Procese QED în câmpuri laser intense
tema 45

M. Penţia

August 10, 2022

”Verbum sapienti sat est”

Cuprins

1.1 Comutatorii de câmp şi cauzalitatea teoriei

Pentru ca o teorie să exprime legături cauzale între două evenimente, aflate în punctele spaţiu-timp x şi y, trebuie ca un semnal să poată ajunge de la unul la celălalt, adică să fie în interiorul conului luminos, $(x-y)^2 = (ct_1 - ct_2)^2 - (\vec{x}-\vec{y})^2 > 0$. Componenta temporala (pozitivă) la pătrat, trebuie să fie mai mare ca cea spaţială (negativă) la pătrat. In Figura 1.1 evenimentul $\hat{E}_2(y)$ este în afara conului luminos, este separat spaţial faţă de $\hat{E}_1(x)$, adică $(x-y)^2 < 0$.

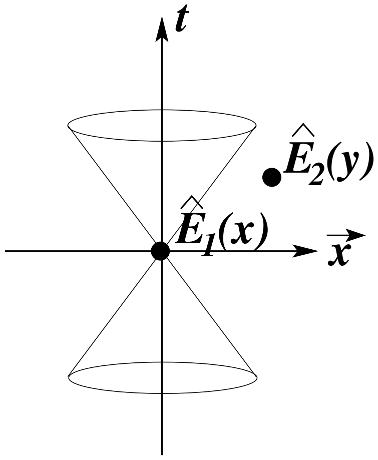


Figura 1.1: Două evenimente $\hat{E}_1(x)$ şi $\hat{E}_2(y)$, cu $x = (t_1, 0, 0, 0)$ şi $y = (t_2, y_1, 0, 0)$. Separate spaţial dacă $(x-y)^2 < 0$. Separate temporal dacă $(x-y)^2 > 0$, unde $(x-y)^2 = (ct_1 - ct_2)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2$

Dacă evenimentele sunt separate spaţial, toţi operatorii pentru asemenea evenimente, în afara conului luminos, nu pot avea legătură cauzală, deci trebuie să comute:

$$\left[\hat{E}_1(x), \hat{E}_2(y)\right] = 0 \quad \text{pentru orice} \quad (x-y)^2 < 0 \tag{1.1}$$

Aceasta face ca o măsurare în x nu va afecta măsurarea în y, atunci când evenimentele din x şi y nu pot fi legate cauzal.
Să vedem dacă Teoria Cuantică a Câmpurilor satisface aceasta proprietate fundamentală. Pentru aceasta vom folosi comutatorul de câmpuri luate la poziţii spaţio-temporale diferite:

$$\left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)\right] = \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) - \hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x) \tag{1.2}$$

Folosind expresia generală a unui câmp scalar real liber (**??**)

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \Big(\hat{a}_{\vec{p}}\, e^{-i\,p\cdot x} + \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}\, e^{i\,p\cdot x}\Big)$$

Calculând (1.2), obţinem[1]

[1] $\left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)\right] = \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) - \hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x) =$

$$\left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)\right] = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}}\left(e^{-i\,p\,\cdot\,(x-y)} - e^{i\,p\,\cdot\,(x-y)}\right) \tag{1.3}$$

- Pentru evenimente separate temporal, în interiorul conului luminos $(x-y)^2 > 0$,

  $$\left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)\right] \neq 0 \tag{1.4}$$

  Pentru două evenimente aflate pe axa t, avem $x-y=(t,0,0,0)$, şi $p=(E,\vec{p})$ care conform (1.3) ne dă comportarea comutatorului:

  $$\left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)\right] \sim e^{-imt} - e^{+imt}$$

  unde m este masa particulei $\quad (E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2 \quad \text{cu} \quad \vec{p} = 0)$.

- Pentru evenimente separate spaţial, în afara conului luminos $(x-y)^2 < 0$

  $$\left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)\right] = 0 \tag{1.5}$$

  Pentru două evenimente aflate pe axa x, avem $x-y = \Big(0, -(\vec{x}-\vec{y})\Big)$, iar $(x-y)^2 = -(\vec{x}-\vec{y})^2 < 0$. Din (1.3) obţinem comutatorul:

  $$\left[\hat{\phi}(t,\vec{x}), \hat{\phi}(t,\vec{y})\right] = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}} \left(e^{i\,\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} - e^{-i\,\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\right) \tag{1.6}$$

  Dacă schimbăm semnul $\vec{p} \to -\vec{p}$, valoarea integralei după $d^3\vec{p}$, între $-\infty$ şi $+\infty$, nu se schimbă. Dar $\left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)\right]$ este invariant Lorentz, deci el nu poate depinde decât de $(x-y)^2$, şi trebuie să fie egal cu zero, pentru toate $(x-y)^2 < 0$ (separare spaţială).

- In concluzie, teoria noastră este o teorie cauzală, iar comutatorii se anulează în afara conului luminos. Această proprietate se păstrează şi în teoria câmpurilor în interacţie, fapt ce constituie o axiomă în teoriile de câmp locale. Totuşi, faptul că $\left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)\right]$ este o funcţie complexă, şi nu un operator, este o proprietate doar a câmpurilor libere.

$$= \int d^3\vec{p}\left(\frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\right)^2 \overbrace{\left(\hat{a}_{\vec{p}}\,e^{-i\,p\cdot x} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\,e^{i\,p\cdot x}\right)}^{\hat{\phi}(x)}\overbrace{\left(\hat{a}_{\vec{p}}\,e^{-i\,p\cdot y} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\,e^{i\,p\cdot y}\right)}^{\hat{\phi}(y)}$$

$$-\overbrace{\left(\hat{a}_{\vec{p}}\,e^{-i\,p\cdot y} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\,e^{i\,p\cdot y}\right)}^{\hat{\phi}(y)}\overbrace{\left(\hat{a}_{\vec{p}}\,e^{-i\,p\cdot x} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\,e^{i\,p\cdot x}\right)}^{\hat{\phi}(x)} =$$

$$= \int d^3\vec{p}\left(\frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\right)^2 \Big(\cancel{\hat{a}^2_{\vec{p}}\,e^{-ip\cdot(x+y)}} + \hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\,e^{-ip\cdot(x-y)} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}\,e^{ip\cdot(x-y)} + \cancel{\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\right)^2 e^{ip\cdot(x+y)}}$$

$$\cancel{-\hat{a}^2_{\vec{p}}\,e^{-ip\cdot(x+y)}} - \hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\,e^{ip\cdot(x-y)} - \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}\,e^{-ip\cdot(x-y)} - \cancel{\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\right)^2 e^{ip\cdot(x+y)}}\Big)$$

$$= \int d^3\vec{p}\left(\frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\right)^2 \left[\underbrace{\left(\hat{a}_{\vec{p}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} - \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\hat{a}_{\vec{p}}\right)}_{(2\pi)^3\,\delta(\vec{p}-\vec{p})\quad(\mathbf{??})}\left(e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{+ip\cdot(x-y)}\right)\right]$$

$$\left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)\right] = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\left(e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{+ip\cdot(x-y)}\right)$$

1.1.1 Amplitudinea de tranziţie, matricea $\hat{S}$, propagatori

- Problema structurii cauzale a teoriei se poate pune şi în alt fel. Să zicem că se prepară o stare iniţială $\big|i\big\rangle$ în punctul spaţiu-timp y şi se cere să aflăm amplitudinea de tranziţie la starea finală $\big|f\big\rangle$ din punctul x.

  Pentru aceasta folosim matricea (operatorul) $\hat{S}$, precum şi relaţia de ortonormare a stărilor $\big\langle\vec{p}\big|$ şi $\big|\vec{p}'\big\rangle$ din spaţiul Fock create din vacuum:

$$\big\langle 0\big|\hat{a}_{\vec{p}}\,\hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}'}\big|0\big\rangle = \big\langle\vec{p}\big|\vec{p}'\big\rangle = (2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{p}') \tag{1.7}$$

atunci,

$$\begin{aligned}\big\langle f\big|\hat{S}\big|i\big\rangle &= \big\langle 0\big|\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y)\big|0\big\rangle \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}\ \overbrace{d^3\vec{p}'}}{(2\pi)^6}\frac{1}{\sqrt{4E_{\vec{p}}\,E_{\vec{p}'}}}\overbrace{\big\langle 0\big|\hat{a}_{\vec{p}}\,\hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}'}\big|0\big\rangle}^{(2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{p}')\ \ (1.7)} e^{-i\,p\cdot x+i\,p'\cdot y} \quad \Bigg|\ \text{integrare } d^3\vec{p}' \\ &= \int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\,e^{-i\,p\cdot(x-y)} \equiv D(x-y)\end{aligned} \tag{1.8}$$

- Funcţia $D(x-y)$ se numeşte propagator.

  Pentru separări spaţiale $(x-y)^2 < 0$ (ex. două evenimente de-a lungul axei $\vec{x}$ - luate la acelaşi timp) avem $(x-y) = (0, \vec{x}-\vec{y})$ iar din (1.8) avem:

$$D(x-y) \sim e^{-m\left|\vec{x}-\vec{y}\right|} \tag{1.9}$$

  deci amplitudinea de probabilitate pentru evenimente separate spaţial scade exponenţial în afara conului luminos, dar este diferită de zero, $\big\langle f\big|\hat{S}\big|i\big\rangle \neq 0$.

  Am văzut însă, că măsurările de evenimente separate spaţial comută, iar teoria este cauzală, deci $\Big[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)\Big] = 0$. Se pare că aceste două concluzii se contrazic reciproc.

  Totuşi, dacă luăm expresia (1.3), cu (1.8), pentru separări spaţiale $(x-y)^2 < 0$

$$\begin{aligned}\Big[\hat{\phi}(x),\,\hat{\phi}(y)\Big] &= \int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\Big(e^{-i\,p\,\cdot\,(x-y)} - e^{i\,p\,\cdot\,(x-y)}\Big) \\ &= D(x-y) - D(y-x) = 0\end{aligned} \tag{1.10}$$

  Interpretarea acestei situaţii, înseamnă că dacă o particulă s-ar mişca între două puncte $x \to y$, separate spaţial, la fel de bine poate să se mişte şi invers, de la $y \to x$. In oricare din măsurări, amplitudinea acestor două evenimente este zero.

In cazul unui câmp scalar complex, este mai interesant.

Dacă privim ecuaţia $\left[\hat{\phi}(x),\, \hat{\phi}^{\dagger}(y)\right] = 0$ în afara conului luminos, putem spune că amplitudinea de probabilitate ca o particulă să se propage de la $x \to y$ anulează amplitudinea ca antiparticula să se propage de la $y \to x$. De fapt aceeaşi interpretare este valabilă şi pentru un câmp scalar, având în vedere că antiparticula este particula însăşi.

1.2 Propagatorul Feynman

- Una din cele mai importante mărimi din teoria câmpurilor în interacţie este propagatorul Feynman:

$$\Delta_F(x-y) = \left\langle 0 \middle| \hat{T}\, \hat{\phi}(x)\, \hat{\phi}(y) \middle| 0 \right\rangle = \begin{cases} D(x-y) & \text{pentru} \quad x^0 > y^0 \\ D(y-x) & \text{pentru} \quad y^0 > x^0 \end{cases} \tag{1.11}$$

unde
$$\hat{T}\, \hat{\phi}(x)\, \hat{\phi}(y) = \begin{cases} \hat{\phi}(x)\, \hat{\phi}(y) & \text{pentru} \quad x^0 > y^0 \\ \hat{\phi}(y)\, \hat{\phi}(x) & \text{pentru} \quad y^0 > x^0 \end{cases} \tag{1.12}$$

Am văzut (1.9) că amplitudinea de probabilitate $\left\langle f \middle| \hat{S} \middle| i \right\rangle$ scade exponenţial în afara conului luminos, dar este diferită de zero.

- Să arătăm că propagatorul Feynman se poate exprima sub forma:

$$\boxed{\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2}\, e^{-i\,p\cdot(x-y)}} \tag{1.13}$$

- Aici avem integrala după 4-impuls. Până acum am folosit doar integrarea după 3-impuls, cu p^0 fixată de condiţia de mass shell $p^0 = E_{\vec{p}}$, unde $\underbrace{p^2}_{m^2} = \underbrace{(p^0)^2}_{E_{\vec{p}}^2} - \vec{p}^{\,2}$).

  In integrala de faţă (1.13), nu se mai impune această condiţie asupra componentei p^0. Totuşi, aici integrala nu este definită pe întregul domeniu de integrare, deoarece pentru fiecare valoare a 3-impulsului $\vec{p}$, numitorul $p^2 - m^2 = (p^0)^2 \underbrace{- \vec{p}^{\,2} - m^2}_{-E_{\vec{p}}^2}$ prezintă câte o singularitate, un pol pentru $p^0 = \pm E_{\vec{p}} = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$.

- Să trecem să efectuăm integrarea după p^0 dar, pentru evitarea singularităţilor trebuie să facem apel la teorema reziduurilor[2]. Integrandul din (1.13) conţine:

$$\frac{1}{p^2 - m^2} = \frac{1}{(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2} = \frac{1}{(p^0 - E_{\vec{p}})\,(p^0 + E_{\vec{p}})} \tag{1.14}$$

---

[2]Reziduul unei funcţii $f(z)$ într-un punct de singularitate z_0:
$Res(z_0)$ este coeficientul a_{-1} din dezvoltarea in Serie Laurent în jurul lui z_0:

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

Pentru un pol z_0 simplu $Res(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$ adică este coeficientul lui $1/(z - z_0)$.

De aceea, pentru integrarea după p^0, alegem conturul de integrare prezentat în Figura 1.2, unde reziduul polului $p^0 = \pm E_{\vec{p}}$ adică, coeficientul termenului $\frac{1}{(p^0 \mp E_{\vec{p}})}$ este $\frac{1}{(p^0 \pm E_{\vec{p}})} = \pm\frac{1}{2E_{\vec{p}}}$.

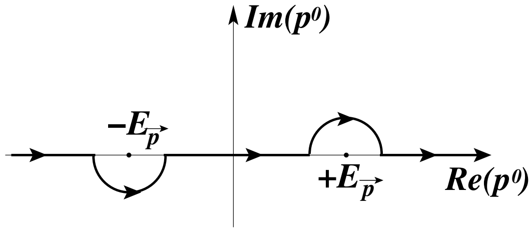


Figura 1.2: Contur integrare

- Să evaluăm propagatorul Feynman pentru $x^0 > y^0$.

  La numărătorul integrandului (1.14), pentru $ip^0 \to \infty$ avem: $e^{-i\,p^0(x^0-y^0)} \to e^{-\infty} \to 0$ Deoarece $ip^0 \equiv Im(p^0) \to +\infty$ şi $x^0 - y^0 > 0$, iar la numitor avem polul $p^0 - E_{\vec{p}} = 0$ adică $p^0 = +E_{\vec{p}}$, integrala după dp^0 a expresiei (1.14) se face cu teorema reziduurilor.

  Integrala după dp^0 va fi dată de contribuţia reziduului, adică $\frac{1}{p^0 + E_{\vec{p}}} = \frac{1}{2E_{\vec{p}}}$, iar integrala este $-2\pi i \frac{1}{2E_{\vec{p}}}$ (minusul s-a luat deoarece conturul se ia în sensul acelor de ceasornic - invers sensului trigonometric). Deci pentru $x^0 > y^0$ integrala completă este:

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^4} \frac{-2\pi i}{2E_{\vec{p}}}\, i\, e^{-i\,E_{\vec{p}}(x^0-y^0)+i\,\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}$$
$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-i\,p\cdot(x-y)} = D(x-y) \qquad (1.15)$$

  care este propagatorul Feynman pentru $x^0 > y^0$ (1.11).

- Să evaluăm propagatorul Feynman pentru $y^0 > x^0$, cu conturul de integrare din stânga, care, de data asta se ia în sens pozitiv trigonometric, unde $p^0 + E_{\vec{p}} = 0$ $\left(p^0 = -E_{\vec{p}}\right)$.

  Integrala după dp^0 va fi dată de reziduul din acest punct, adică $\frac{1}{p^0 - E_{\vec{p}}} = \frac{1}{-2E_{\vec{p}}}$ iar integrala este $2\pi i \frac{1}{-2E_{\vec{p}}}$. Atunci pentru $y^0 > x^0$ integrala completă este:

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^4}\,\frac{2\pi i}{-2E_{\vec{p}}}\, i\, e^{+i\,E_{\vec{p}}(x^0-y^0)+i\,\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}$$

$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-i\,E_{\vec{p}}\,(y^0-x^0)-i\,\vec{p}\,(\vec{y}-\vec{x})}$$

cu $\vec{p} \to -\vec{p}$ ca variabilă de integrare $-\infty \div +\infty$, iar $E_{\vec{p}}$ depinde de $\vec{p}^{\,2}$

$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-i\,p\cdot(y-x)} = D(y-x) \tag{1.16}$$

Am găsit propagatorul Feynman pentru $y^0 > x^0$ (1.11).

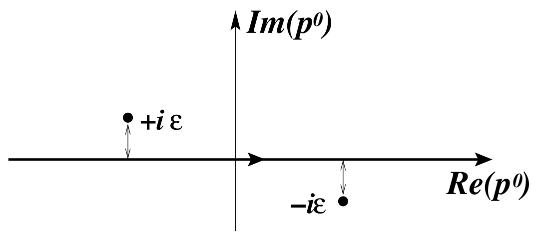
- Deci, propagatorul Feynman (1.11) este (1.13) cu (1.15) şi (1.16):

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{i\,e^{-i\,p\cdot\,(x-y)}}{p^2-m^2+i\epsilon}$$

$$= \begin{cases} \langle f\,|\hat{S}|\,i\rangle = \langle 0\,|\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y)|\,0\rangle & \text{pt.} \quad x^0 > y^0 \\ \langle i\,|\hat{S}|\,f\rangle = \langle 0\,|\hat{\phi}(y)\,\hat{\phi}(x)|\,0\rangle & \text{pt.} \quad y^0 > x^0 \end{cases} \tag{1.17}$$

- In loc de a specifica conturul de integrare, de obicei propagatorul Feynman se scrie sub forma:

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{i\,e^{-i\,p\cdot\,(x-y)}}{p^2-m^2+i\epsilon} \tag{1.18}$$



unde $\epsilon > 0$ este un infinit mic. Efectul este o uşoară deplasare a polilor de la axa reală, astfel că integrarea de-a lungul axei p^0 este echivalentă cu cea pe conturul din Figura 1.2.