

Procese QED în câmpuri laser intense
tema 47

M. Penția

October 20, 2022

”Verbum sapienti sat est”

Cuprins

1.1	Propagatorul Feynman	4
1.2	Propagatorul pentru un câmp scalar complex	6
1.2.1	Propagatorul de particulă $D(x-y)$ pentru câmp scalar complex	7
1.2.2	Propagatorul de antiparticulă $D(y-x)$ pentru câmp scalar complex	8

1.1 Propagatorul Feynman

- Una din cele mai importante mărimi din teoria câmpurilor în interacție este propagatorul Feynman, definit cu ajutorul ordonării temporale T a operatorilor:

$$\Delta_F(x, y) = \langle 0 | T(\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)) | 0 \rangle = \begin{cases} D(x-y) & \text{pentru } x^0 > y^0 \\ D(y-x) & \text{pentru } y^0 > x^0 \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\text{unde} \quad T(\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)) = \begin{cases} \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) & \text{pentru } x^0 > y^0 \\ \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(x) & \text{pentru } y^0 > x^0 \end{cases} \quad (1.2)$$

- Propagatorul Feynman se exprimă analitic sub forma:

$$\Delta_F(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-i p \cdot (x-y)} = \text{prin integrarea } dp^0, \text{ avem}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{p^0 = E_{\vec{p}}}_{=} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \boxed{\frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-i E_{\vec{p}}(x^0 - y^0) + i \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}} = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-i p \cdot (x-y)} = \\ = \langle f | \hat{S} | i \rangle = \langle 0 | T(\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)) | 0 \rangle = D(x-y) \quad \text{pentru } x^0 > y^0 \end{array} \right. \quad (1.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{p^0 = -E_{\vec{p}}}_{=} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \boxed{\frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-i E_{\vec{p}}(y^0 - x^0) + i \vec{p} \cdot (\vec{y} - \vec{x})}} = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-i p \cdot (y-x)} = \\ = \langle i | \hat{S} | f \rangle = \langle 0 | T(\hat{\phi}(y) \hat{\phi}(x)) | 0 \rangle = D(y-x) \quad \text{pentru } y^0 > x^0 \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Deci, propagatorul Feynman $\Delta_F(x, y)$ este alcătuit din două componente:

- I-a componentă, (1.3), descrie secvența temporală $y^0 < x^0$. Exprimă propagarea $y \rightarrow x$ a unei particule ($E > 0$) produsă în $y \equiv (y^0, \vec{y})$, în timpul $\Delta t = x^0 - y^0 > 0$, pe spațiul $\Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{y} > 0$, și anihilată în $x \equiv (x^0, \vec{x})$ (vezi Figura 1.1).

(1.3) propagare $y \rightarrow x$	$E > 0$	$\vec{p} > 0$	
$D(x-y) \sim e^{-i p \cdot (x-y)} =$	$\underbrace{\Delta t > 0}_{x^0 - y^0}$	$\underbrace{\Delta \vec{x} > 0}_{\vec{x} - \vec{y}}$	
$= e^{-i E(x^0 - y^0) + i \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}$	particulă	mișcare directă în sp-timp	

Figura 1.1: Propagator Feynman de particulă $y \rightarrow x$

- A II-a componentă (1.4) descrie secvența temporală $x^0 < y^0$. Exprimă propagarea $x \rightarrow y$ a unei particule ($E > 0$), vezi reprezentarea din partea dreaptă a Figurii 1.2.

Dacă facem inversia, atât cea temporală cât și cea spațială, obținem propagarea inversă $y \rightarrow x$, vezi reprezentarea din partea stângă a diagramei din Figura 1.2. Adică am regăsit propagarea de particulă (1.3) dinainte (Figura 1.1).

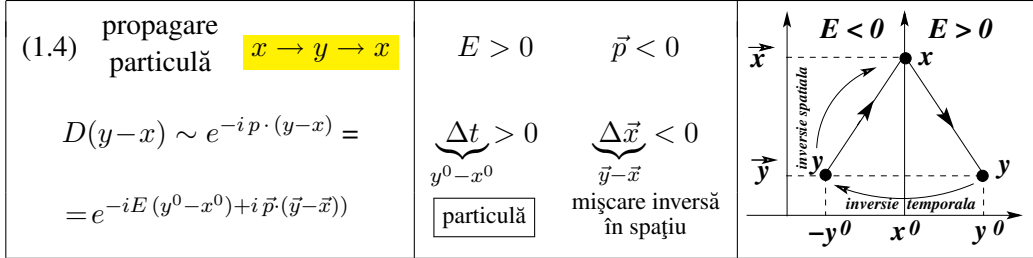


Figura 1.2: Propagator de particulă $x \rightarrow y \rightarrow x$

Folosind desemnarea Dirac de antiparticulă, ca particulă de $E < 0$, alături de interpretarea de propagare inversă în spațiu și timp, obținem descrierea componentei a II-a a propagatorului Feynman (1.4) pentru antiparticule. Intr-adevăr,

inversia temporală a ecuației înseamnă: $E(y^0 - x^0) = (-E)(x^0 - y^0)$

iar inversia spațială înseamnă: $\vec{p} \cdot (\vec{y} - \vec{x}) = (-\vec{p}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})$.

deci componenta de propagare este $\sim e^{-iE(y^0-x^0)+i\vec{p} \cdot (\vec{y}-\vec{x})} =$ (partea dr.Fig.1.2)
 $= e^{-i(-E)(x^0-y^0)+i(-\vec{p}) \cdot (\vec{x}-\vec{y})}$ (partea stg.Fig.1.2)

Am regăsit ecuația de propagare $y \rightarrow x$, dar de data asta pentru particule cu $-E$ și $-\vec{p}$, cu aceeași reprezentare grafică din Fig.1.1 (partea din stânga Figurii 1.2).

Astfel ecuația (1.4) descrie atât propagarea $x \rightarrow y$ a unei particule ($E > 0$) produsă în $x \equiv (x^0, \vec{x})$, pe timpul $y^0 - x^0 > 0$ și pe spațiul $\vec{y} - \vec{x} < 0$ și anihilată în $y \equiv (y^0, \vec{y})$

cât și propagarea $y \rightarrow x$ a unei antiparticule ($E < 0$) produsă în $y \equiv (y^0, \vec{y})$, pe timpul inversat $x^0 - y^0 > 0$ și pe spațiul inversat $\vec{x} - \vec{y} > 0$ și anihilată în $x \equiv (x^0, \vec{x})$. Obținând, prin $-\vec{p}$ (schimbarea orientării săgeții) reprezentarea grafică din Figura 1.3.

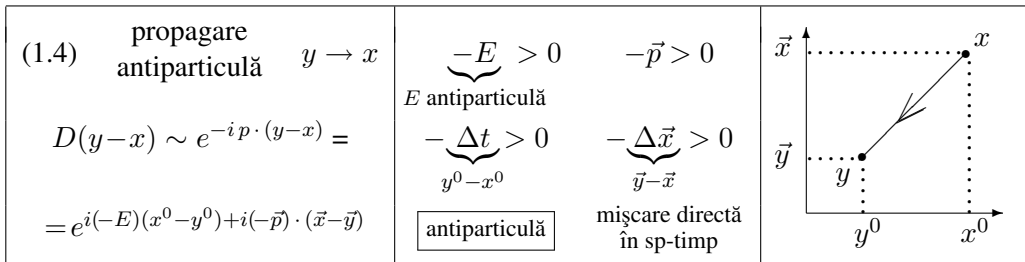


Figura 1.3: Propagator Feynman de antiparticulă $y \rightarrow x$

In acest fel am obținut reprezentarea grafică a propagatorului Feynman (1.4) de antiparticulă $y \rightarrow x$, $D(y-x) \sim e^{i(-E)(x^0-y^0)+i(-\vec{p}) \cdot (\vec{x}-\vec{y})}$ cu $E < 0$, $\vec{p} < 0$, $x^0 - y^0 > 0$ și $\vec{x} - \vec{y} > 0$ cu ajutorul săgeții de sens invers celei a propagatorului de particule ales ca sens de referință în diagramele Feynman.

- Propagatorul Feynman liber $\Delta_F(x, y)$ cu cele două componente $D(x-y)$ (1.3) și $D(y-x)$ (1.4)

Elementul de diagramă Feynman $\Delta_F(x, y)$ ce desemnează amplitudinea de tranziție între punctele spațio-temporale y și x fără interacție pe traseu.

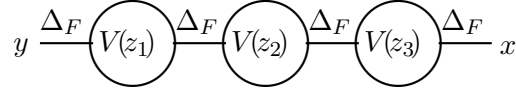
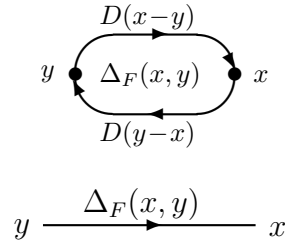


Figura 1.4: Secvență diagramă Feynman cu interacții perturbative de ordin trei în dezvoltarea $\Delta_F(x, y)$. Amplitudinea procesului este proporțională cu $\Delta_F(x, z_3)V(z_3)\Delta_F(z_3, z_2)V(z_2)\Delta_F(z_2, z_1)V(z_1)\Delta_F(z_1, y)$

- Propagatorul Feynman $\Delta_F(x, y)$ (1.1) face legătura între evenimentele de interacție, care au loc în puncte spațio-temporale diferite (vezi Figura 1.4), puncte între care particulele se propagă liber.

1.2 Propagatorul pentru un câmp scalar complex

Soluțiile de câmp scalar liber real și complex, sunt de forma

anihilare particule incoming $E > 0$ ↓	creare antiparticule outgoing $E > 0$ ↓
--	---

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \quad (1.5)$$

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{b}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \quad (1.6)$$

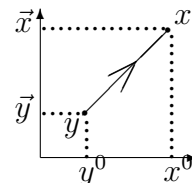
$$\hat{\psi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\hat{c}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \quad (1.7)$$

1.2.1 Propagatorul de particulă $D(x-y)$ pentru câmp scalar complex

- Propagatorul Feynman (1.1) $y \rightarrow x$ respectiv $D(x-y)$, pentru un câmp scalar complex, ținând cont de ordonarea temporală a componentelor, este

$$\Delta_F(x, y) = \langle 0 | \hat{\psi}(x) \hat{\psi}^\dagger(y) | 0 \rangle = D(x-y) \quad \text{pentru } x^0 > y^0 \quad (1.8)$$

- Evaluăm propagatorul (1.3) cu $y \rightarrow x$, adică $D(x-y)$ pentru $y^0 < x^0$ ce descrie crearea unei particule în y și anihilarea ei în x , pentru un câmp scalar complex (vezi Figura 1.1).



- Determinăm întâi partea $\hat{\psi}^\dagger(y)|0\rangle$ din propagatorul (1.8), cu $\hat{\psi}^\dagger(y)$ de forma (1.7),

$$\hat{\psi}^\dagger(y)|0\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\underbrace{\hat{c}_{\vec{p}}|0\rangle}_{=0} e^{-ip \cdot y} + \underbrace{\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle}_{|\vec{p}\rangle} e^{ip \cdot y} \right) \quad (1.9)$$

Doar componenta de creare a particulei b are contribuție diferită de zero (deoarece pentru anihilare stare de vacuum $\hat{c}_{\vec{p}}|0\rangle = 0$), adică,

$$\hat{\psi}^\dagger(y)|0\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} |\vec{p}\rangle e^{ip \cdot y} \quad \boxed{\text{crează particula } b \text{ în poziția } y} \quad (1.10)$$

- Să determinăm acum și cealaltă parte a propagatorului Feynman (1.8), adică $\langle 0 | \hat{\psi}(x)$, cu câmpul $\hat{\psi}(x)$ (1.6). Practic luăm complex conjugata ecuației (1.9) și facem permutarea $x \leftrightarrow y$ și $\hat{p} \leftrightarrow \hat{q}$, având câmpul $\hat{\psi}(x)$ de forma (1.6),

$$\langle 0 | \hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} \left(\underbrace{\langle 0 | \hat{b}_{\vec{q}}}_{\langle \vec{q} |} e^{-iq \cdot x} + \underbrace{\langle 0 | \hat{c}_{\vec{q}}^\dagger}_{=0} e^{iq \cdot x} \right) \quad (1.11)$$

Acum doar componenta de anihilare particula b are contribuție diferită de zero (deoarece $\langle 0 | \hat{c}_{\vec{q}}^\dagger = 0$),

$$\langle 0 | \hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} \langle \vec{q} | e^{-iq \cdot x} \quad \boxed{\text{anihilează particula } b \text{ în poziția } x} \quad (1.12)$$

- Cu (1.10) și (1.12), expresia propagatorului Feynman (1.3) pentru $y \rightarrow x$ este:

$$\begin{aligned} D(x-y) &= \langle 0 | \hat{\psi}(x) \hat{\psi}^\dagger(y) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}2E_{\vec{q}}}} e^{-iq \cdot x + ip \cdot y} \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p}) \\ &\quad \text{integrăm după } d^3\vec{q} \text{ cu } \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{p}) \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad \boxed{\text{propagator particulă } b \text{ } y \rightarrow x} \quad (1.13) \end{aligned}$$

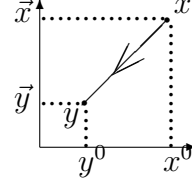
care exprimă producerea particulei b în $y \equiv (y^0, \vec{y})$ și propagarea ei până în $x \equiv (x^0, \vec{x})$, unde este anihilată la momentul x^0 ($x^0 > y^0$).

1.2.2 Propagatorul de antiparticulă $D(y-x)$ pentru câmp scalar complex

- Propagatorul Feynman (1.1) $x \rightarrow y$ respectiv $D(y-x)$, pentru un câmp scalar complex, ținând cont de ordonarea temporală a componentelor, este

$$\Delta_F(x, y) = \langle 0 | \hat{\psi}^\dagger(y) \hat{\psi}(x) | 0 \rangle = D(y-x) \quad \text{pentru } y^0 > x^0 \quad (1.14)$$

- Evaluăm acum și propagatorul (1.14) cu $x \rightarrow y$, adică $D(y-x)$ pentru $x^0 < y^0$ ce descrie crearea unei antiparticule c în y și anihilarea ei în x , pentru un câmp scalar complex (vezi Figura 1.3).



- Pentru aceasta întâi evaluăm $\hat{\psi}(x)|0\rangle$,

$$\hat{\psi}(x)|0\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(\underbrace{\hat{b}_{\vec{p}}|0\rangle}_{=0} e^{-ip \cdot x} + \underbrace{\hat{c}_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle}_{|\vec{p}\rangle} e^{ip \cdot x} \right) \quad (1.15)$$

Doar componenta de creare particula c este diferită de zero (deoarece $\hat{b}_{\vec{p}}|0\rangle = 0$),

$$\hat{\psi}(x)|0\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} |\vec{p}\rangle e^{ip \cdot x} \quad \boxed{\text{crează particula } c \text{ în } x} \quad (1.16)$$

- Pentru evaluarea componentei $\langle 0 | \hat{\psi}^\dagger(y)$, luăm ecuația complex conjugată celei (1.16) și schimbăm $x \rightarrow y$ și $p \rightarrow q$

$$\langle 0 | \hat{\psi}^\dagger(y) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} \langle \vec{q} | e^{-iq \cdot y} \quad \boxed{\text{anihilează particula } c \text{ în } y} \quad (1.17)$$

- Cu (1.16) și (1.17) expresia propagatorului Feynman invers $D(y-x)$, pentru $x^0 < y^0$, adică evoluția $x \rightarrow y$, asemănător (1.13), este:

$$\begin{aligned} D(y-x) &= \langle 0 | \hat{\psi}^\dagger(y) \hat{\psi}(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip \cdot (y-x)} \quad \boxed{\text{propagator particula } c \text{ } x \rightarrow y} \end{aligned} \quad (1.18)$$

care efectiv exprimă (deoarece avem secvența temporală $y^0 < x^0$) producerea unei antiparticule \bar{c} în $y \equiv (y^0, \vec{y})$ și care se propagă în spațiu și timp până în $x \equiv (x^0, \vec{x})$, unde este anihilată la momentul ulterior $x^0 > y^0$.

- Cu expresiile (1.13) și (1.18) luate împreună, am obținut propagatorul Feynman $\Delta_F(x, y)$ final, scris cu ajutorul funcției $\theta(x < 0) = 0$ și $\theta(x \geq 0) = 1$, sub forma:

$$\begin{aligned} \Delta_F(x, y) &= \langle 0 | T \left(\hat{\psi}(x) \hat{\psi}^\dagger(y) \right) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left[\underbrace{\theta(x^0 - y^0) e^{-ip \cdot (x-y)}}_{\text{particulă}} + \underbrace{\theta(y^0 - x^0) e^{ip \cdot (x-y)}}_{\text{antiparticulă}} \right] \end{aligned} \quad (1.19)$$