Procese QED în câmpuri laser intense
tema 26

M. Penţia

July 8, 2021

.

”Verbum sapienti sat est”

Cuprins

Capitol 1

Interacţii electron-gamma

1.1 Ecuaţia, densitatea şi curentul de câmp Dirac

	Ecuaţia Relativistă - Dirac	
Relaţia energie-impuls	$\frac{E}{c} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc$ In reprezentarea Dirac-Pauli: $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$	In reprezentarea Weyl: $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$
Trecerea la operatori diferenţiali: $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$; $\boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ $\Longrightarrow\ i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial ct} + i\hbar\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi = \beta mc\psi$ înmulţim la stânga cu β şi notăm: $\gamma^0 = \beta,\quad \gamma^k = \beta\alpha^k$		
	3-dimensional	**4-dimensional**
Ecuaţia Dirac	$i\hbar\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial ct} + i\hbar\gamma^k\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - mc\,\psi = 0$	$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\,\psi = 0$
Ecuaţia Dirac conjugată hermitic	$-i\hbar\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial ct}\gamma^0 - i\hbar\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial x^k}(-\gamma^k) - mc\,\psi^\dagger = 0$ $\psi^\dagger$ - conj.hermitic (transp.& c.c.) - linie	pentru a reface forma covariantă, înlăturăm minusul de la γ^k. De aceea, deoarece matricile γ^μ anticomută: $\gamma^0\gamma^k = -\gamma^k\gamma^0$, înmulţim ecuaţia la dreapta cu γ^0. notăm: $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ (spinor adjunct) - linie
Ec. Dirac adjunctă	$i\hbar\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial ct}\gamma^0 + i\hbar\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^k}\gamma^k + mc\,\bar{\psi} = 0$	$i\hbar\partial_\mu\bar{\psi}\,\gamma^\mu + mc\,\bar{\psi} = 0$
Inmulţim ecuaţia de bază cu $\bar{\psi}$ la stînga	$i\hbar\bar{\psi}\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial ct} + i\hbar\bar{\psi}\gamma^k\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - mc\,\bar{\psi}\psi\ +$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \left(\partial_\mu\bar{\psi}\right)\gamma^\mu\psi =$ $= \partial_\mu\underbrace{\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)}_{j^\mu} = 0$
apoi ecuaţia adjunctă cu ψ la dreapta	$i\hbar\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial ct}\gamma^0\psi + i\hbar\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^k}\gamma^k\psi + mc\,\bar{\psi}\psi = 0$	
şi le adunăm	$\frac{\partial}{\partial ct}\underbrace{\left(\bar{\psi}\gamma^0\psi\right)}_{\rho} + \frac{\partial}{\partial x^k}\underbrace{\left(\bar{\psi}\gamma^k\psi\right)}_{j^k} = 0$	
$\Longrightarrow$ Ecuaţia de continuitate	$\frac{1}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial j^k}{\partial x^k}$	$\partial_\mu j^\mu = 0$
Densitatea şi curentul de câmp Dirac	$\begin{cases} \rho \equiv j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = \sum_{i=1}^{3}\lvert\psi_i\rvert^2 > 0 \\ \vec{j} \equiv j^k = \bar{\psi}\gamma^k\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^k\psi \end{cases}$	$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ dacă j^μ e 4-curentul de ELECTRONI, se înmulţeşte cu sarcina $-e$: $j^\mu = -e\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$
Folosind soluţia de undă plană (**??**) a ecuaţiei de bază, cu înlocuirile: $\begin{cases} p\cdot x = p_\mu x^\mu = Et - \vec{p}\cdot\vec{x} \\ k\cdot x = k_\mu x^\mu = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} = \frac{E}{\hbar}t - \frac{\vec{p}}{\hbar}\cdot\vec{x} \end{cases}$	$\begin{cases} \psi = u\,e^{-i\,(E\cdot t - \vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar} \\ \bar{\psi} = \bar{u}\,e^{i\,(E\cdot t - \vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar} \end{cases}$	$\psi(x) = u(p)\,e^{-i\,(p\cdot x)/\hbar}$ $\bar{\psi}(x) = \bar{u}(p)\,e^{i\,(p\cdot x)/\hbar}$
Densitatea şi curentul Dirac pt. unda plană	$\begin{cases} \rho = \bar{u}\,\gamma^0\,u \\ \vec{j} = \bar{u}\,\gamma^k\,u \end{cases}$	$j^\mu = \bar{u}\,\gamma^\mu\,u$

1.2 Electrodinamica particulelor încărcate de spin 1/2

- Vom relua dezvoltările anterioare, de data asta pentru particule cu spin 1/2. Adică vom descrie interacţiile electromagnetice ale cuarcilor şi leptonilor. Aceste particule sunt descrise de ecuaţia Dirac, iar rezultatul va consta în regulile Feynman pentru interacţia electromagnetică a cuarcilor şi leptonilor de spin 1/2.

1.2.1 Interacţia electron - câmp electromagnetic A^μ

- Pornim de la ecuaţia Dirac originală, dar pentru o particulă plasată în potenţialul V.

$$\left(\frac{\hat{E}}{c}-\alpha\cdot\hat{p}-\beta\, mc\right)\psi=\hat{V}\psi$$

Apoi, pt. a evidenţia matricile γ, înmulţim la stânga cu β şi trecem la operatori:

$$\beta\times\left|\left(\frac{\hat{E}}{c}-\alpha^k\,\hat{p}_k-\beta\, mc\right)\psi=\hat{V}\psi\right. \quad \text{înlocuim}\begin{cases}\beta=\gamma^0 \quad \text{şi} \quad \beta\alpha^k=\gamma^k\\ \hat{E}/c\rightarrow i\hbar\,\partial_0 \quad \text{şi} \quad \hat{p}_k\rightarrow -i\hbar\,\partial_k\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad \underbrace{\left(i\hbar\gamma^0\partial_0+i\hbar\gamma^k\partial_k-mc\right)}_{i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu-mc}\psi=\gamma^0V\psi \qquad \text{deoarece} \quad \beta\beta=1 \tag{1.1}$$

- Pe de altă parte, ecuaţia Dirac pentru un electron de sarcină $q=-e$ aflat într-un câmp electromagnetic A^μ, este

$$\Big(\underbrace{i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu-mc}_{\text{ecuaţia Dirac pt. particula liberă}}+\underbrace{e\gamma^\mu A_\mu}_{\text{interacţie în câmp EM}}\Big)\psi=0 \tag{1.2}$$

- La fel ca în cazul Klein-Gordon, separăm partea de particulă liberă în membrul stâng, iar în cel drept identificăm potenţialul de interacţie cu γ^0V din (1.1).

$$\begin{aligned}\left(i\hbar\,\gamma^\mu\partial_\mu-mc\right)\psi&=-e\,\gamma^\mu A_\mu\\&=\gamma^0V\,\psi\end{aligned} \tag{1.3}$$

Astfel am găsit operatorul potenţial de interacţie (perturbaţia): $\gamma^0V=-e\gamma^\mu A_\mu$

- Folosind perturbaţiile de ordin întâi în expresia amplitudinii de împrăştiere a electronului între starea ψ_i şi ψ_f, precum şi definiţiile $\psi^\dagger$ şi γ^0 (Tabel pag.5):

$$\begin{aligned}T_{fi}&=-\frac{i}{\hbar}\int\psi_f^{\dagger}\overset{(\gamma^0)^2\,\downarrow}{}V\psi_i\,d^4x && \times\left(\gamma^0\right)^2=I \quad \text{cu} \quad \psi^\dagger\gamma^0=\bar{\psi} \quad \gamma^0V=-e\gamma_\mu A^\mu\\&=\frac{i}{\hbar}e\int\bar{\psi}_f\,\gamma_\mu A^\mu\psi_i\,d^4x && \boxed{\text{unde am identificat un curent Dirac}}\ \boxed{j_\mu^{fi}=-e\,\bar{\psi}_f\,\gamma_\mu\,\psi_i}\\&=-\frac{i}{\hbar}\int j_\mu^{fi}\,A^\mu\,d^4x\end{aligned} \tag{1.4}$$

unde curentul de tranziţie, folosind soluţiile Dirac (Tabel pag.5), este

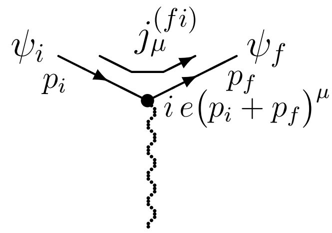
$$\begin{aligned} j_\mu^{fi} &= -e\,\bar{\psi}_f\,\gamma_\mu\,\psi_i \\ &= -e\,\bar{u}_f\,\gamma_\mu\,u_i\,e^{i(p_f-p_i)\cdot x/\hbar} \end{aligned} \tag{1.5}$$

acesta este curentul de tranziţie electromagnetică între stările i şi f ale electronului.

- Comparăm acest curent de tranziţie Dirac cu expresia curentului corespunzător Klein-Gordon:

$$j_\mu^{fi} = -e\,(p_f+p_i)_\mu\,e^{i\,(p_f-p_i)\cdot x}$$

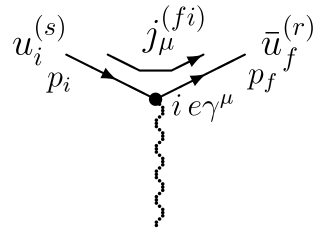
pentru o diagramă Feynman de vertex $ie\,(p_i+p_f)^\mu$



- De data asta, curentul Dirac (1.5) (de spin 1/2) este:

$$j_\mu^{fi} = -e\,\left(\bar{u}_f\,\gamma_\mu\,u_i\right)\,e^{i(p_f-p_i)\cdot x/\hbar} \tag{1.6}$$

corespunzător unei diagrame Feynman cu factor de vertex $ie\gamma^\mu$, ca o matrice 4×4 în spaţiul de spin. Acesta este flancat de spinorii coloană $u_i^{(s)}$ şi linie $\bar{u}_f^{(r)}$, ce descriu electronii iniţial şi final de impuls p_i, respectiv p_f şi stări de spin s şi r.



- Componenta electrică a curentului j_μ^{fi} de interacţie a electronului cu câmpul electromagnetic A^μ se face prin intermediul sarcinii e a acestuia. Acest cuplaj implică $(p_f+p_i)^\mu$, cu termenul electric:

$$(\bar{u}_f\,\gamma^\mu\,u_i)_{el} = \frac{1}{2m}\bar{u}_f\left[(p_f+p_i)^\mu\right]u_i$$

- Componenta magnetică a curentului j_μ^{fi} interacţie a electronului cu câmpul electromagnetic A^μ se face prin intermediul spinului $\sigma=1/2$ al electronului. Acest cuplaj implică $(p_f-p_i)_\nu$, cu termenul:

$$(\bar{u}_f\,\gamma^\mu\,u_i)_{mag} = \frac{1}{2m}\bar{u}_f\left[i\sigma^{\mu\nu}(p_f-p_i)_\nu\right]u_i$$

Această descompunere a curentului de electroni (1.6) într-o componentă electrică şi una magnetică se numeşte *descompunerea Gordon.*

Dacă A^μ nu depinde de timp, atunci $\quad T_{fi} = -i\,2\pi\delta\,(E_f-E_i)\displaystyle\int j_\mu^{fi}\,A^\mu\,d^3x$

Deoarece $E_i=E_f$, vor avea contrubuţie doar componentele spaţiale din (p_f-p_i). De asemenea, $\bar{\psi}(\sigma_{23},\sigma_{31},\sigma_{12})\psi = \bar{\psi}_A\,\sigma\,\psi_A$. Atunci, pentru a identifica interacţia datorată momentului magnetic $(-\vec{\mu}\cdot\vec{B})$, este suficient să arătăm că

$$\int\left[-\frac{e}{2m}\bar{\psi}_f\,i\,\sigma_{\mu\nu}\,(p_f-p_i)^\nu\,\psi_i\right]A^\mu\,d^3x = \int\psi_S^{f\dagger}\left(\frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right)\psi_A^i\,d^3x$$

unde ψ_A reprezintă bispionorul de sus al stării Dirac: $\quad \psi=\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix}$.

1.2.2 Electrodinamica împrăştierii a doi electroni (fermioni)

Ca o ilustrare a utilizării factorilor de vertex QED de mai sus, vom calcula diagramele Feynman din Fig.1.1 pentru împrăştierea e^-e^-.

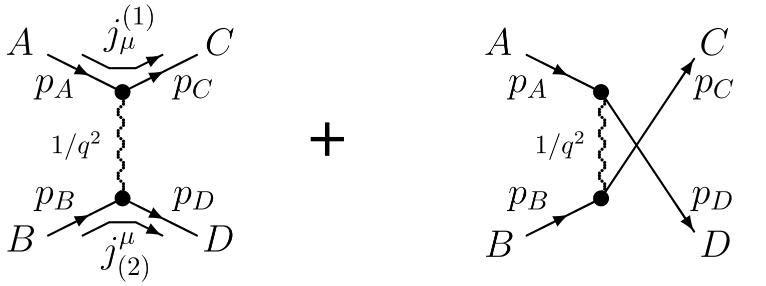


Figura 1.1: Diagrame Feynman de împrăştiere $e^-e^- \to e^-e^-$.

Reluăm raţionamentul din cazul împrăştierii a două particule de spin zero.

- Amplitudinea de tranziţie: $$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar^2}\int j_\mu^{(1)}(x)\left(-\frac{1}{q^2}\right) j^\mu_{(2)}(x)\, d^4x$$

- Folosind curenţii Dirac $j_\mu^{(1)}$ şi $j^\mu_{(2)}$: $$\begin{cases} j_\mu^{(1)} = -e\,\bar{\psi}_C\,\gamma_\mu\,\psi_A = -e\,\bar{u}_C\,\gamma_\mu\,u_A\,e^{i(p_C-p_A)\cdot x} \\ j^\mu_{(2)} = -e\,\bar{\psi}_D\,\gamma^\mu\,\psi_B = -e\,\bar{u}_D\,\gamma^\mu\,u_B\,e^{i(p_D-p_B)\cdot x} \end{cases} \tag{1.7}$$

- Efectuând integrarea după x,

$$\int e^{i\,(p_D+p_C-p_B-p_A)\cdot x}\, d^4x = (2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_D+p_C-p_B-p_A)$$

obţinem

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar^2}\underbrace{\Big(-e\,\bar{u}_C\,\gamma_\mu\,u_A\Big)\Big(-\frac{1}{q^2}\Big)\Big(-e\,\bar{u}_D\,\gamma^\mu\,u_B\Big)}_{\mathcal{M}}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_D+p_C-p_B-p_A)$$
$$= -\frac{i}{\hbar^2}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_D+p_C-p_B-p_A)\mathcal{M}$$

unde transferul de 4-impuls $q = p_C - p_A$, iar amplitudinea invariantă $\mathcal{M}$ este:

$$-i\mathcal{M} = \Big(i\,e\,\bar{u}_C\,\gamma^\mu\,u_A\Big)\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)\Big(i\,e\,\bar{u}_D\,\gamma^\mu\,u_B\Big) \tag{1.8}$$

- Să trecem să evaluăm şi a doua diagramă Feynman din Fig.1.1. Amplitudinea de tranziţie se obţine din (1.8) prin interschimbarea $C \leftrightarrow D$, dar cu un semn minus datorat schimbului de fermioni identici. Astfel, amplitudinea completă de tranziţie (de ordinul cel mai scăzut) pentru împrăştierea (Moller) este:

$$\mathcal{M} = -e^2\frac{(\bar{u}_C\,\gamma_\mu\,u_A)(\bar{u}_D\,\gamma^\mu\,u_B)}{(p_C-p_A)^2} + e^2\frac{(\bar{u}_D\,\gamma_\mu\,u_A)(\bar{u}_C\,\gamma^\mu\,u_B)}{(p_D-p_A)^2} \tag{1.9}$$

- In calculul secţiunii eficace de împrăştiere a electronilor fără a specifica polarizarea acestora, ca în cazul experimental, luăm toate configuraţiile posibile de spin. In acest caz vom media după toate stările de spin, adică facem înlocuirea:

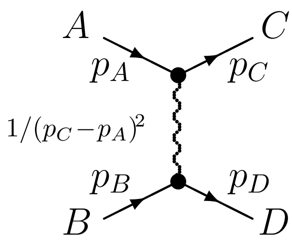
$$|\mathcal{M}|^2 \longrightarrow \overline{|\mathcal{M}|^2} \equiv \frac{1}{(2s_A+1)(2s_B+1)} \sum_{\substack{\text{toate stă-}\\ \text{rile de spin}}} |\mathcal{M}|^2 \tag{1.10}$$

  unde s_A şi s_B sunt stările de spin ale particulelor iniţiale.

Cinematica împrăştierii descrise prin variabilele Mandelstam

- In procesul de împrăştiere $A+B \to C+D$, avem variabilele Mandelstam:

$$\begin{cases} s = (p_A+p_B)^2 = (p_C+p_D)^2 \\ t = (p_C-p_A)^2 = (p_B-p_D)^2 \\ u = (p_D-p_A)^2 = (p_B-p_C)^2 \end{cases} \tag{1.11}$$



- In SCM avem împrăştierea $e^-e^- \to e^-e^-$ în canalul s

$$\begin{cases} p_A = (E, 0, 0, |\vec{p}|), \\ p_B = (E, 0, 0, -|\vec{p}|), \\ p_C = (E, |\vec{p}|\sin\theta, 0, |\vec{p}|\cos\theta), \\ p_D = (E, -|\vec{p}|\sin\theta, 0, -|\vec{p}|\cos\theta) \end{cases} \qquad E = \sqrt{|\vec{p}|^2+m^2}$$

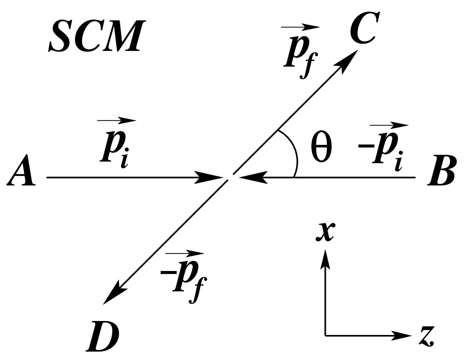
atunci,

$$s = (p_A+p_B)^2 = p_A^2 + p_B^2 + 2p_A\cdot p_B$$
$$= 2m^2 + 2(E^2 - |\vec{p}|^2\cos 180^o) = 2m^2 + 2E^2 + 2|\vec{p}|^2$$
$$= 4\,(|\vec{p}|^2 + m^2)$$

deoarece $|\vec{p}|^2 \geq 0$, atunci $s \geq 4m^2$

$$t = (p_C-p_A)^2 = p_C^2 + p_A^2 - 2\,p_C\cdot p_A$$
$$= \underbrace{2m^2 - 2E^2}_{-2|\vec{p}|} + 2|\vec{p}|^2\cos\theta) = -2|\vec{p}|^2\,(1-\cos\theta)$$

$$u = (p_D-p_A)^2 = p_D^2 + p_A^2 - 2\,p_D\cdot p_A$$
$$= \underbrace{2m^2 - 2E^2}_{-2|\vec{p}|} + 2|\vec{p}|^2\cos(180^o-\theta)$$
$$= -2|\vec{p}|^2\,(1+\cos\theta)$$



deoarece $-1 \leq \cos\theta \leq +1$, atunci $t \leq 0$ şi $u \leq 0$.

Rezumat - mărimile invariante Mandelstam în SCM sunt:

$$\begin{cases} s = 4\,(|\vec{p}|^2+m^2) \\ t = -2|\vec{p}|^2\,(1-\cos\theta) \\ u = -2|\vec{p}|^2\,(1+\cos\theta) \end{cases} \tag{1.12}$$

Secţiunea eficace de împrăştiere nerelativistă e^-e^-

- Vom trece să facem o aplicaţie de evaluare a secţiunii eficace de împrăştiere Moller e^-e^- nepolarizaţi în limita nerelativistă. In acest caz, suma după stările de spin este relativ simplă. La limita $|\vec{p}| \to 0$ funcţiile de stare pentru electroni, ne dau:

$$\begin{aligned} &e^- \text{ incident:} \qquad u^{(s)} = \sqrt{2m}\begin{pmatrix}\chi^{(s)}\\ 0\end{pmatrix} \\ &e^- \text{ emergent:} \qquad \bar{u}^{(s)} = \sqrt{2m}\begin{pmatrix}\chi^{(s)\dagger} & 0\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.13}$$

unde $s = 1, 2$ corespund spinului up şi $down$ de-a lungul axei z.

Adică, pentru
$$\begin{cases} \chi^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & ; \qquad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix} \\ \chi^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & ; \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k\\ -\sigma^k & 0\end{pmatrix} \end{cases} \tag{1.14}$$

obţinem
$$\begin{cases} \bar{u}^{(s)}\,\gamma^\mu\,u^{(s)} = \begin{cases} 2m & \text{dacă } \mu = 0\\ 0 & \text{dacă } \mu \neq 0 \end{cases} \\ \bar{u}^{(s)}\,\gamma^\mu\,u^{(s')} = 0 \quad \text{pentru toate } \mu, \text{dacă } s \neq s' \end{cases} \tag{1.15}$$

- Cu alte cuvinte, direcţia spinului nu se modifică în urma împrăştierii nerelativiste a electronilor. Aceasta, deoarece electronii interacţionează în special prin intermediul câmpului electric, care nu duce la schimbarea de spin. Insă la energii mai înalte, intervine şi câmpul magnetic care poate inversa spinul.
  Introducând (1.15) în (1.9), şi figuând cele şase amplitudini diferite de zero prin direcţiile corespunzătoare de spin, obţinem:

$$\begin{cases} \mathcal{M}\Big(\uparrow\uparrow \to \uparrow\uparrow\Big) = \mathcal{M}\Big(\downarrow\downarrow \to \downarrow\downarrow\Big) = -e^2\,4m^2\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u}\right) \\ \mathcal{M}\Big(\uparrow\downarrow \to \uparrow\downarrow\Big) = \mathcal{M}\Big(\downarrow\uparrow \to \downarrow\uparrow\Big) = -e^2\,4m^2\,\frac{1}{t} \\ \mathcal{M}\Big(\uparrow\downarrow \to \downarrow\uparrow\Big) = \mathcal{M}\Big(\downarrow\uparrow \to \uparrow\downarrow\Big) = e^2\,4m^2\,\frac{1}{u} \end{cases} \tag{1.16}$$

unde $1/t$, $1/u$ sunt definite de (1.11) şi sunt propagatorii fotonic, daţi de transferurile de 4-impuls. Facem sumarea după spini (1.10), avem

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4}\left(4m^2e^2\right)^2 2\left[\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u}\right)^2 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2}\right] \tag{1.17}$$

In SCM (1.12) am primit
$$\begin{cases} t = -2p^2(1-\cos\theta) = -4p^2\sin^2\frac{\theta}{2} \\ u = -2p^2(1+\cos\theta) = -4p^2\cos^2\frac{\theta}{2} \end{cases} \tag{1.18}$$

- unde θ este unghiul de împrăştiere, iar $p = |\vec{p}_i|$ cu $i = A, B, C, D$.
  Atunci, înlocuind (1.17) în (**??**) obţinem secţiunea eficace diferenţială de împrăştiere $e^- e^-$:

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{scm} = \frac{m^2\alpha^2}{16p^4}\left(\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)$$

unde $\alpha = e^2/4\pi$.