 4-impulsului transferat prin acest foton.
- Dacă pentru determinarea curenților de tranziție am folosit componenta de particulă liberă a ecuațiilor de câmp a acestora, acum, pentru determinarea propagatorului vom folosi componenta ecuației de câmp de particulă liberă, de schimb, respectivă.
- De exemplu, propagatorul fonic din procesul de anihilare $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow e^-e^+$ din Figura 2.1 este de forma $1/q^2$, unde $q = p_A + p_B$ este dat de conservarea 4-impulsului.

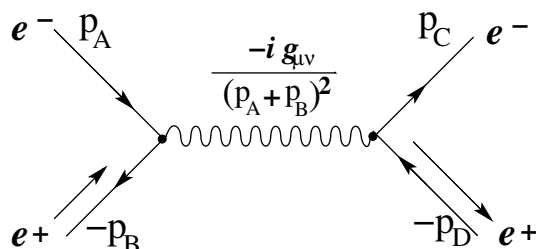


Figura 2.1: Diagrama Feynman de anihilare $e^-e^+ \rightarrow \gamma \rightarrow e^-e^+$.

- In dezvoltarea perturbativă nerelativistă a amplitudinii de tranziție (1.14) (pag. 6), am văzut,

$$T_{fi} = -2\pi i \delta(E_f - E_i) \left[V_{fi} + \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} V_{ni} + \dots \right] \quad (2.1)$$

- Am asociat $V_{fn} = \langle f | \hat{V} | n \rangle \equiv \int \phi_f^*(\vec{x}) \hat{V}(\vec{x}, t) \phi_n(\vec{x}) d^3\vec{x}$ (1.4) cu vertex-ul interacției, iar $1/(E_i - E_n)$, cu propagatorul interacției.

- Pentru a generaliza expresia propagatorului din cazul Schrödinger și la alte câmpuri, vom folosi stările staționare ale respectivelor câmpuri libere, exprimate prin Hamiltonian-ul \hat{H}_0 .
- Stările Schrödinger staționare $\phi_n \equiv |n\rangle$ sunt stări proprii \hat{H}_0 ale Hamiltonian-ului de particulă liberă:
$$\hat{H}_0 |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (2.2)$$
- Ecuația Schrödinger cu perturbația \hat{V} :
$$(\hat{H}_0 + \hat{V})\psi = E\psi \quad (2.3)$$
- Putem rescrie T_{fi} (2.1) înlocuind E_n din propagator, folosind (2.2), cu operatorul Hamiltonian liber $\hat{H}_0 = \hat{p}^2/(2m)$, care apoi permite generalizarea relativistă, similară cu dezvoltarea Schrödinger inițială (1.1).

$$T_{fi} = 2\pi \delta(E_f - E_i) \langle f | \left[(-iV) + (-iV) \frac{i}{E_i - \hat{H}_0} (-iV) + \dots \right] | i \rangle \quad (2.4)$$

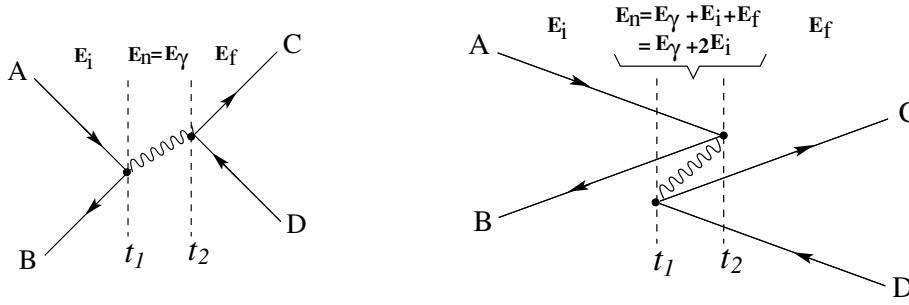
adică factorul de vertex este $-iV^a$.

^aAcesta apare din ecuația Schrödinger dependentă de timp (1.1): $i\hbar\partial\psi/\partial t = [\hat{H}_0 + V]\psi$, unde perturbația V , prin integrare, dă o dependență $\exp(-iVt/\hbar)$. De aceea factorul de vertex va fi $-(i/\hbar)V$

- Din (2.3) separăm operatorul Schrödinger, ce dă starea perturbată, sub forma:
$$-i(E_i - \hat{H}_0)\psi = -iV\psi \quad (2.5)$$
- propagatorul Schrödinger va putea fi scris ca inversul operatorului de mai sus,
$$\frac{i}{E_i - \hat{H}_0} = \frac{i}{V} \quad (2.6)$$
- În general o particulă de masă m poate constitui un propagator de tip $1/(p^2c^2 - m^2c^4)$. La început studiem propagatorul fonic din Fig.2.1 între cele două vertex-uri de interacție.
- Propagatorul intră în termenul perturbativ de ordin doi din dezvoltarea nerelativistă (2.1).

$$T_{fi}^{(2)} = -i \underbrace{\sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} V_{ni}}_{\sim \mathcal{M}} 2\pi \delta(E_f - E_i) \quad (2.7)$$

- Aceasta exprimă amplitudinea de probabilitate ca fotonul să treacă de la un punct în spațiu, la alt punct din spațiu Δx , într-un interval Δt de timp, sau să aibe o anumită energie E_n (și impuls). Această interpretare o vom folosi la generalizarea relativistă a proceselor din stările intermediare, prin adăugarea de procese de creare și anihilare de particule virtuale.
- În acest fel va trebui să trecem de la descrierea Schrödinger la cele relativiste, adică: să facem trecerea de la exprimarea propagatorului inițial prin diferența de energii:
$$\frac{1}{E_i - E_n} \longrightarrow \frac{1}{(p_A + p_B)^2 c^2} \quad (2.8)$$
- Să vedem cum apare în propagatorul relativist, pătratul energiei. O diagrama Feynman este o sumă de diagrame ordonate temporal. Astfel, pentru cazul din Fig.2.1 avem două diagrame ordonate temporal, asemănătoare Fig.??, de data asta cu axa de timp plasată pe abscisă.

Figura 2.2: Diagrame Feynman de anihilare $e^-e^+ \rightarrow \gamma \rightarrow e^-e^+$ în OFPT

- Amplitudinea de tranziție (2.7) (partea invariantă) va fi dată de suma celor două contribuții:

$$\mathcal{M} \sim V_{fn} \frac{1}{E_i - E_\gamma} V_{ni} + V_{fn} \frac{1}{E_i - 2E_i - E_\gamma} V_{ni} = V_{fn} \frac{2E_\gamma}{E_i^2 - E_\gamma^2} V_{ni} \quad (2.9)$$

- Această metodă nerelativistă de calcul a amplitudinii de tranziție, este deseori numită ca "old-fashioned perturbation theory" (OFPT).

In OFPT impulsul 3-dimensional se conservă în fiecare vertex, nu însă și energia particulelor virtuale (vezi pag.6). Totuși acestea se află "on-shell mass" ($p^2 = m^2 c^2$).

- Evaluarea relativistă a propagatorului ține cont de relația
- $$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad \left| \begin{array}{l} E_i^2 = (E_A + E_B)^2 = (p_A + p_B)^2 c^2 + (\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2 c^2 \\ E_\gamma^2 = m_\gamma^2 c^4 + \vec{p}_\gamma^2 c^2 \end{array} \right. \quad (2.10)$$

- Deoarece $\vec{p}_\gamma = \vec{p}_A + \vec{p}_B$, din (2.10), propagatorul este:
- $$\frac{1}{E_i^2 - E_\gamma^2} = \frac{1}{(p_A + p_B)^2 c^2 - m_\gamma^2 c^4} = \frac{1}{q^2} \quad (2.11)$$

- Am specificat în (2.11) masa particulei de schimb ca m_γ (deși pentru foton $m_\gamma = 0$), pentru a putea fi utilă și în cazul în care avem o particulă de schimb cu $m \neq 0$.

- Am văzut (2.6), propagatorul a fost exprimat ca inversul operatorului ecuației de câmp a particulei respective. Generalizarea relativistă (2.11) a propagatorului pentru o particulă de schimb de masă m și spin zero, este:

$$\frac{1}{(p_A + p_B)^2 - m^2 c^2} = \frac{1}{p^2 - m^2 c^2} \quad (2.12)$$

- In diagramele Feynman, propagatorul este reprezentat ca linii interne, ce leagă particulele incidente cu cele emergente. Aceste linii interne descriu particule virtuale, care nu satisfac condiția de "on-shell mass" ($p^2 \neq m^2 c^2$). Conservarea energiei este însă asigurată doar pentru stările inițiale și finale, prin funcția $\delta(E_f - E_i)$ din (2.1), nu și pentru stările intermediare (virtuale). Deoarece propagatorul se obține prin inversarea operatorului ecuației de câmp, prezintă singularități pentru "on-shell mass".

- Fiecare din cele două diagrame ordonate temporal din Fig.2.2 (considerate separat) nu sunt invariante. Dar prin includerea celui de-al doilea termen alături de primul (nerelativist), s-a obținut o expresie invariantă.
- Diferența importantă față de tratare nerelativistă OFPT, este că acum în tratarea perturbativă, atât energia cât și impulsul 3-dimensional se conservă în fiecare vertex.
- Să trecem să aplicăm această metodă la diferite ecuații de câmp și să deducem forma propagatorului pentru particulele descrise de aceste ecuații.
- În general, diversele interacții pot fi privite ca superpoziții de câmpuri libere $\psi \sim e^{-i p \cdot x}$, descrise prin diverse ecuații ca cele de mai jos:
 - Câmpul de particule nerelativiste ψ cu ecuația Schrödinger: $\hat{H}_0 \psi_i = E_i \psi_i$
 - Câmpul de fermioni φ descris de ecuația Dirac: $(\gamma^\mu \hat{p}_\mu - mc) \psi = 0$
 - Câmpul de fotoni A , descris de ecuația de undă: $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0$
 - Câmpul Higgs φ descris de ecuația Klein-Gordon: $\left(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \varphi = 0$
 - Câmpurile de interacție slabă W^\pm, Z cu ecuația Proca: $\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$

2.1.1 Propagatorul de particule de spin zero (Klein-Gordon)

- Ecuația Schrödinger (2.5) cu potențial perturbator V , am văzut este:
$$-i \left(E_i - \hat{H}_0 \right) \psi = -iV\psi \quad (2.5)$$

iar propagatorul Schrödinger, ca inversul operatorului Schrödinger de mai sus, am văzut (2.6), este:

$$\frac{i}{E_i - \hat{H}_0} = \frac{i}{V} \quad (2.6)$$

- Ecuația Klein-Gordon cu potențial perturbator (1.23), dacă se înmulțește cu i conduce la o formă similară celei Schrödinger de mai sus (2.5):
$$i \left(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = -iV\psi \quad (2.13)$$

- Prin generalizarea relativistă a amplitudinii de tranziție (2.4), vom scrie propagatorul pentru o particulă de spin zero, similar cu (2.6), ca inversul operatorului din membrul stâng (2.13), în care înlocuim acțiunea operatorului $\partial_\mu \partial^\mu \psi \sim -p^2 \psi$

Adică, pentru o stare intermediară de 4-impuls p , propagatorul Klein-Gordon este
$$\frac{1}{i(-p^2 + m^2 c^2)} = \boxed{\frac{i}{p^2 - m^2 c^2}} \quad (2.14)$$

Același rezultat ca cel din cazul fotonilor, vezi (2.12).

2.1.2 Propagatorul de electroni (Dirac)

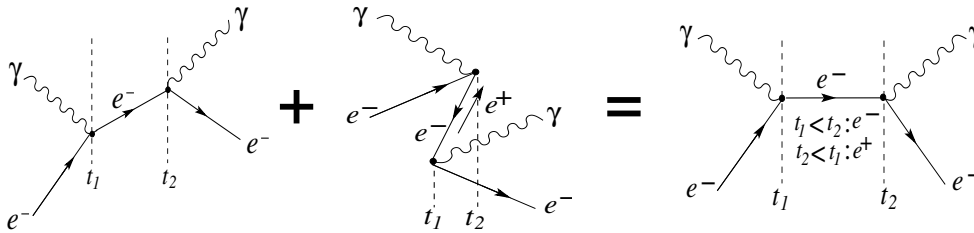
- Un electron aflat în câmp electromagnetic este descris prin ecuația Dirac (1.31), $(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = -e\gamma^\mu A_\mu\psi$ (1.31)
- Propagatorul Dirac, ca inversul operatorului din membrul stâng (1.31), înmulțit cu i , în care înlocuim $\partial_\mu\psi \sim -i\hbar p_\mu\psi$, precum și $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$, este:

$$\frac{i}{(\hbar^2\not{p} - mc)} = \frac{i(\not{p} + mc)}{(\hbar^2 p^2 - m^2 c^2)} = \frac{i \sum_s u\bar{u}}{(\hbar^2 p^2 - m^2 c^2)} \quad (2.15)$$

unde am folosit $\not{p}\not{p} = p^2$ și relațiile de completitudine (??).

La numărător avem suma după stările de spin ale electronilor virtuali. Vor trebui luate toate stările de spin posibile și să integram pe toate stările de impuls ale particulelor din propagator.

- Un exemplu cu electronul ca particulă de schimb este procesul $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$. În acest caz putem face comparația dintre tratarea nerelativistă a OFPT (vechea teorie a perturbațiilor) cu tratarea relativistă a perturbațiilor (covariante).



În OFPT impulsul 3-dimensional se conservă în fiecare vertex, nu însă și energia. Particula de schimb se află "on-shell mass": $p^2 = m^2 c^2$

Impulsul 4-dim se conservă în fiecare vertex, inclusiv energia (vezi (1.11)). Particula de schimb însă nu se află "on-shell mass" $p^2 \neq m^2 c^2$.

Figura 2.3: Diagrama Feynman $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$.

- Diagrama Feynman rezultantă cuprinde ambele posibilități, în care particula de schimb este un electron cu secvența temporală $t_1 < t_2$, sau un pozitron în cazul inversării temporale $t_2 < t_1$ a evenimentelor.

2.1.3 Propagatorul de fotoni (Maxwell)

- Ecuția de stare pentru câmpul A^μ este: $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu$
sau $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu$ (2.16)
se poate scrie, dacă coborâm indicele lui $A^\nu = g^{\nu\lambda} A_\lambda$, sub forma: $(g^{\nu\lambda} \partial_\mu \partial^\mu - \partial^\nu \partial^\lambda) A_\lambda = j^\nu$

- Tinând cont de relația de calibrare Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$, ecuația de stare (2.16) va fi: $g^{\nu\lambda} \partial_\mu \partial^\mu A_\lambda = j^\nu$ (2.17)

- Pentru soluția de undă plană: $A \sim e^{-iq \cdot x}$ iar $\partial_\mu \partial^\mu A = -q^2$

Inmulțind (2.17) la stânga cu $g_{\mu\nu}$, cu coborârea indicelui ν , aceasta devine:

$$\underbrace{g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda}}_{\delta_\mu^\lambda} \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu A_\lambda}_{(-q_\lambda^2)} = \underbrace{g_{\mu\nu} j^\nu}_{j_\mu}$$

$$\delta_\mu^\lambda (-q_\lambda^2) = j_\mu$$

- Propagatorul Maxwell se obține ca inversul operatorului de câmp (membrul stâng (2.17)) înmulțit cu i : $\boxed{i \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2}}$ (2.18)

2.1.4 Propagatorul de bosoni masivi vectoriali (Proca)

- Ecuția de stare pentru câmpul Proca B^μ de particule masive de spin 1, se poate obține ca membrul stâng al ecuației pentru fotoni (2.16), cu înlocuirea $\partial_\mu \partial^\mu \rightarrow \partial_\mu \partial^\mu + M^2$

$$[g^{\nu\lambda} (\partial_\mu \partial^\mu + M^2) - \partial^\nu \partial^\lambda] B_\lambda = 0 \quad (2.19)$$

- Pentru soluția de undă plană: $B \sim e^{-ip \cdot x}$ iar $\partial_\mu \partial^\mu B = -p^2$
- Inversul operatorului de câmp (membrul stâng (2.19) se rezolvă sub forma,

$$i [g^{\nu\lambda} (-p^2 + M^2) - p^\nu p^\lambda]^{-1} = \delta_\lambda^\mu (\alpha g_{\mu\nu} + \beta p_\mu p_\nu) \quad (2.20)$$

în raport cu α și β .

- Atunci, propagatorul Proca este mărimea din paranteze din membrul drept al (2.20) înmulțit cu i : $\boxed{\frac{i (-g^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu / M^2)}{p^2 - M^2}}$ (2.21)