Procese QED în câmpuri laser intense
tema 46

M. Penţia

August 10, 2022

”Verbum sapienti sat est”

Cuprins

1.1 Ordonarea temporală şi ordonarea normală a operatorilor

In evaluarea amplitudinilor de tranziţie între o stare iniţială de câmp şi o stare finală, folosim matricea $\hat{S}$ ca limita operatorului de evoluţie $\hat{U}(t_+, t_-)$. Acesta este exprimat prin dezvoltările Dyson.

- Să studiem comportarea unor câmpuri în interacţie. Ca model să luăm un Lagrangian tip Yukawa:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \hat{\psi}^* \partial^\mu \hat{\psi} + \frac{1}{2}\partial_\mu \hat{\phi}\, \partial^\mu \hat{\phi} - M^2 \hat{\psi}^* \hat{\psi} - \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 - g\, \hat{\psi}^* \hat{\psi} \hat{\phi} \tag{1.1}$$

$$\text{cu} \quad g \ll M, m$$

- Acesta cuplează un câmp scalar real $\hat{\phi}$ cu un câmp scalar complex $\hat{\psi}$, care $\hat{\psi}$ este câmp de particule, iar $\hat{\psi}^*$ este câmp de antiparticule.

- In descrierea de interacţie $\quad \hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$.

- Pe de altă parte, evoluţia în timp a câmpului $\big|\psi_I(t)\big\rangle$ este exprimată cu ajutorul operatorului de evoluţie $\hat{U}(t, t_0)$:

$$\big|\hat{\psi}_I(t)\big\rangle = \hat{U}(t, t_0)\big|\hat{\psi}_I(t_0)\big\rangle \tag{1.2}$$

unde $\hat{U}(t, t_0)$ este obţinut ca dezvoltarea Dyson în serie de puteri ale $\hat{H}'$, care în dezvoltarea până la ordin doi este:

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{I} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_{t_0}^{t} dt_1 \hat{H}'(t_1) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, \hat{H}'(t_1)\, \hat{H}'(t_2) + \ldots \tag{1.3}$$

$$t > t_1 > t_2$$

- Hamiltonianul de interacţie tip Yukawa $\qquad \hat{H}' = g \displaystyle\int d^3\vec{x}\; \hat{\psi}^\dagger\, \hat{\psi}\, \hat{\phi} \qquad (1.4)$

- Câmpul scalar real are forma:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} \Big(\hat{a}_{\vec{k}}\; e^{-i\,k\cdot x} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\; e^{i\,k\cdot x}\Big) \tag{1.5}$$

- Câmp scalar complex de forma:

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} \Big(\hat{b}_{\vec{k}}\; e^{-i\,k\cdot x} + \hat{c}^\dagger_{\vec{k}}\; e^{i\,k\cdot x}\Big) \tag{1.6}$$

- In Hamiltonianul de interacţie (1.4) intervin câmpurile ce conţin operatori de creare şi anihilare, de tip:

Câmp scalar real: $\quad \hat{\phi} \sim \hat{a} + \hat{a}^\dagger \quad$ - anihilează cu $\hat{a}$ şi crează cu $\hat{a}^\dagger$ particula ϕ

Câmp scalar complex: $\begin{cases} \hat{\psi} \sim \hat{b} + \hat{c}^\dagger & \text{- anihilează particula } \psi \text{ cu } \hat{b} \text{ şi crează antiparticula } \overline{\psi} \text{ cu } \hat{c}^\dagger \\ \hat{\psi}^\dagger \sim \hat{b}^\dagger + \hat{c} & \text{- crează particula } \psi \text{ cu } \hat{b}^\dagger \text{ şi anihilează antiparticula } \overline{\psi} \text{ cu } \hat{c} \end{cases}$

- In perturbaţiile de ordin I în $\hat{H}'$ avem termeni de tip $(\hat{c}^\dagger\, \hat{b}^\dagger\, \hat{a})$, care anihilează cu $\hat{a}$ un mezon şi crează cu $\hat{b}^\dagger$ un nucleon şi cu $\hat{c}^\dagger$ un antinucleon.

- In perturbaţiile de ordin II în $(\hat{H}')^2$ avem termeni de tip $(\hat{c}^\dagger\,\hat{b}^\dagger\,\hat{a})(\hat{c}\,\hat{b}\,\hat{a}^\dagger)$. Acest termen contribuie la împrăştieri de tip $\psi\overline{\psi} \to \phi \to \psi\,\overline{\psi}$

Exemplu de calcul amplitudine tranziţie

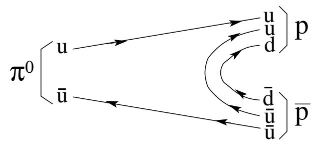
- Considerăm stările iniţiale şi finale ca stări proprii de particule libere. $\big|i\big\rangle \to \big|f\big\rangle$.
- Căutăm amplitudinea de probabilitate a tranziţiei $\big|i\big\rangle \to \big|f\big\rangle$.

$$\lim_{t\pm\to\pm\infty} \big\langle f\big|\hat{U}(t_+,t_-)\big|i\big\rangle \equiv \big\langle f\big|\hat{S}\big|i\big\rangle \tag{1.7}$$

Amplitudinea de probabilitate de tranziţie scrisă în I-a aproximaţie cu $\hat{H}'(t)$ (1.4)

$$\big\langle f\big|\hat{S}\big|i\big\rangle = -\frac{i}{\hbar}g\,\big\langle f\big|\int d^4x\,\overbrace{\hat{\psi}^\dagger(x)\,\hat{\psi}(x)\,\hat{\phi}(x)}^{\int dt\,\hat{H}'(t)}\,\big|i\big\rangle \tag{1.8}$$

- Exemplu fictiv: dezintegrarea unui mezon $\to$ particulă + antiparticulă.



în cazul dezintegrării mezonului stările iniţiale şi finale sunt stări create din vacuum. Mezonul iniţial, de impuls $\vec{p}$ este introdus cu operatorul de creare $\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\big|0\big\rangle$ al câmpului scalar real $\hat{\phi}$ (1.5), iar nucleonul şi antinucleonul finali sunt introduşi cu $\hat{b}^\dagger_{\vec{q}_1}\big|0\big\rangle$, respectiv $\hat{c}^\dagger_{\vec{q}_2}\big|0\big\rangle$ ai câmpului scalar complex $\hat{\psi}$ (1.6) (vezi pag. 4), adică stările $\big|i\big\rangle$ şi $\big|f\big\rangle$ normate sunt:

$$\begin{cases} \big|i\big\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}}\;\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\big|0\big\rangle \\ \big|f\big\rangle = \sqrt{4E_{\vec{q}_1}E_{\vec{q}_2}}\;\hat{b}^\dagger_{\vec{q}_1}\hat{c}^\dagger_{\vec{q}_2}\big|0\big\rangle \end{cases} \tag{1.9}$$

- Starea iniţială este cea de mezon de impuls $\vec{p}$, iar cea finală este a perechilor nucleon-antinucleon de impulsuri $\vec{q}_1$ şi $\vec{q}_2$. Amplitudinea dezintegrării mezonului în perechea nucleon-antinucleon, se poate scrie în aproximaţia de ordin întâi ca:

$$\Big\langle f\Big|\hat{S}\Big|i\Big\rangle = -\frac{i}{\hbar}g\,\Big\langle f\Big|\int d^4x\;\hat{\psi}^\dagger(x)\,\hat{\psi}(x)\underbrace{\hat{\phi}(x)\Big|i\Big\rangle}_{\sim\,\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle} \tag{1.10}$$

Observăm că $\boxed{\hat{\phi} \sim \hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}}$ (1.5), iar acţiunea $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\big|i\big\rangle$ va transforma $\big|i\big\rangle$ într-o stare de doi mezoni. Acestă stare de doi mezoni însă, nu se regăseşte în procesul studiat, deci nici un operator din $\hat{\psi}$ sau $\hat{\psi}^\dagger$ aflat între $\big\langle f\big|$ şi $\big|i\big\rangle$ nu va modifica starea produsă de $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}$.

Pe de altă parte, prin acţiunea $\hat{a}_{\vec{k}}\big|i\big\rangle$ obţinem o stare proporţională cu $\big|0\big\rangle$, care va fi preluată de ceilalţi operatori de câmp.

Atunci, din expresia (1.5) a câmpului scalar real $\hat{\phi}(x)$ folosim doar componenta $\hat{a}_{\vec{k}}$ de anihilare a stării iniţiale $\big|i\big\rangle$ a mezonului de impuls $\vec{p}$ (prima ecuaţie (1.9)), şi avem,

$$
\begin{aligned}
\left\langle f\middle|\hat{S}\middle|i\right\rangle &= -\frac{i}{\hbar}g\left\langle f\,\middle|\int d^4x\,\hat{\psi}^\dagger(x)\,\hat{\psi}(x)\overbrace{\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}}\,\hat{a}_{\vec{k}}\,e^{-i\,k\cdot x}}^{\hat{\phi}(x)}\;\overbrace{\sqrt{2E_{\vec{p}}}\;\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\,\middle|\,0\right\rangle}^{|i\rangle} \\
&= -\frac{i}{\hbar}g\left\langle f\,\middle|\int d^4x\,\hat{\psi}^\dagger(x)\,\hat{\psi}(x)\,e^{-i\,p\cdot x}\middle|\,0\right\rangle
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

unde, pentru $\vec{k}\neq\vec{p}$ am comutat $\hat{a}_{\vec{k}}$ cu $\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}$. Apoi, deoarece $\hat{a}_{\vec{k}}\big|0\big\rangle=0$, din toate valorile $\vec{k}$ din integrală, singura valoare diferită de zero este cea cu $\vec{k}=\vec{p}$, adică $\hat{a}_{\vec{p}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\big|0\big\rangle\neq 0$, practic din integrarea $d^3\vec{k}$ am obţinut $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{k})$, după care am înlocuit $\vec{k}=\vec{p}$.

- Similar, dezvoltăm $\boxed{\hat{\psi}\sim\hat{b}+\hat{c}^\dagger}$ şi $\boxed{\hat{\psi}^\dagger\sim\hat{b}^\dagger+\hat{c}}$.
  Pentru a obţine componente diferite de zero pe starea finală $\big\langle f\,\big|$, trebuie să ţinem cont că doar contribuţiile $\hat{b}^\dagger$ şi $\hat{c}^\dagger$ sunt efective. Acestea crează un nucleon (particulă) şi un antinucleon (antiparticulă) din $\big|0\big\rangle$. Atunci, amplitudinea de tranziţie este:

$$
\begin{aligned}
\left\langle f\middle|\hat{S}\middle|i\right\rangle &= -\frac{i}{\hbar}g\left\langle 0\,\middle|\int\!\!\int\frac{d^4x\,d^3\vec{k}_1d^3\vec{k}_2}{(2\pi)^6}\frac{\sqrt{E_{\vec{q}_1}E_{\vec{q}_2}}}{\sqrt{E_{\vec{k}_1}E_{\vec{k}_2}}}\;\hat{c}_{\vec{q}_2}\,\hat{b}_{\vec{q}_1}\,\hat{c}^\dagger_{\vec{k}_1}\,\hat{b}^\dagger_{\vec{k}_2}\,\middle|\,0\right\rangle\;e^{i\,(k_1+k_2-p)\cdot x} \\
&= -\frac{i}{\hbar}g\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(q_1+q_2-p)
\end{aligned} \tag{1.12}
$$

De notat, funcţia δ pune constrângeri asupra dezintegrărilor posibile. In particular, este posibilă doar dacă $m\geq 2M$.
Să luăm sistemul în care mezonul este în repaus $p=(m,0,0,0)$. Funcţia δ cere conservarea impulsului, adică cere ca $\vec{p}_1=-\vec{p}_2$ şi $m=2\sqrt{M^2+|\vec{p}|^2}$.

1.2 Teorema Wick

- Determinarea amplitudinilor de tranziţie implică dezvoltări Dyson pentru calculul acţiunii unor operatori ordonaţi temporal. Adică evaluări de tip $\langle f \,|T\{\hat H'(x_1)\hat H'(x_2)\ldots \hat H'(x_n)\}|\, i\rangle$ unde $|\, i\rangle$ şi $|\, f\rangle$ sunt stări proprii de câmpuri libere. Ordonarea temporală a operatorilor se face după argumentul temporal $t_1 > t_2 > \ldots t_n$.
  In plus, Hamiltonienii $\hat H'$ conţin operatori de creare şi anihilare, care trebuiesc ordonaţi normal (toţi cei de creare la stânga iar cei de anihilare la dreapta), care vor trebui să înceapă cu anihilarea stărilor $|\, i\rangle$.

- Cu ajutorul teoremei Wick vom putea face ca produse de mai mulţi operatori ordonaţi temporal, din seriile Dyson, să se scrie ca sume de perechi de operatori ordonaţi normal.

- Un produs de operatori de creare şi anihilare ordonaţi temporal, se poate ordona şi normal (cei de creare la stânga, cei de anihilare la dreapta) prin folosirea la fiecare interschimbare, a relaţiile de comutare (sau anticomutare) ale lor, pentru bosoni, sau cele de anticomutare pentru fermioni (vezi mai jos).

- Operaţia de ordonare normală implică adăugarea unor factori (mărimi în general complexe) la şirul de operatori, adică a aşa numitelor contracţii, rezultate din interschimbarea poziţiilor operatorilor de creare şi anihilare din perechile ce necesită ordonarea normală, cu plasarea operatorului de creare la stanga celui de anihilare.

- Definim contracţia a doi operatori $\overset{\sqcap}{\hat a\hat b}$ ca fiind diferenţa dintre produsul temporal ordonat $\hat T\,\hat a\hat b$ şi produsul normal ordonat $:\hat a\hat b:$ (vezi mai departe exemplul (1.16)).

$$\hat T\,\hat a\hat b = :\hat a\hat b: + \underbrace{\left(\overbrace{\hat T\,\hat a\hat b}^{T\,ord.} - \overbrace{:\hat a\hat b:}^{N\,ord.}\right)}_{\overset{\sqcap}{\hat a\hat b}} = :\hat a\hat b: + \overset{\sqcap}{\hat a\hat b} \qquad (1.13)$$

- In primul rând, relaţiile de comutare între operatorii bosonici $\hat a_i$ şi $\hat a_i^\dagger$, ca în cazul oscilatorului armonic, sunt:

$$\begin{aligned} \left[\hat a_i,\, \hat a_j\right] &\equiv \hat a_i\hat a_j - \hat a_j\hat a_i = 0 \\ \left[\hat a_i^\dagger,\, \hat a_j^\dagger\right] &\equiv \hat a_i^\dagger\hat a_j^\dagger - \hat a_j^\dagger\hat a_i^\dagger = 0 \\ \left[\hat a_i,\, \hat a_j^\dagger\right] &\equiv \hat a_i\hat a_j^\dagger - \hat a_j^\dagger\hat a_i = \delta_{ij} \end{aligned} \qquad (1.14)$$

- In al doilea rând, relaţiile de anticomutare între operatorii fermionici $\hat b_i$ şi $\hat b_i^\dagger$, sunt:

$$\begin{aligned} \left\{\hat b_i,\, \hat b_j\right\} &\equiv \hat b_i\hat b_j + \hat b_j\hat b_i = 0 \\ \left\{\hat b_i^\dagger,\, \hat b_j^\dagger\right\} &\equiv \hat b_i^\dagger\hat b_j^\dagger + \hat b_j^\dagger\hat b_i^\dagger = 0 \\ \left\{\hat b_i,\, \hat b_j^\dagger\right\} &\equiv \hat b_i\hat b_j^\dagger + \hat b_j^\dagger\hat b_i = \delta_{ij} \end{aligned} \qquad (1.15)$$

- Să luăm câteva exemple, folosind relaţiile de comutare (1.14) pentru bosoni:

şir 2 operatori

$$\underbrace{\hat{a}_i\,\hat{a}_j^\dagger} = \overbrace{\hat{a}_j^\dagger\,\hat{a}_i + \delta_{ij}} = \hat{a}_j^\dagger\,\hat{a}_i + \hat{a}_i\hat{a}_j^\dagger =: \hat{a}_i\,\hat{a}_j^\dagger : + \hat{a}_i\,\hat{a}_j^\dagger \tag{1.16}$$

şir 3 operatori

$$\begin{aligned}
\underbrace{\hat{a}_i\,\hat{a}_j^\dagger}\,\hat{a}_k &= \overbrace{\left(\hat{a}_j^\dagger\,\hat{a}_i + \delta_{ij}\right)}\hat{a}_k = \hat{a}_j^\dagger\,\hat{a}_i\,\hat{a}_k + \delta_{ij}\,\hat{a}_k \\
&= \hat{a}_j^\dagger\,\hat{a}_i\,\hat{a}_k + \hat{a}_i\hat{a}_j^\dagger\,\hat{a}_k =: \hat{a}_i\,\hat{a}_j^\dagger\,\hat{a}_k : + : \hat{a}_i\,\hat{a}_j^\dagger\,\hat{a}_k :
\end{aligned} \tag{1.17}$$

şir 4 operatori

$$\begin{aligned}
\underbrace{\hat{a}_i\,\hat{a}_j^\dagger}\underbrace{\hat{a}_k\,\hat{a}_l^\dagger} &= \overbrace{\left(\hat{a}_j^\dagger\,\hat{a}_i + \delta_{ij}\right)}\overbrace{\left(\hat{a}_l^\dagger\,\hat{a}_k + \delta_{kl}\right)} \\
&= \hat{a}_j^\dagger\,\underbrace{\hat{a}_i\hat{a}_l^\dagger}\,\hat{a}_k + \delta_{kl}\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_i + \delta_{ij}\hat{a}_l^\dagger\hat{a}_k + \delta_{ij}\delta_{kl} \\
&= \hat{a}_j^\dagger\,\overbrace{\left(\hat{a}_l^\dagger\hat{a}_i + \delta_{il}\right)}\,\hat{a}_k + \delta_{kl}\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_i + \delta_{ij}\hat{a}_l^\dagger\hat{a}_k + \delta_{ij}\delta_{kl} \\
&= \underbrace{\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_l^\dagger\hat{a}_i\hat{a}_k} + \underbrace{\delta_{il}\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_k} + \underbrace{\delta_{kl}\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_i} + \underbrace{\delta_{ij}\hat{a}_l^\dagger\hat{a}_k} + \underbrace{\delta_{ij}\delta_{kl}} \\
&= :\hat{a}_i\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_k\hat{a}_l^\dagger: + :\hat{a}_i\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_k\hat{a}_l^\dagger: + :\hat{a}_i\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_k\hat{a}_l^\dagger: + :\hat{a}_i\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_k\hat{a}_l^\dagger: + :\hat{a}_i\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_k\hat{a}_l^\dagger:
\end{aligned} \tag{1.18}$$

<u>Atenţie:</u> In cazul operatorilor fermionici (anticomutare), în termenii din membrul drept cu contracţii multiple, va trebui să se introducă un semn minus la interschimbarea a doi operatori fermionici, atunci când termenii contractaţi sunt alăturaţi unul de celălalt în şirul iniţial. Atunci, se poate aplica procedura de contracţie.

- <u>Exemplu:</u> Dacă avem doi fermioni cu operatorii de creare $\hat{b}_i^\dagger$ şi anihilare $\hat{b}_i$ ($i=1,2$), atunci:

$$\begin{aligned}
\hat{b}_1\,\hat{b}_2\,\hat{b}_1^\dagger\,\hat{b}_2^\dagger = {} & :\hat{b}_1\,\hat{b}_2\,\hat{b}_1^\dagger\,\hat{b}_2^\dagger: \\
& - \hat{b}_1\,\hat{b}_1^\dagger\ :\hat{b}_2\,\hat{b}_2^\dagger: + \hat{b}_1\,\hat{b}_2^\dagger\ :\hat{b}_2\,\hat{b}_1^\dagger: + \hat{b}_2\,\hat{b}_1^\dagger\ :\hat{b}_1\,\hat{b}_2^\dagger: - \hat{b}_2\,\hat{b}_2^\dagger\ :\hat{b}_1\,\hat{b}_1^\dagger: \\
& - \hat{b}_1\,\hat{b}_1^\dagger\,\hat{b}_2\,\hat{b}_2^\dagger + \hat{b}_1\,\hat{b}_2^\dagger\,\hat{b}_2\,\hat{b}_1^\dagger
\end{aligned} \tag{1.19}$$

<u>Notă:</u> termenul cu contracţii de doi operatori de creare şi doi operatori de anihilare nu mai este inclus deoarece contracţia lor se anulează.

Calculele de mai sus se simplifică substanţial dacă se foloseşte teorema Wick.

1.2.1 Demonstraţie Teorema Wick

- In cazul cel mai simplu se doreşte ordonarea normală a doi operatori iniţial ordonaţi temporal. Aceasta se face identic cu cazul (1.16) analizat înainte. Acum scriem ordonarea normală sub formă generală pentru doi operatori oarecare $\hat{A}$ şi $\hat{B}$:

$$\underbrace{\hat{T}\,\hat{A}\hat{B}}_{\substack{\text{ordonaţi}\\ \text{temporal}}} = \underbrace{:\hat{A}\hat{B}:}_{\substack{\text{ordonaţi}\\ \text{normal}}} + \underbrace{\left(\hat{T}\,\hat{A}\hat{B} - :\hat{A}\hat{B}:\right)}_{\text{contracţie}} = :\hat{A}\hat{B}: + :\hat{A}\,\hat{B}: \tag{1.20}$$

Am definit aici contracţia a doi operatori, notată cu $\overbracket{\hat{A}\,\hat{B}}$, ca diferenţa între ordonarea lor temporală (iniţială) $\hat{T}\,\hat{A}\hat{B}$ şi ordonarea lor normală $:\hat{A}\hat{B}: \equiv \hat{B}\hat{A}$

Relaţia (1.20) exprimă teorema Wick care spune că ordonarea normală a doi operatori ordonaţi temporal se face astfel încât la simpla ordonare normală a lor se adaugă şi contracţia lor. Contracţia a doi operatori de creare, sau a doi operatori de anihilare sau a unui operator de creare urmat de unul de anihilare sunt egale cu zero. Doar contracţia unui operator de anihilare urmat de unul de creare este diferită de zero.

$$\overbracket{\hat{A}\,\hat{B}} = \hat{A}\hat{B} - :\hat{A}\hat{B}: \tag{1.21}$$

Ordonarea normală din (1.20) este exprimată prin contracţia diferită de zero, între operatorul de anihilare $\hat{A}$ aflat iniţial la stânga şi cel de creare $\hat{B}$ aflat iniţial la dreapta. Aceştia sunt interschimbaţi şi adăugată funcţia complexă a contracţiei $\overbracket{\hat{A}\,\hat{B}}$.

- In cazul general facem demonstraţia teoremei Wick prin inducţie. Presupunem că teorema e valabilă pentru $n-1$ operatori $\hat{B}\hat{C}\hat{D}\hat{E}\hat{F}\dots$, la care adăugăm operatorul $\hat{A}$ la stânga. Se formează produsul de n operatori $\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\hat{E}\hat{F}\dots$.

- Exprimăm ordonarea normală cu teorema Wick pentru $n-1$ operatori, la care adăugăm al n-lea operator $\hat{A}$ la stânga,

$$\begin{aligned}
\hat{A}\,\hat{T}\big(\hat{B}\,\hat{C}\,\hat{D}\,\hat{E}\,\hat{F}\dots\big) = \hat{A}\,&:\hat{B}\,\hat{C}\,\hat{D}\,\hat{E}\,\hat{F}: && \text{ordonarea normală}\\
+\hat{A}\sum_{single}&:\overbracket{\hat{B}\,\hat{C}}\,\hat{D}\,\hat{E}\,\hat{F}: && \text{contracţii singulare}\\
+\hat{A}\sum_{duble}&:\overbracket{\hat{B}\,\overbracket{\hat{C}\,\hat{D}}\,\hat{E}\,\hat{F}}: && \text{contracţii duble}\\
+\hat{A}\sum_{triple}&\qquad\dots && \text{contracţii multiple}
\end{aligned} \tag{1.22}$$

  - Dacă $\hat{A}$ este operatr de creare, toate produsele de mai sus sunt normal ordonate deja, adică: $\hat{A}\,:\hat{B}\,\hat{C}\,\hat{D}\,\hat{E}\,\hat{F}\dots: = :\hat{A}\,\hat{B}\,\hat{C}\,\hat{D}\,\hat{E}\,\hat{F}\dots:$, ca urmare nu mai este necesară nici o pernutare, deci nici introducerea unei contracţii.

  - Dacă $\hat{A}$ este operator de anihilare, el va trebui deplasat în mod repetat la dreapta. La fiecare permutare cu un operator de creare, trebuie adăugată o contracţie. Deci dacă $\hat{A}$ ajunge la stânga unui operator de creare $\hat{X}$ va trebui aplicată teorema Wick (1.20) pentru cei doi operatori.

$$\hat{T}\,\hat{A}\hat{X} = :\hat{A}\hat{X}: + :\overbracket{\hat{A}\,\hat{X}}: \tag{1.23}$$

- Deci pentru deplasarea operatorului de anihilare $\hat{A}$ la dreapta, se adaugă o contracţie cu operatorul de creare $\hat{X}$ din dreapta. In acest fel se adaugă toate contracţiile posibile cu operatorii de creare întâlniţi în cale.
- In final se obţine secvenţa normal ordonată a operatorilor iniţiali plus o sumă de termeni de produse normal ordonate de operatori multiplicate cu factori de contracţie pentru restul perechilor de operatori permutaţi.
- In concluzie, un produs de operatori de crearea şi anihilare ordonaţi temporal $\hat{T}\left(\hat{A}\,\hat{B}\,\hat{C}\,\hat{D}\,\hat{E}\,\hat{F}\,\ldots\right)$ poate fi în ordonat normal cu ajutorul teoremei Wick sub forma:

$$
\begin{aligned}
\hat{T}\left(\hat{A}\,\hat{B}\,\hat{C}\,\hat{D}\,\hat{E}\,\hat{F}\ldots\right) = {} & :\hat{A}\,\hat{B}\,\hat{C}\,\hat{D}\,\hat{E}\,\hat{F}: && \text{ordonarea normală} \\
& + \sum_{single} :\overbrace{\hat{A}\,\hat{B}}\,\hat{C}\,\hat{D}\,\hat{E}\,\hat{F}: && \text{contracţii singulare} \\
& + \sum_{double} :\overbrace{\hat{A}\,\overbrace{\hat{B}\,\hat{C}}\,\hat{D}}\,\hat{E}\,\hat{F}: && \text{contracţii duble} \\
& + \sum_{triple} \qquad \ldots && \text{contracţii multiple}
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

Cu alte cuvinte, un şir de operatori de creare şi anihilare poate fi scris ca:
- şirul de operatori din produsul lor normal-ordonat, plus
- o sumă de şiruri de produse normal-ordonate cu o contracţie de perechi de operatori, plus
- o sumă de şiruri de produse normal-ordonate cu două contracţii de perechi de operatori, plus
- o sumă de şiruri de produse normal-ordonate cu trei contracţii de perechi de operatori, plus
- o sumă de şiruri de produse normal-ordonate cu toate contracţiile posibile de perechi de operatori.

1.2.2 Propagatori, comutatori şi operatori de câmp

- Să considerăm un câmp scalar real $\hat{\phi}(x)$ (1.5) care se poate descompune după componentele de anihilare $\hat{\phi}^{-}(x)$ şi de creare $\hat{\phi}^{+}(x)$:

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}^{-}(x) + \hat{\phi}^{+}(x) \tag{1.25}$$

unde

$$\hat{\phi}^{-}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\; \hat{a}_{\vec{p}}\, e^{-i\,p\cdot x} \tag{1.26}$$

$$\hat{\phi}^{+}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\; \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}\, e^{i\,p\cdot x} \tag{1.27}$$

- Ordonarea temporală a operatorilor implică ordonarea lor după argumentul temporal $x^0 > y^0$

$$\hat{T}\,\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y) = \begin{cases} \hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y) & \text{pentru} \quad x^0 > y^0 \\ \hat{\phi}(y)\,\hat{\phi}(x) & \text{pentru} \quad y^0 > x^0 \end{cases} \tag{1.28}$$

- <u>Ordonarea normală</u> a operatorilor implică ordonarea lor cu componentele de creare $\hat{\phi}^+$ la stânga, iar cele de anihilare ψ^- la dreapta, astfel <u>cu ordonarea temporală</u> $x^0 > y^0$, avem,

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y) &= \Big(\hat{\phi}^-(x) + \hat{\phi}^+(x)\Big)\Big(\hat{\phi}^-(y) + \hat{\phi}^+(y)\Big) \\ &= \hat{\phi}^-(x)\,\hat{\phi}^-(y) + \hat{\phi}^+(x)\,\hat{\phi}^-(y) + \hat{\phi}^-(x)\,\hat{\phi}^+(y) + \hat{\phi}^+(x)\,\hat{\phi}^+(y) \qquad (1.29) \\ &= \hat{\phi}^-(x)\hat{\phi}^-(y) + \hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}^-(y) + \overbrace{\hat{\phi}^+(y)\hat{\phi}^-(x) + \underbrace{\big[\hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^+(y)\big]}_{D(x-y)}}^{\hat{\phi}^-(x)\,\hat{\phi}^+(y)} + \hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}^+(y) \end{aligned}$$

ultima linie conţine termenii <u>ordonaţi normal</u>, notaţi în bloc cu $:\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y):$
Unde erau probleme de ordonare am folosit comutatorul, identificat cu termenul $D(x-y) = \big[\hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^+(y)\big]$, unde $D(x-y)$ este propagatorul[1]

Deci, în cazul $x^0 > y^0$, avem,

$$\hat{T}\,\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y) = :\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y): + D(x-y) \qquad (1.30)$$

unde $:\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y):$ desemnează secvenţa <u>normal ordonată</u> de operatori

- In cazul $y^0 > x^0$, putem repeta raţionamentul anterior şi găsim

$$\hat{T}\,\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y) = :\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y): + D(y-x) \qquad (1.31)$$

- Deci,
$$\Delta_F(x-y) = \begin{cases} D(x-y) & \text{pentru} \quad x^0 > y^0 \\ D(y-x) & \text{pentru} \quad y^0 > x^0 \end{cases}$$

putem scrie ordonarea temporală a doi operatori de câmp acţionând în două puncte spaţio-temporale x şi y diferite, folosind ordonarea normală şi propagatorul Feynman:

$$\boxed{\hat{T}\,\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y) = :\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y): + \Delta_F(x-y)} \qquad (1.32)$$

unde $\Delta_F(x-y)$ este propagatorul Feynman, pentru care avem reprezentarea integrală:

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{i\,e^{-i\,k\cdot(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \qquad (1.33)$$

---

[1] $\Big[\hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^+(y)\Big] = \hat{\phi}^-(x)\,\hat{\phi}^+(y) - \hat{\phi}^+(y)\,\hat{\phi}^-(x) =$

$$\begin{aligned} &= \int d^3\vec{p}\left(\frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\right)^2 \Bigg[\overbrace{\Big(\hat{a}_{\vec{p}}\,e^{-i\,p\cdot x}\Big)}^{\hat{\phi}^-(x)}\overbrace{\Big(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\,e^{i\,p\cdot y}\Big)}^{\hat{\phi}^+(y)} - \overbrace{\Big(\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\,e^{i\,p\cdot y}\Big)}^{\hat{\phi}^+(y)}\overbrace{\Big(\hat{a}_{\vec{p}}\,e^{-i\,p\cdot x}\Big)}^{\hat{\phi}(x)}\Bigg] \\ &= \int d^3\vec{p}\left(\frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\right)^2 \Big[\hat{a}_{\vec{p}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\,e^{-ip\cdot(x-y)} - \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\,\hat{a}_{\vec{p}}\,e^{-ip\cdot(x-y)}\Big] \\ &= \int d^3\vec{p}\left(\frac{1}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\right)^2 \Big[\underbrace{\Big(\hat{a}_{\vec{p}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{p}} - \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}\,\hat{a}_{\vec{p}}\Big)}_{(2\pi)^3\,\delta(\vec{p}-\vec{p}) \quad \textbf{(??)}} e^{-ip\cdot(x-y)}\Big] \end{aligned}$$

$$\Big[\hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^+(y)\Big] = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\Big(e^{-ip\cdot(x-y)}\Big) = D(x-y)$$

Notă: $\hat{T}\,\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y)$ şi $:\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y):$ sunt ambii operatori, totuşi diferenţa (contracţia) lor (1.20), este un număr complex: $\Delta_F(x-y)$.

- Contracţia unei perechi de operatori dintr-un şir de operatori $\ldots\hat{\phi}(x_1)\ldots\hat{\phi}(x_2)\ldots$ se introduce pentru a-i putea înlocui cu propagatorul Feynman, fără a schimba ordinea celorlalţi operatori din şir. Adică facem înlocuirea,

$$\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) = \Delta_F(x-y) \tag{1.34}$$

- O discuţie similară se poate face pentru câmpuri scalare complexe, unde,

$$\boxed{\hat{T}\,\hat{\psi}(x)\,\hat{\psi}^\dagger(y) =: \hat{\psi}(x)\,\hat{\psi}^\dagger(y): + \Delta_F(x-y)} \tag{1.35}$$

unde avem contracţiile:

$$\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(y) = \Delta_F(x-y) \quad \text{şi} \quad \hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y) = \hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}^\dagger(y) = 0 \tag{1.36}$$

Contracţia operatorilor

- Pentru orice şir de operatori de câmp $\hat{\phi}_1 = \hat{\phi}(x_1), \hat{\phi}_2 = \hat{\phi}_(x_2), \ldots$, avem

$$\boxed{\hat{T}(\hat{\phi}_1\ldots\hat{\phi}_n) =: \hat{\phi}_1\ldots\hat{\phi}_n: + \;:\text{toate contracţiile posibile}:} \tag{1.37}$$

- Să luăm un exemplu al ecuaţiei (1.37), pentru $n = 4$ operatori, pentru care coordonatele temporale $x_1^0 > x_2^0 > x_3^0 > x_4^0$.

$$\begin{aligned}
\hat{T}(\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3\hat{\phi}_4) = {} & :\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3\hat{\phi}_4: \\
& + \hat{\phi}_1\hat{\phi}_2 :\hat{\phi}_3\hat{\phi}_4: + \hat{\phi}_1\hat{\phi}_3 :\hat{\phi}_2\hat{\phi}_4: + \hat{\phi}_1\hat{\phi}_4 :\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3: \\
& + \hat{\phi}_2\hat{\phi}_3 :\hat{\phi}_1\hat{\phi}_4: + \hat{\phi}_2\hat{\phi}_4 :\hat{\phi}_1\hat{\phi}_3: + \hat{\phi}_3\hat{\phi}_4 :\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2: \\
& + \hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3\hat{\phi}_4 + \hat{\phi}_1\hat{\phi}_3\hat{\phi}_2\hat{\phi}_4 + \hat{\phi}_1\hat{\phi}_4\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Contracţiile sunt coeficienţi complecşi, iar operatorii $\hat{\phi}_i$ sunt ordonaţi normal.
In ordonarea temporală de mai sus avem I-ul termen cu 4 operatori ordonaţi normal, 6 termeni cu câte doi operatori ordonaţi normal şi 3 termeni numere complexe, fără nici un operator.

- Acum, pentru a determina amplitudinea de împrăştiere $\langle f\,|\hat{S}|\,i\rangle$ va trebui să determinăm propagatorul Feynman (**??**) $\Delta_F(x_1-x_4) = \langle 0\,|\hat{T}\hat{\phi}_1\,\hat{\phi}_2\,\hat{\phi}_3\,\hat{\phi}_4|\,0\rangle$ luăm ordonarea temporală (1.38) între stările de vacuum. Tinem cont că termenii cu operatori (primii 7) sunt normal ordonaţi, astfel că acţionând cu operatorul de anihilare asupra stării de vacuum obţinem o contribuţie nulă. Singurele contribuţii diferite de zero sunt ale ultimilor 3 termeni, numere complexe. Folosind şi exprimarea (1.34) a contracţiilor prin propagatorii Feynman, avem:

$$\begin{aligned}
\left\langle 0 \left| \hat{T}(\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3\hat{\phi}_4) \right| 0 \right\rangle &= \overbracket{\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2}\overbracket{\hat{\phi}_3\hat{\phi}_4} + \overbracket{\hat{\phi}_1\hat{\phi}_3}\overbracket{\hat{\phi}_2\hat{\phi}_4} + \overbracket{\hat{\phi}_1\hat{\phi}_4}\overbracket{\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3} \\
&= \quad \Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4) \\
&\quad + \Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_4) \\
&\quad + \Delta_F(x_1 - x_4)\Delta_F(x_2 - x_3)
\end{aligned} \tag{1.39}$$

unde am folosit condiţia de normare $\left\langle 0 \,\middle|\, 0 \right\rangle = 1$