

Procese QED în câmpuri laser intense
tema 32

M. Penția

February 11, 2022

”Verbum sapienti sat est”

Cuprins

1	Impăștierea particulelor cu spin 1/2	4
1.1	Construcție diagrame Feynman	5
1.2	Impăștierea e^-e^- fără polarizare	6
1.2.1	Secțiunea eficace de împrăștiere Møller e^-e^-	7
1.3	Impăștierea $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$	8
1.3.1	Amplitudinea de împrăștierea $e^-\mu^-$	10
1.4	Amplitudinea și secțiunea eficace de interacție $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$	11
1.5	ANEXA	13

Capitol 1

Impăștierea particulelor cu spin $1/2$

1.1 Construcție diagrame Feynman

	Curenți de particule Klein-Gordon	Curenți de particule Dirac (electroni)
Amplitudinea de tranziție		
Amplitudinea de tranziție (împrăștiere), în aproximația întâi din teoria perturbațiilor, a unei particule de sarcină q_1 , între stările ψ_i în ψ_f datorită unui potențial perturbator $\hat{V}(x)$ de natură electromagnetică,	$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int \psi_f^*(x) \hat{V}(x) \psi_i(x) d^4x$ $= -\frac{i}{\hbar} \int \psi_f^* i q_1 \overbrace{(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu)}^{\hat{V}(x)} \psi_i d^4x$	$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int \psi_f^\dagger(x) \hat{V}(x) \psi_i(x) d^4x$ $= \frac{i}{\hbar} \int \overbrace{\bar{\psi}_f(x)}^{\psi_f^\dagger \gamma^0} \overbrace{(-e \gamma_\mu A^\mu)}^{\gamma^0 \hat{V}(x)} \psi_i(x) d^4x$
Rescriem amplitudinea de tranziție T_{fi} cu separarea unui curent de tranziție j_μ^{fi} și a câmpului electromagnetic A^μ :	$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int i q_1 \underbrace{[\psi_f^* (\partial_\mu \psi_i) - (\partial_\mu \psi_f^*) \psi_i]}_{j_\mu^{fi}(x)} A^\mu d^4x$	$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int \underbrace{(-e \bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_i)}_{j_\mu^{fi}} A^\mu d^4x$
atunci, amplitudinea de tranziție se poate scrie:	$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x$	$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x$
Curentul de tranziție de particulă		
Am identificat curentul de tranziție $i \rightarrow f$, exprimat prin stările ψ_i și ψ_f :	$j_\mu^{fi}(x) = i q_1 [\psi_f^* (\partial_\mu \psi_i) - (\partial_\mu \psi_f^*) \psi_i]$	$j_\mu^{fi}(x) = -e \bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_i$
Diagrama Feynman de împrăștiere pe câmpul electromagnetic A^μ		
Mișcarea particulelor externe cu p_i , respectiv p_f , este descrisă de unda plană:	$\begin{cases} \psi_i(x) = N_i e^{-i p_i \cdot x / \hbar} \\ \psi_f^*(x) = N_f e^{i p_f \cdot x / \hbar} \end{cases}$ unde, N_i și N_f constante de normare	$\begin{cases} \psi_i(x) = u_i(\vec{p}) e^{-i p_i \cdot x / \hbar} \\ \bar{\psi}_f(x) = \bar{u}_f(\vec{p}) e^{i p_f \cdot x / \hbar} \end{cases}$ unde, u_i și \bar{u}_f sunt spinorii Dirac
Curentul de tranziție j_μ^{fi} din diagrama Feynman de mai sus,	$j_\mu^{fi} = \frac{q_1}{\hbar} N_i N_f (p_i + p_f)_\mu e^{i(p_f - p_i) \cdot x / \hbar}$	$j_\mu^{fi} = (-e \bar{u}_f \gamma_\mu u_i) e^{i(p_f - p_i) \cdot x / \hbar}$
Câmpul de schimb A^μ (fotoni)		
Diagrama Feynman de împrăștiere reciprocă a două particule încărcate		
unde curentul $j_{(2)}^\mu$, ca sursă a câmpului A^μ , este similar j_{fi}^μ	$j_{(2)}^\mu = \frac{q_2}{\hbar} N_B N_D (p_D + p_B)^\mu e^{i(p_D - p_B) \cdot x / \hbar}$	$j_{(2)}^\mu = (-e \bar{u}_D \gamma^\mu u_B) e^{i(p_D - p_B) \cdot x / \hbar}$
Câmpul A^μ produs de curentul $j_{(2)}^\mu$, conform ecuației Maxwell	$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = j_{(2)}^\mu$	
Câmpul electromagnetic A^μ , este o undă plană: $A^\mu \sim e^{i q \cdot x}$, unde q este 4-impulsul fotonului. Atunci,	$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \partial_\nu \partial^\nu e^{i q \cdot x / \hbar} = -q^2 e^{i q \cdot x / \hbar} = -q^2 A^\mu$	
Atunci, legătura între câmpul A^μ și sursa acestuia $j_{(2)}^\mu$ este:	$A^\mu = -\frac{1}{q^2} j_{(2)}^\mu \quad \text{unde } q = p_D - p_B$	
Amplitudinea invariantă		
Introducând A^μ în amplitudinea de tranziție obținem:	$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int j_\mu^{(1)}(x) \left(-\frac{1}{q^2}\right) j_{(2)}^\mu(x) d^4x$	
Folosim curenții $j_\mu^{(1)}$ și $j_{(2)}^\mu$:	$\begin{cases} j_\mu^{(1)} = \frac{q_1}{\hbar} N_A N_C (p_A + p_C)_\mu e^{i(p_C - p_A) \cdot x / \hbar} \\ j_{(2)}^\mu = \frac{q_2}{\hbar} N_B N_D (p_B + p_D)^\mu e^{i(p_D - p_B) \cdot x / \hbar} \end{cases}$	$\begin{cases} j_\mu^{(1)} = -e \bar{\psi}_C \gamma_\mu \psi_A \\ = (-e \bar{u}_C \gamma_\mu u_A) e^{i(p_C - p_A) \cdot x / \hbar} \\ j_{(2)}^\mu = -e \bar{\psi}_D \gamma^\mu \psi_B \\ = (-e \bar{u}_D \gamma^\mu u_B) e^{i(p_D - p_B) \cdot x / \hbar} \end{cases}$
In final, amplitudinea de tranziție va fi:	$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar^3} N_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_D + p_C - p_B - p_A) \mathcal{M}$	$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_D + p_C - p_B - p_A) \mathcal{M}$
unde \mathcal{M} este amplitudinea invariantă	$\mathcal{M} = [q_1 (p_A + p_C)_\mu] \left(-\frac{1}{q^2}\right) [q_2 (p_B + p_D)^\mu]$	$\mathcal{M} = (-e \bar{u}_C \gamma_\mu u_A) \left(-\frac{1}{q^2}\right) (-e \bar{u}_D \gamma^\mu u_B)$
deseori \mathcal{M} se exprimă ca mărime imaginară:	$-i\mathcal{M} = [-i q_1 (p_A + p_C)^\mu] \left(\frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2}\right) [-i q_2 (p_B + p_D)^\nu]$	$-i\mathcal{M} = (i e \bar{u}_C \gamma^\mu u_A) \left(\frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2}\right) (i e \bar{u}_D \gamma^\nu u_B)$

1.2 Impărștierea e^-e^- fără polarizare

Vom calcula amplitudinea invariantă și apoi secțiunea eficace cu ajutorul diagramelor Feynman din Fig.1.1 pentru împrăștierea e^-e^- .

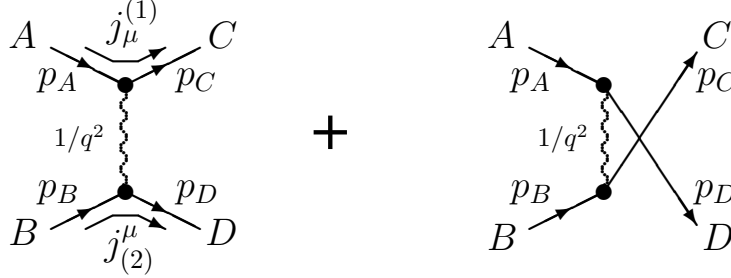


Figura 1.1: Diagrame Feynman de împrăștiere $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$.

Reluăm raționamentul din cazul împrăștierii a două particule de Klein-Gordon.

- Amplitudinea de tranziție:
$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar^2} \int j_\mu^{(1)}(x) \left(-\frac{1}{q^2}\right) j_\mu^{(2)}(x) d^4x$$
- Folosind curenții $j_\mu^{(1)}$ și $j_\mu^{(2)}$:
$$\begin{cases} j_\mu^{(1)} = -e \bar{\psi}_C \gamma_\mu \psi_A = (-e \bar{u}_C \gamma_\mu u_A) e^{i(p_C - p_A) \cdot x / \hbar} \\ j_\mu^{(2)} = -e \bar{\psi}_D \gamma_\mu \psi_B = (-e \bar{u}_D \gamma_\mu u_B) e^{i(p_D - p_B) \cdot x / \hbar} \end{cases} \quad (1.1)$$

- Efectuând integrarea după x obținem amplitudinea de tranziție,

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_D + p_C - p_B - p_A) \mathcal{M}$$

unde transferul de 4-impuls $q = p_C - p_A$, iar amplitudinea invariantă \mathcal{M} este:

$$-i\mathcal{M} = \left(i e \bar{u}_C \gamma^\mu u_A \right) \left(\frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2} \right) \left(i e \bar{u}_D \gamma^\mu u_B \right) \quad (1.2)$$

- Să trecem să evaluăm și a doua diagramă Feynman din Fig.1.1. Amplitudinea de tranziție se obține din (1.2) prin interschimbarea $C \leftrightarrow D$, dar cu un semn minus datorat schimbului de fermioni identici. Astfel, amplitudinea completă de tranziție (în aproximația de cel mai scăzut ordin) pentru împrăștierea e^-e^- este:

$$\mathcal{M} = -e^2 \frac{(\bar{u}_C \gamma_\mu u_A)(\bar{u}_D \gamma^\mu u_B)}{(p_C - p_A)^2} + e^2 \frac{(\bar{u}_D \gamma_\mu u_A)(\bar{u}_C \gamma^\mu u_B)}{(p_D - p_A)^2} \quad (1.3)$$

- In calculul secțiunii eficace de împrăștiere a electronilor fără specificarea polarizării, ca în cazul experimental, luăm toate configurațiile posibile de spin. In acest caz vom media după toate stările inițiale de spin, și sumăm după stările finale de spin, adică facem înlocuirea:

$$|\mathcal{M}|^2 \longrightarrow \overline{|\mathcal{M}|^2} \equiv \frac{1}{(2s_A + 1)(2s_B + 1)} \sum_{\text{toate stările de spin}} |\mathcal{M}|^2 \quad (1.4)$$

unde s_A și s_B sunt stările de spin ale particulelor inițiale.

1.2.1 Secțiunea eficace de împrăștiere Møller $e^- e^-$

- Trecem la evaluarea secțiunii eficace de împrăștiere Møller pentru $e^- e^-$ nepolarizați și nerelativiști $|\vec{p}| \rightarrow 0$. În acest caz, suma după stările de spin este relativ simplă, iar funcțiile de stare pentru electroni sunt:

$$\begin{aligned}
 e^- \text{ incident: } \quad u^{(s)} &= \sqrt{2mc^2} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 e^- \text{ emergent: } \quad \bar{u}^{(s)} &= \sqrt{2mc^2} \begin{pmatrix} \chi^{(s)\dagger} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

unde $s = 1, 2$ corespund spinului *up* și *down* de-a lungul axei z .

$$\text{Adică, pentru } \begin{cases} \chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & ; & \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \\ \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & ; & \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\text{obținem } \begin{cases} \bar{u}^{(s)} \gamma^\mu u^{(s)} = \begin{cases} 2mc^2 & \text{dacă } \mu = 0 \\ 0 & \text{dacă } \mu \neq 0 \end{cases} \\ \bar{u}^{(s)} \gamma^\mu u^{(s')} = 0 & \text{pentru toate } \mu, \text{ dacă } s \neq s' \end{cases} \tag{1.7}$$

- Cu alte cuvinte, direcția spinului nu se modifică în urma împrăștierii nerelativiste a electronilor. Aceasta, deoarece electronii interacționează în special prin intermediul câmpului electric, care nu duce la schimbarea de spin. Însă la energii mai înalte, intervine și câmpul magnetic care poate inversa spinul.
- Introducând (1.7) în (1.3), și figuând cele șase amplitudini diferite de zero prin direcțiile de spin corespunzătoare, obținem:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & & C \\ \swarrow & & \swarrow \\ p_A & & p_C \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bullet & & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ p_B & & p_D \\ \swarrow & & \swarrow \\ B & & D \\ \text{(I)} \end{array} & + & \begin{array}{ccc} A & & C \\ \swarrow & & \swarrow \\ p_A & & p_C \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bullet & & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ p_B & & p_D \\ \swarrow & & \swarrow \\ B & & D \\ \text{(II)} \end{array} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}(AB \rightarrow CD) = \mathcal{M}(AB \rightarrow CD) \\ \underbrace{\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \uparrow\uparrow) = \mathcal{M}(\downarrow\downarrow \rightarrow \downarrow\downarrow)}_{(I)+(II)} = -e^2 4m^2 c^4 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u} \right) \\ \underbrace{\mathcal{M}(\uparrow\downarrow \rightarrow \uparrow\downarrow) = \mathcal{M}(\downarrow\uparrow \rightarrow \downarrow\uparrow)}_{(I)} = -e^2 4m^2 c^4 \frac{1}{t} \\ \underbrace{\mathcal{M}(\uparrow\downarrow \rightarrow \downarrow\uparrow) = \mathcal{M}(\downarrow\uparrow \rightarrow \uparrow\downarrow)}_{(II)} = e^2 4m^2 c^4 \frac{1}{u} \end{array} \right. \tag{1.8}$$

unde termenii cu $1/t$ aparțin primei diagrame, iar cei cu $1/u$ aparțin celei de-a doua diagrame. Variabilele Mandelstam t și u sunt propagatorii fotonici, dați de transferurile de 4-impuls. Facem sumarea după spini (1.4), avem

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4} (4m^2 c^4 e^2)^2 2 \left[\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u} \right)^2 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} \right] \tag{1.9}$$

$$\text{In SCM avem } \left\{ \begin{array}{l} t = -2p^2(1 - \cos \theta) = -4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ u = -2p^2(1 + \cos \theta) = -4p^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{array} \right. \quad (1.10)$$

unde θ este unghiul de împrăștiere, iar $p = |\vec{p}_i|$ cu $i = A, B, C, D$.

- Expresia secțiunii eficace este:
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{scm} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} |\mathcal{M}|^2 \quad (1.11)$$

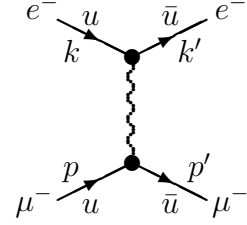
- Inlocuind (1.9) în (1.11)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{scm} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} |\mathcal{M}|^2 = \frac{m^2 c^4 \alpha^2}{16p^4} \left(\frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right) \quad (1.12)$$

unde $\alpha = e^2/4\pi$.

1.3 Împrăștierea $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

- Să vedem în continuare cum trebuie făcute sumările după spin, în cazul în care trebuie să ținem cont de stările de spin și nu mai putem folosi aproximații nerelativiste ca în cazul anterior. De data asta vom lua împrăștierea $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ pentru a ilustra utilizarea tehnicii de sumare după spini pentru diagrame Feynman unice (de cel mai scăzut ordin), ca cel din Figura alăturată.



- Conform (1.2) amplitudinea invariantă \mathcal{M} rezultată din această diagramă este:

$$\mathcal{M} = -e^2 \left(\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \right) \left(\frac{1}{q^2} \right) \left(\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \right) \quad (1.13)$$

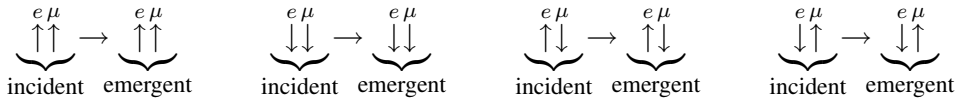
4-impulsurile sunt definite în Figură, iar $q = k - k'$.

- Pentru a obține **secțiunea eficace (nepolarizată)**

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{F} dLips \quad (1.14)$$

va trebui să mediem pătratul amplitudinii invariante după stările de spin, similar (1.4). Separăm sumele după spini pentru vertex-urilor de electron și de muon, adică:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 \equiv \frac{1}{(2(1/2)+1)(2(1/2)+1)} \sum_{\text{toate stările de spin}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} L_{el}^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{muon} \quad (1.15)$$



unde tensorul asociat cu vertexul de electron este
$$L_{el}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\text{spini } e^-} \left[\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \right] \left[\bar{u}(k') \gamma^\nu u(k) \right]^* \quad (1.16)$$

similar, tensorul asociat cu vertexul de muon este
$$L_{\mu\nu}^{muon} = \frac{1}{2} \sum_{\text{spini } \mu^-} \left[\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \right] \left[\bar{u}(p') \gamma_\nu u(p) \right]^* \quad (1.17)$$

$$|\mathcal{M}|^2 \longrightarrow \overline{|\mathcal{M}|^2} \equiv \frac{\sum_{\text{spini } e^-} |\mathcal{M}|^2}{(2(1/2)+1)^2} = \frac{e^4}{q^4} L_{el}^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{muon} \quad (1.18)$$

unde tensorul pentru vertexul de electron este

$$L_{el}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\text{spini } e^-} \left[\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \right] \left[\bar{u}(k') \gamma^\nu u(k) \right]^* \quad (1.19)$$

similar, tensorul pentru vertexul de muon este

$$L_{\mu\nu}^{muon} = \frac{1}{2} \sum_{\text{spini } \mu^-} \left[\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \right] \left[\bar{u}(p') \gamma_\nu u(p) \right]^* \quad (1.20)$$

- Notăm că a doua paranteză dreaptă din (1.19), este o matrice 1×1 (1.7) pentru care conjugata complexă este egală cu conjugata hermitică (transpusă și complex conjugată), adică este:

$$\left[\overbrace{u^\dagger(k') \gamma^0 \gamma^\nu u(k)}^{\bar{u}(k')} \right]^\dagger = \left[u^\dagger(k) \underbrace{\gamma^{\nu\dagger} \gamma^0}_{=\gamma^0 \gamma^\nu} u(k') \right] = \left[\bar{u}(k) \gamma^\nu u(k') \right]$$

unde am folosit $\gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\nu$, iar $u^\dagger \gamma^0 \equiv \bar{u}$. Astfel, conjugarea complexă din (1.19) pur și simplu inversează ordinea termenilor din produsul de matrici.

Vom trece să scriem explicit produsul complex din (1.19) prin elementele de matrice individuale (indexate α, β, \dots , cu sumarea implicită după indicii care se repetă)

$$L_{el}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s'} \underbrace{\bar{u}_\alpha^{(s')}(k')}_{(k'+mc^2)_{\delta\alpha}} \gamma_{\alpha\beta}^\mu \sum_s \underbrace{u_\beta^{(s)}(k) \bar{u}_\gamma^{(s)}(k)}_{(k+mc^2)_{\beta\gamma}} \gamma_{\gamma\delta}^\nu u_\delta^{(s')}(k')$$

unde am făcut re poziționarea stării u_δ , deoarece este și ea o matrice și am folosit relațiile de completitudine (vezi ANEXA): $\sum_{s=1,2} u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p) = \not{p} + mc^2$ unde $\not{p} \equiv \gamma_\mu p^\mu$, care permit

sumarea atât după spinii inițiali cât și după cei finali ai electronului, m este masa electronului.

Să evaluăm sumele după spini din tensorul $L_{el}^{\mu\nu}$. In acest scop vom folosi tehnica de trace^a

^aReamintim proprietățile trace-lor de matrici:

$$\begin{cases} Tr(a) = \sum_i a_{ii} \\ Tr(ab) \equiv \sum_{i,j} a_{ij} b_{ji} = \sum_{i,j} b_{ji} a_{ij} \equiv Tr(ba) \\ Tr(abc) \equiv Tr(cab) \text{ (permutație matrici)} \end{cases} \quad (1.21)$$

Să explicităm cazul

$$ab = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Trace-a este suma elementelor de matrice diagonale, având termeni doar cu maxim doi indici diferiți. Se exclud elementele cu termeni 1, 2, 3, de ex. $a_{12}b_{23}$.

Atunci:

$$L_{el}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\not{k}' + mc^2)_{\delta\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} (\not{k} + mc^2)_{\beta\gamma} \gamma_{\gamma\delta}^{\nu}$$

explicit sumarea $\delta \rightarrow$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\delta} [(\not{k}' + mc^2) \gamma^{\mu} (\not{k} + mc^2) \gamma^{\nu}]_{\delta\delta} \quad (1.22)$$

$$= \frac{1}{2} Tr [(\not{k}' + mc^2) \gamma^{\mu} (\not{k} + mc^2) \gamma^{\nu}]$$

Astfel $L_{el}^{\mu\nu}$ devine trace-a produsului a patru matrici 4×4 .
Aceste trace de matrici au unele proprietăți utile^a

^aReamintim, matricile γ satisfac relația de anticomutare $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}$

Se poate obține direct trace-a (suma elementelor de pe diagonală) produsului de matrici γ . Folosind notația $\not{a} = \gamma_{\mu}a^{\mu}$, teoremele de trace se pot scrie:

$$\begin{cases} Tr(I) = 4 \\ \text{Trace-ul produsului unui număr impar de matrici } \gamma_{\mu} \text{ este zero} \\ Tr(\not{a} \not{b}) = 4a \cdot b \\ Tr(\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)] \end{cases} \quad (1.23)$$

Demonstrarea se face prin dezvoltările:

$$Tr(\not{a} \not{b}) = \frac{1}{2} Tr(\not{a} \not{b} + \not{b} \not{a}) = \frac{1}{2} 2 g^{\mu\nu} a_{\mu} b_{\nu} Tr(I) = 4 a \cdot b$$

$$Tr(\not{a}_1 \cdots \not{a}_n) = Tr(\overbrace{\not{a}_1 \cdots \not{a}_n}^{\uparrow} \gamma^5 \gamma^5)$$

$$= (-1)^n Tr(\underbrace{\gamma^5 \not{a}_1 \cdots \not{a}_n \gamma^5}_{\uparrow}) = (-1)^n Tr(\not{a}_1 \cdots \not{a}_n)$$

dacă n este impar, trace-a este zero.

Trace cu matricea γ^5 :

$$\begin{cases} Tr \gamma^5 = 0 \\ Tr(\gamma^5 \not{a} \not{b}) = 0 \\ Tr(\gamma^5 \not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4i \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} a^{\mu} b^{\nu} c^{\lambda} d^{\sigma} \end{cases} \quad (1.24)$$

unde $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} = +1(-1)$ pentru $\mu, \nu, \lambda, \sigma$ au o permutare pară (impară), și 0 pentru doi indici egali.

Alte relații utile în calculul de trace:

$$\begin{cases} \gamma_{\mu} \gamma^{\mu} = 4 \\ \gamma_{\mu} \not{a} \gamma^{\mu} = -2 \not{a} \\ \gamma_{\mu} \not{a} \not{b} \gamma^{\mu} = 4 a \cdot b \\ \gamma_{\mu} \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^{\mu} = -2 \not{c} \not{b} \not{a} \end{cases} \quad (1.25)$$

1.3.1 Amplitudinea de împrăștierea $e^{-}\mu^{-}$

- Putem acum să trecem la evaluarea tensorului $L_{el}^{\mu\nu}$ pentru vertex-ul de electron (1.19), folosind teoremele de trace (1.23).

$$L_{el}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} Tr(\not{k}' \gamma^{\mu} \not{k} \gamma^{\nu}) + \frac{1}{2} m^2 c^4 Tr(\gamma^{\mu} \gamma^{\nu})$$

$$= 2 \left(k'^{\mu} k^{\nu} + k'^{\nu} k^{\mu} - (k' \cdot k - m^2 c^4) g^{\mu\nu} \right) \quad (1.26)$$

- Evaluarea $L_{\mu\nu}^{muon}$ (1.20) este identică. Adică,

$$L_{\mu\nu}^{muon} = 2 \left(p'_{\mu} p_{\nu} + p'_{\nu} p_{\mu} - (p' \cdot p - M^2 c^4) g_{\mu\nu} \right) \quad (1.27)$$

unde M este masa muon-ului.

Pentru medierea (1.18) a pătratului amplitudinii invariante, evaluăm produsul $L_{el}^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{muon}$, astfel că în final obținem valoarea mediată după stările de spin:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{q^4} \left[(k' \cdot p')(k \cdot p) + (k' \cdot p)(k \cdot p') - m^2 c^4 p' \cdot p - M^2 c^4 k' \cdot k + 2m^2 M^2 c^8 \right] \quad (1.28)$$

- La limita relativistă, putem să neglijăm termenii cu $m^2 c^4$ și $M^2 c^4$, de aceea,

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{(k - k')^4} \left[(k' \cdot p')(k \cdot p) + (k' \cdot p)(k \cdot p') \right] \quad (1.29)$$

- În plus, la această limită, variabilele Mandelstam devin:

$$\begin{cases} s \equiv (k + p)^2 = 2k \cdot p = 2k' \cdot p' \\ t \equiv (k - k')^2 = -2k \cdot k' = -2p \cdot p' \\ u \equiv (k - p')^2 = -2k \cdot p' = -2k' \cdot p \end{cases} \quad (1.30)$$

- Astfel, la energii înalte, interacția $e^- \mu^-$ nepolarizată, are amplitudinea invariantă (1.29), este

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2} \quad (1.31)$$

1.4 Amplitudinea și secțiunea eficace de interacție $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$

- Bazat pe rezultatele anterioare, putem obține imediat amplitudinea pentru interacția cu producere de perechi $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$. Din interacția anterioară $e^-(k) \mu^-(p) \rightarrow e^-(k') \mu^-(p')$, facem "încrucișarea" $\mu^-(p) \leftrightarrow e^-(k')$, adică facem trecerea $e^-(k')$ final la $e^+(-k')$ inițial și a $\mu^-(p)$ inițial la $\mu^+(-p)$ final. Interschimbarea termenilor (1.30) se face prin $k' \leftrightarrow -p$, cu schimbarea semnului 4-impulsurilor, adică se interschimbă canalele $s \leftrightarrow t$ în (1.31).

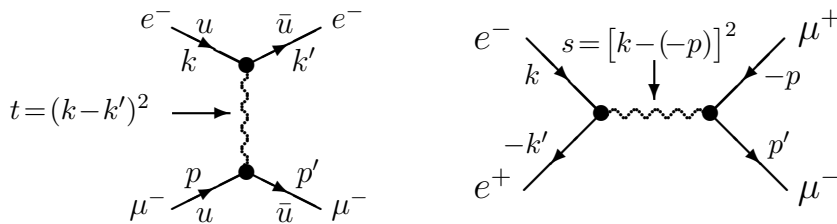


Figura 1.2: Diagramele Feynman cu încrucișarea $\mu^-(p) \leftrightarrow e^-(k')$

- Atunci, interacția $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$ are amplitudinea invariantă (1.29),

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2} \quad (1.32)$$

- De data asta interacția $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$ este un proces pe canalul s , iar diagrama corespunzătoare este prezentată în Figura 1.2.

- Bazat pe acest rezultat se poate determina secțiunea eficace diferențială pentru împrăștierea $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$, folosind relația (1.11).

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{scm} = \frac{1}{64\pi^2 s} 2e^4 \left[\frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \right] \quad (1.33)$$

mărima din parantezele drepte este $(t^2 + u^2)/s^2$ din expresia (1.32).

- Folosind $\alpha = e^2/4\pi$, secțiunea diferențială se poate scrie:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{scm} = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta) \quad (1.34)$$

- Secțiunea totală se află prin integrarea după θ, φ cu $d\Omega = \sin^2 \theta d\theta d\varphi$:

$$\boxed{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}} \quad (1.35)$$

- Pentru compararea cu datele experimentale, de exemplu de la collider-ul e^-e^+ cu energia pe fascicul E_b , atunci în SCM avem energia $\sqrt{s} = 2E_b$, iar ecuația (1.35) se poate scrie

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{20(nb)}{E_b^2 (\text{în } GeV^2)} \quad (1.36)$$

1.5 ANEXA

Relațiile de Completitudine

- Folosind expresiile matriciale ale spinorilor u și v precum și ale spinorilor adjuncți $\bar{u} \equiv u^\dagger \gamma^0$ și $\bar{v} \equiv v^\dagger \gamma^0$, adică,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad ; \quad u^{(s)} = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} c}{E + mc^2} \chi^{(s)} \end{pmatrix} \quad ; \quad \bar{u}^{(s)} = N \left(\chi^{(s)\dagger} \quad \frac{-\vec{\sigma} \cdot \vec{p} c}{E + mc^2} \chi^{(s)\dagger} \right)$$

- Calculăm întâi relația de completitudine pentru spinorii $u^{(s)} \bar{u}^{(s)}$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u^{(s)} \bar{u}^{(s)} &= N^2 \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} c}{E + mc^2} \right) \chi^{(s)} \end{pmatrix} \left(\chi^{(s)\dagger} \quad \left(\frac{-\vec{\sigma} \cdot \vec{p} c}{E + mc^2} \right) \chi^{(s)\dagger} \right) \\ &= N^2 \begin{pmatrix} I & \frac{-\vec{\sigma} \cdot \vec{p} c}{E + mc^2} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} c}{E + mc^2} & - \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p} c}{E + mc^2} \right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E + mc^2 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} c \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} c & -(E - mc^2) \end{pmatrix} = \not{p} + mc^2 \end{aligned} \quad (1.37)$$

deoarece $\sum \chi^{(s)} \chi^{(s)\dagger} = I$, cu $N^2 = E + mc^2$, iar $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$.

Verificare (1.37)^a

^aDezvoltăm expresia finală (1.37): $\not{p} + mc^2$

$$\begin{aligned} \gamma^\mu p_\mu + mc^2 &= \gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i + mc^2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} p_0 + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} p_i + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} mc^2 \\ &= \begin{pmatrix} p_0 + mc^2 & -\sigma^i p_i \\ \sigma^i p_i & -p_0 + mc^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E + mc^2 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} c \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} c & -(E - mc^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Similar se determină și relația de completitudine pentru spinorii $v^{(s)} \bar{v}^{(s)}$: $\sum_{s=1,2} v^{(s)}(p) \bar{v}^{(s)}(p)$

- In concluzie, relațiile de completitudine sunt:

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p) &= \not{p} + mc^2 \\ \sum_{s=1,2} v^{(s)}(p) \bar{v}^{(s)}(p) &= \not{p} - mc^2 \end{aligned}} \quad (1.38)$$

Aceste relații matriciale 4×4 se folosesc în evaluarea diagramelor Feynman.