Procese QED în câmpuri laser intense
tema 43

M. Penţia

April 27, 2022

.

”Verbum sapienti sat est”

Cuprins

1.1 Electrodinamica Cuantică (QED) - Teorie de Calibrare

- Electrodinamica Cuantică este teoria unificată a interacţiei câmpurilor Dirac şi electromagnetice. Este teoria model pentru descrierea unificată a câmpurilor de interacţii fundamentale.

- Lagrangian-ul pentru *câmpurile cuantice Dirac* libere $\hat{\psi}$ şi $\hat{\bar{\psi}}$, este:

$$\mathcal{L}=\hat{\bar{\psi}}\Big(i\hbar c\,\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2\Big)\hat{\psi} \qquad (1.1)$$

- Acesta este invariant Lorentz, dar şi invariant la o <u>transformare de calibrare</u> (de fază) globală, ca grup de transformări unitare $U(1)$ de un parametru $\chi = const.$,

$$\begin{cases} \hat{\psi} \to \hat{\psi}\,' = e^{\frac{ie\chi}{\hbar c}}\hat{\psi} \\ \hat{\bar{\psi}} \to \hat{\bar{\psi}}\,' = \hat{\bar{\psi}}\,e^{-\frac{ie\chi}{\hbar c}} \end{cases} \qquad (1.2)$$

- Lagrangian-ul Dirac (1.1) este evident invariant (simetric) la o transformare globală $U(1)$, deoarece χ este o constantă, independentă de coordonatele x şi derivatele parţiale acţionează doar asupra câmpurilor, nu şi asupra factorului de transformare $e^{\frac{ie\chi}{\hbar c}}$, iar în termenii $\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi}$ sau $\hat{\bar{\psi}}\partial_\mu\hat{\psi}$, factorii $e^{-\frac{ie\chi}{\hbar c}}e^{\frac{ie\chi}{\hbar c}}$ se anulează rerciproc (vezi mai jos cazul contrar).

- Dacă parametrul χ al transformării (1.2), nu mai este o constantă, ci o funcţie ce depinde de poziţia în spaţiu-timp x, adică $\chi \to \chi(x)$, atunci, Lagrangian-ul Dirac (1.1) nu mai este invariant, deoarece $e^{\frac{ie\chi(x)}{\hbar c}}$ este funcţie de spaţiu-timp şi nu mai comută cu derivatele parţiale. Acum derivata acţionează şi asupra funcţiei $\chi(x)$, ducând la apariţia unui coeficient suplimentar, absent înainte de transformarea Lagrangian-ului.

- <u>Transformare de calibrare</u> (de fază) locală, este:

$$\begin{cases} \hat{\psi} \to \hat{\psi}\,' = e^{\frac{ie\chi(x)}{\hbar c}}\hat{\psi} \\ \hat{\bar{\psi}} \to \hat{\bar{\psi}}\,' = \hat{\bar{\psi}}\,e^{-\frac{ie\chi(x)}{\hbar c}} \end{cases} \qquad (1.3)$$

- Mărimile fizice ca densitatea $(\hat{\bar{\psi}}\,\hat{\psi})$ sau curentul $(\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\hat{\psi})$ sunt invariante la această transformare de fază locală (1.3).

- Cu aceeaşi transformarea $U(1)$ de calibrare locală (1.3), densitatea de Lagrangian devine,

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \overbrace{\hat{\bar{\psi}}\,e^{-\frac{ie\chi(x)}{\hbar c}}}^{\hat{\bar{\psi}}'}\left(i\hbar c\gamma^\mu \underbrace{\partial_\mu} - mc^2\right)\overbrace{e^{\frac{ie\chi(x)}{\hbar c}}\hat{\psi}}^{\hat{\psi}'}$$

$$= \hat{\bar{\psi}}\,e^{-\frac{ie\chi(x)}{\hbar c}}\left[i\hbar c\gamma^\mu\left(e^{\frac{ie\chi(x)}{\hbar c}}\partial_\mu\hat{\psi} + \frac{ie}{\hbar c}e^{\frac{ie\chi(x)}{\hbar c}}\partial_\mu\chi(x)\hat{\psi}\right) - mc^2 e^{\frac{ie\chi(x)}{\hbar c}}\hat{\psi}\right]$$

acum scoatem $e^{\frac{ie\chi(x)}{\hbar c}}$ în faţa parantezei drepte, şi simplificăm cu $e^{-\frac{ie\chi(x)}{\hbar c}}$

$$= \hat{\bar{\psi}}\left(i\hbar c\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c}\underbrace{\partial_\mu\chi(x)}_{\text{trebuie compensat}}\right) - mc^2\right)\hat{\psi} \neq \underbrace{\hat{\bar{\psi}}\Big(i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2\Big)\hat{\psi}}_{\mathcal{L}}$$

Deci, Lagrangian-ul nu mai este invariant la o transformare de calibrare locală a câmpurilor, datorită derivatei ∂_μ, care nu se transformă covariant la o asemenea transformare.

- Să căutăm un Lagrangian invariant la o transformare locală de calibrare $U(1)$ (local gauge symmetry). Folosim metoda de realizare a invarianţei de calibrare locală a ecuaţiilor de mişcare din mecanica cuantică pentru o particulă încărcată aflată în câmp electromagnetic, prin înlocuirea derivatei ∂_μ cu derivata covariantă D_μ în Lagrangian sau ecuaţiile de mişcare.

- Pentru a face ca derivata să se transforme covariant (şi deci Lagrangian-ul să fie invariant), va trebui să facem o transformare de calibrare locală, similară cu cea din mecanica cuantică, unde am urmărit invarianţa ecuaţiilor de mişcare (Schrödinger, Klein-Gordon a unei particule încărcate în câmp electromagnetic.

  Prin această transformare de data asta, se introduce câmpul vectorial de compensare, numit câmp de calibrare (gauge field).

- La o transformare de calibrare (de fază) locală (1.3) a operatorilor de câmp $\hat{\psi} \to \hat{\psi}'$ şi $\hat{\bar{\psi}} \to \hat{\bar{\psi}}'$, pentru a păstra invariantă densitatea de Lagrangian $\mathcal{L}$ (1.1), facem înlocuirea derivatei: $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c}\hat{A}_\mu$, simultan cu transformarea câmpurilor, $\hat{A}_\mu \to \hat{A}'_\mu = \hat{A}_\mu - \partial_\mu \chi(x)$,

- Deci, câmpul de calibrare $\hat{A}_\mu$, se introduce prin înlocuirea derivatei ∂_μ, cu derivata covariantă D_μ, simultan cu transformarea de calibrare a câmpului $\hat{A}_\mu$

$$\begin{cases} \partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + \dfrac{i\,e}{\hbar c} A_\mu \\ \hat{A}_\mu \longrightarrow \hat{A}'_\mu = \hat{A}_\mu - \partial_\mu \chi(x) \end{cases} \tag{1.4}$$

- Lagrangian-ul de câmp cuantic Dirac, devine:

$$\boxed{\mathcal{L} = i\hbar\, c\, \underbrace{\hat{\bar{\psi}}\, \gamma^\mu D_\mu\, \hat{\psi}} - m\, c^2\, \underbrace{\hat{\bar{\psi}}\, \hat{\psi}}} \tag{1.5}$$

- Să verificăm că într-adevăr, acum Lagrangian-ul (1.5) este invariant la transformările de calibrare:

$$\begin{cases} \hat{\psi} \longrightarrow \hat{\psi}\,' = e^{\frac{i\,e\,\chi(x)}{\hbar c}}\, \hat{\psi} \\ \hat{\bar{\psi}} \longrightarrow \hat{\bar{\psi}}\,' = \hat{\bar{\psi}}\, e^{-\frac{i\,e\,\chi(x)}{\hbar c}} \\ \hat{A}_\mu \longrightarrow \hat{A}'_\mu = \hat{A}_\mu - \partial_\mu \chi(x) \end{cases} \tag{1.6}$$

- Intâi, termenul $\hat{\bar{\psi}}\,'\hat{\psi}' = \hat{\bar{\psi}}\hat{\psi}$ este evident invariant la transformarea de calibrare (1.6).

- Acum calculăm şi transformarea de calibrare a derivatei covariante D_μ acţionând asupra câmpului $\hat{\psi}$,

$$
\begin{aligned}
D_\mu\hat{\psi} \;\longrightarrow D'_\mu\hat{\psi}' &= \left[\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c}\hat{A}'_\mu\right]\hat{\psi}' = \left[\partial_\mu + \frac{i\,e}{\hbar\,c}\overbrace{\left(\hat{A}_\mu - \partial_\mu\chi(x)\right)}^{\hat{A}'_\mu}\right]\overbrace{e^{\frac{i\,e\,\chi(x)}{\hbar\,c}}\,\hat{\psi}}^{\hat{\psi}\,'} \\
&= \underbrace{\partial_\mu\left(e^{\frac{i\,e\,\chi(x)}{\hbar\,c}}\,\hat{\psi}\right)} + \frac{i\,e}{\hbar\,c}e^{\frac{i\,e\,\chi(x)}{\hbar\,c}}\,\hat{A}_\mu\hat{\psi} - \frac{i\,e}{\hbar\,c}e^{\frac{i\,e\,\chi(x)}{\hbar\,c}}\,\partial_\mu\chi(x)\,\hat{\psi} \\
&= \cancel{\frac{ie}{\hbar c}e^{\frac{ie\chi(x)}{\hbar\,c}}}\,\partial_\mu\chi(x)\,\hat{\psi} + e^{\frac{ie\chi(x)}{\hbar\,c}}\,\partial_\mu\hat{\psi} + \frac{ie}{\hbar c}e^{\frac{ie\chi(x)}{\hbar\,c}}\,\hat{A}_\mu\hat{\psi} - \cancel{\frac{ie}{\hbar c}e^{\frac{ie\chi(x)}{\hbar\,c}}\,\partial_\mu}\chi(x)\,\hat{\psi} \\
&= e^{\frac{ie\chi(x)}{\hbar\,c}}\,\partial_\mu\hat{\psi} + \frac{ie}{\hbar c}e^{\frac{ie\chi(x)}{\hbar\,c}}\,\hat{A}_\mu\hat{\psi} = e^{\frac{ie\chi(x)}{\hbar\,c}}\,\underbrace{\left[\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c}\hat{A}_\mu\right]}_{D_\mu}\,\hat{\psi} = e^{\frac{ie\chi(x)}{\hbar\,c}}\,D_\mu\hat{\psi}
\end{aligned}
$$

- Deci, derivata covariantă are aceeaşi transformare de calibrare (1.6) ca şi funcţia de câmp $\hat{\psi}$:

$$D_\mu\hat{\psi} \longrightarrow D'_\mu\hat{\psi}\,' = e^{\frac{ie\chi(x)}{\hbar\,c}}\,D_\mu\hat{\psi} \tag{1.7}$$

- Termenul cinetic din Lagrangianul Dirac (1.5), la transformare de calibrare (1.6), devine:

$$\bar{\hat{\psi}}\gamma^\mu D_\mu\hat{\psi} \longrightarrow \bar{\hat{\psi}}\,'\gamma^\mu D'_\mu\hat{\psi}\,' = \bar{\hat{\psi}}\,e^{-\frac{ie\chi(x)}{\hbar\,c}}\,e^{\frac{ie\chi(x)}{\hbar c}}\gamma^\mu D_\mu\hat{\psi} = \bar{\hat{\psi}}\gamma^\mu D_\mu\hat{\psi} \tag{1.8}$$

- Reluăm, Lagrangian-ul de câmp Dirac pentru particula încărcată aflată în câmp EM este:

$$\mathcal{L} = \bar{\hat{\psi}}\left(i\hbar c\gamma^\mu\overbrace{\left(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c}\hat{A}_\mu\right)}^{D_\mu} - mc^2\right)\hat{\psi} \tag{1.9}$$

- Transformarea de calibrare a Lagrangian-ului, este:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \to \mathcal{L}' &= \overbrace{\bar{\hat{\psi}}\,e^{-\frac{ie}{\hbar c}\chi(x)}}^{\bar{\hat{\psi}}\,'}\left[i\hbar c\gamma^\mu\left(\underbrace{\partial_\mu} + \frac{ie}{\hbar c}\overbrace{\left(\hat{A}_\mu - \partial_\mu\chi(x)\right)}^{\hat{A}'_\mu}\right) - mc^2\right]\overbrace{e^{\frac{ie}{\hbar c}\chi(x)}\hat{\psi}}^{\hat{\psi}\,'} \\
&= \bar{\hat{\psi}}\left(i\hbar c\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \cancel{\frac{ie}{\hbar c}\partial_\mu\chi(x)} + \frac{ie}{\hbar c}\hat{A}_\mu - \cancel{\frac{ie}{\hbar c}\partial_\mu\chi(x)}\right) - mc^2\right)\hat{\psi} \\
&= \bar{\hat{\psi}}\left(i\hbar c\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c}\hat{A}_\mu\right) - mc^2\right)\hat{\psi} = \mathcal{L}
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

- In acest fel am demonstrat <u>invarianţa de calibrare locală</u> $U(1)$ a Lagrangian-ului (1.5).

- Lagrangian-ul (1.9) se poate scrie

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\hat{\psi}}\left(i\hbar c\gamma^\mu\overbrace{\left(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c}\hat{A}_\mu\right)}^{D_\mu} - mc^2\right)\hat{\psi} \\
&= \bar{\hat{\psi}}\left(i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2\right)\hat{\psi} - e\,\underbrace{\bar{\hat{\psi}}\gamma^\mu\hat{\psi}}_{j^\mu}\,\hat{A}_\mu
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

- Primul termen este Lagrangian-ul de câmp Dirac liber, iar al doilea termen este componenta de interacţie dintre 4-curentul j^μ provenit din ecuaţia Dirac şi câmpul electromagnetic $\hat{A}_\mu$, similară componentei de sursă din Lagrangian-ul de câmp electromagnetic. Din condiţia de invarianţă la calibrare apare termenul de interacţie a câmpului Dirac cu un câmp vectorial $\hat{A}_\mu$ - câmpul electromagnetic.

- **Notă**: Operatorul 4-vector $\hat{A}_\mu$ cerut pentru a asigura invarianţa locală de calibrare, trebuie să aibe aceleaşi proprietăţi de transformare ca şi potenţialul 4-vector A_μ din electrodinamica clasică la transformarea de calibrare locala $U(1)$. De aceea este normal a alege câmpul electromagnetic, drept câmp de calibrare cuantic (gauge field).

- Acum dacă adăugăm şi termenul cinetic din Lagrangian-ul pentru câmpul electromagnetic $\hat{A}_\mu$, $\quad -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, obţinem Lagrangian-ul complet QED:

$$\mathcal{L}_{QED} = \hat{\overline{\psi}}\Big(i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2\Big)\hat{\psi} - e\,j^\mu\hat{A}_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (1.12)$$

- Lagrangian-ul de electrodinamica cuantică (QED), se scrie de obicei ca suma Lagrangianului de câmp Dirac (1.9) şi a celui electromagnetic liber. Acest Lagrangian QED acum este invariant la transformarea de calibrare locală $U(1)$.

$$\boxed{\mathcal{L}_{QED} = \hat{\overline{\psi}}\Big(i\hbar\, c\,\gamma^\mu D_\mu - mc^2\Big)\hat{\psi} - \frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}} \qquad (1.13)$$

- Lagrangian-ul $\mathcal{L}_{QED}$ poate explica toate fenomenele fizice de la scala macroscopică până la cea microscopică $10^{-23}\ cm$. De aceea nu este surprinzător că Feynman, Schwinger şi Tomonaga au primit premiul Nobel în 1965 pentru această realizare.

- Folosind ecuaţiile Euler-Lagrange pentru câmpuri:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_i} - \partial_\mu\Bigg(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i)}\Bigg) = 0 \qquad (1.14)$$

  unde Lagrangian-ul (1.13), cu derivata covariantă D_μ scrisă explicit, este:

$$\mathcal{L}_{QED} = \hat{\overline{\psi}}\Big(i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2\Big)\hat{\psi} - e\,\hat{\overline{\psi}}\gamma^\mu\hat{\psi}\hat{A}_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (1.15)$$

- Derivatele Lagrangianului QED în raport cu ψ, vizate de ecuaţiile Euler-Lagrange (1.14), sunt:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right) = \partial_\mu\left(i\hbar c\overline{\psi}\gamma^\mu\right) \quad ; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = -e\overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu - mc^2\overline{\psi}$$

- Inlocuind în (1.14), obţinem: $\qquad i\hbar c\,\partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu + e\overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu + mc^2\overline{\psi} = 0$

  Separăm ecuaţia Dirac pentru $\overline{\psi}$: $\qquad \boxed{\Big(i\hbar c\,\gamma^\mu\partial_\mu + mc^2\Big)\overline{\psi} = -e\gamma^\mu A_\mu\overline{\psi}}$

Membrul stâng este ecuaţia Dirac pentru câmpul $\overline{\psi}$ adjunct, iar membrul drept este termenul de interacţie cu câmpul electromagnetic.

- Similar, luând derivatele Lagrangianului QED în raport cu $\overline{\psi}$, vizate de ecuaţiile Euler-Lagrange (1.14), obţinem în final

  Ecuaţia conjugată Hermitic: $i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu\psi - e\gamma^\mu A_\mu\psi - mc^2\psi = 0$

  Separăm ecuaţia Dirac pentru $\hat{\psi}$: $\boxed{\left(i\hbar c\,\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2\right)\psi = e\gamma^\mu A_\mu\psi}$

  Membrul stâng este ecuaţia Dirac cunoscută, iar membrul drept este termenul de interacţie cu câmpul electromagnetic.

- Derivatele Lagrangianului QED în raport cu componentele de câmp A_μ, vizate de ecuaţiile Euler-Lagrange (1.14), sunt:

$$\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\right) = \partial_\nu\underbrace{(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)}_{F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu}} \quad ; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{A_\mu} = -e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$$

- Inlocuind în (1.14), obţinem: $\boxed{\partial_\nu F^{\nu\mu} = e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi}$

  Cu condiţia de calibrare Lorentz $\partial_\nu A^\nu = 0$, ecuaţia pentru câmpul A^μ, devine cea de propagare a 4-potenţialului, ca versiunea QED a ecuaţiilor Maxwell.

$$\partial_\nu\partial^\nu A^\mu = e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$$