Procese QED în câmpuri laser intense
tema 48

M. Penţia

January 9, 2023

.

”Verbum sapienti sat est”

Cuprins

1.1 Soluţia Ecuaţiei Dirac pentru o particulă încărcată în câmp de unde EM *(după Greiner QED pag.234-239)* 4

1.1 Soluţia Ecuaţiei Dirac pentru o particulă încărcată în câmp de unde EM
(după Greiner QED pag.234-239)

Problema: Considerăm un câmp electromagnetic $A^\mu(x)$ ca o undă plană ce se deplasează cu viteza luminii pe direcţia dată de vectorul de undă $\vec{k}$. Dependenţa spaţio-temporală a potenţialului $A^\mu(x)$ se presupune de forma produsului scalar $\varphi = k \cdot x$, adică $A^\mu = A^\mu(k \cdot x)$ unde $k^2 = 0$ (masa foton).

Se cere:

1. Să se arate că soluţia exactă a ecuaţiei Dirac (cu unităţi $\hbar = c = 1$) pentru un electron într-un câmp de unde EM este dată de expresia underlinestărilor Volkov (D.M.Volkov, Z. Physik 94, 250 (1935)):

$$\psi_p = N_p \left(1 + \frac{e}{2k \cdot p} \not{k} \not{A} \right) u(p) e^{-i\Phi - ip\cdot x} \tag{1.1}$$

unde faza ϕ este
$$\Phi(k \cdot x) = \int_0^{k\cdot x} d\varphi \left(\frac{eA \cdot p}{k \cdot p} - \frac{e^2 A^2}{2k \cdot p} \right) \tag{1.2}$$

iar $u(p)$ este spinorul de electron liber şi N_p este constanta de normare.
Folosim condiţia de calibrare Lorenz: $\partial_\mu A^\mu = 0$

$$\text{pentru} \quad A(x) = A_0 e^{-ik\cdot x} \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu A^\mu = -ikA \quad \text{adică} \quad k \cdot A = 0 \tag{1.3}$$

2. Să se calculeze densitatea de curent $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ pentru funcţia de undă (1.1).
Să se determine constanta de normare N_p.

3. Să se scrie soluţia (1.1) pentru cazul special al undei plane cu polarizare circulară, adică:

$$A^\mu(k \cdot x) = a\Big(\epsilon_1^\mu \cos(k \cdot x) + \epsilon_2^\mu \sin(k \cdot x) \Big) \tag{1.4}$$

unde
$$\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = -1 \quad , \quad \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = 0 \quad , \quad \epsilon_1 \cdot k = \epsilon_2 \cdot k = 0 \tag{1.5}$$

Funcţia de undă Dirac pentru sarcină in câmp EM (stări Volkov)

Trebuie să rezolvăm ecuaţia Dirac în câmp EM:

$$\Big(i\,\gamma_\mu \partial^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - m\Big)\psi_p(x) = 0 \qquad (1.6)$$

unde $A^\mu = A^\mu(k \cdot x)$

Se poate verifica uşor că (1.1) este soluţie a ecuaţiei (1.6). Totuşi, în continuare vom face deducerea soluţiei în mod concret. In acest scop folosim tehnica de *variabile de con-luminos* folosite în probleme de mişcare cu viteza luminii (vezi Figura 1.1).

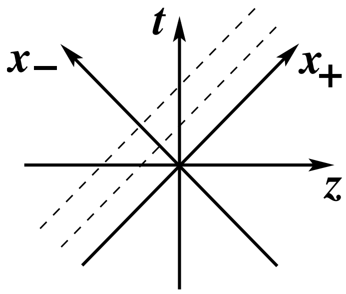

Figura 1.1: Definiţia variabilelor de con-luminos. Liniile punctate (în $x_- = const.$ avem potenţialul $A^\mu = const.$

Pentru mişcare pe direcţia $z = x^3$, coordonatele de con-luminos se definesc prin relaţiile (vezi Fig. 1.1):

$$x_\pm = \frac{t \pm z}{2} \quad , \quad \vec{x}_\perp = (x, y) \qquad (1.7)$$

In mod similar, orice 4-vector a^μ se poate exprima în termeni de componente de con-luminos:

$$a_\pm = \frac{a^0 \pm a^3}{2} \quad , \quad \vec{a}_\perp = (a^1, a^2) \qquad (1.8)$$

iar produsul scalar devine

$$a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu = 2a_+ b_- + 2a_- b_+ - \vec{a}_\perp \cdot \vec{b}_\perp \qquad (1.9)$$

Exemplu de calcul:

$$\begin{aligned} a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu &= \Big(a_0 \;\, -a_1 \;\, -a_2 \;\, -a_3\Big) \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} \\ &= a_0 b^0 - a_1 b^1 - a_2 b^2 - a_3 b^3 = a_0\Big(b_+ + b_-\Big) - a_1 b^1 - a_2 b^2 - a_3\Big(b_+ - b_-\Big) \\ &= \Big(a_0 - a_3\Big) b_+ + \Big(a_0 + a_3\Big) b_- - a_1 b^1 - a_2 b^2 = 2a_- b_+ + 2a_+ b_- - \vec{a}_\perp \cdot \vec{b}_\perp \end{aligned}$$

La fel introducem matricile Dirac pe componente de con-luminos:

$$\gamma_\pm = \gamma^0 \pm \gamma^3 \quad , \quad \vec{\gamma}_\perp = (\gamma^1, \gamma^2) \qquad (1.10)$$

De asemenea, cu notaţiile prescurtate $\not{a}$ cu matricile γ, 4-vectorul a se poate scrie:

$$\not{a} = \gamma \cdot a = \gamma_+ a_- + \gamma_- a_+ - \vec{\gamma}_\perp \cdot \vec{a}_\perp \qquad (1.11)$$

Componentele $\gamma_\pm$ ce vor fi folosite în calculele ulterioare, satisfac următoarele identităţi:

$$\begin{cases} \gamma_\pm \gamma_\pm &= 0 \\ \gamma_\pm \gamma_\mp &= 2\gamma_0\gamma_\mp \\ \gamma_0 \gamma_\pm &= \gamma_\mp \gamma_0 \\ \gamma_\pm \vec{\gamma}_\perp &= -\vec{\gamma}_\perp \gamma_\pm \end{cases} \qquad (1.12)$$

Aceste relaţii rezută imediat din (1.10) şi proprietăţile de anticomutare ale matricilor Dirac γ^μ. De notat că prima relaţie (1.12) implică un determinant nul pentru $\gamma_\pm$, astfel că aceasta nu se poate inversa.

Putem presupune, fără a pierde generalitatea, că unda EM se propagă pe direcţia x^3, adică $k^\mu = \omega(1,0,0,1)$, ceea ce înseamnă:

$$k_+ = \omega \quad , \quad k_- = 0 \quad , \quad \vec{k}_\perp = 0 \qquad (1.13)$$

Condiţia de calibrare Lorenz (1.3) $k \cdot A = 2k_+A_- + 2k_-A_+ - \vec{k}_\perp \cdot \vec{A}_\perp = 0$ implică

$$A_- = 0 \qquad (1.14)$$

Dacă exprimăm derivata prin coordonatele de con-luminos,

$$\partial_0 = \frac{\partial_+ + \partial_-}{2} \quad , \quad \partial_3 = \frac{\partial_+ - \partial_-}{2} \qquad (1.15)$$

Ecuaţia Dirac (1.6) devine

$$\left(i\,\frac{\gamma_+\partial_+}{2} + i\,\frac{\gamma_-\partial_-}{2} + i\,\vec{\gamma}_\perp \cdot \vec{\nabla}_\perp - e\,\gamma_- A_+ + e\,\vec{\gamma}_\perp \cdot \vec{A}_\perp - m \right) \psi(x) = 0 \qquad (1.16)$$

Am ales ca potenţialul A să se mişte pe direcţia x^3 cu viteza luminii şi depinde doar de variabila x_-,
adică $A_+ = A_+(x_-)$ şi $\vec{A}_\perp = \vec{A}_\perp(x_-)$. Ca urmare, mişcarea electronului după coordonatele x_+ şi $\vec{x}_\perp$ poate fi descrisă printr-o undă plană ordinară.

Deci, soluţia completă a ecuaţiei Dirac pentru un electron în câmp EM oscilant, este:

$$\boxed{\psi(x) \equiv \psi(x_+, x_-, \vec{x}_\perp) = N_p\, e^{-ip\cdot x}\, \phi(x_-)} \qquad (1.17)$$

4-impulsul p satisface relaţia $p^2 = m^2$. Inlocuind expresia $\psi(x)$ (1.17) în ecuaţia Dirac de con-luminos pentru un electron în câmp EM (1.16), conduce la o ecuaţie diferenţială ordinară pentru faza $\phi(x_-)$:

$$\left(i\,\frac{\gamma_-\partial_-}{2} + \gamma_+ p_- + \gamma_- p_+ - \vec{\gamma}_\perp \cdot \vec{p}_\perp - e\,\gamma_- A_+ + e\,\vec{\gamma}_\perp \cdot \vec{A}_\perp - m \right) \phi(x_-) = 0 \qquad (1.18)$$

Structura matricială a ecuaţiei de mai sus poate fi simplificată prin descompunerea funcţiei ϕ după componentele de con-luminos:

$$\phi = \frac{\phi_+ + \phi_-}{2} \quad \text{unde} \quad \phi_\pm = \gamma_0\gamma_\pm\phi \qquad (1.19)$$

Conform (1.12) aceste componente satisfac: $\gamma_\pm\phi_\pm = 0 \quad , \quad \gamma_\pm\phi_\pm = 2\gamma_0\gamma_\pm\phi$ (1.20)

Atunci, ecuaţia pentru faza ϕ (1.18) conţine separat cele două contribuţii:

$$\left[\gamma_+ p_- - \vec{\gamma}_\perp \cdot \left(\vec{p}_\perp - e\vec{A}_\perp\right) - m\right]\phi_+ +$$

$$+\left[i\,\frac{\gamma_-\partial_-}{2} + \gamma_-\left(p_+ - eA_+\right) - \vec{\gamma}_\perp \cdot \left(\vec{p}_\perp - e\vec{A}_\perp\right) - m\right]\phi_- = 0 \qquad (1.21)$$

Această ecuaţie se poate simplifica prin proiectarea ei după matricile γ_+ şi γ_-.

$\longrightarrow$ Prin înmultirea ecuaţiei (1.21) cu γ_- termenul cu derivată dispare şi rămâne o ecuaţie algebrică ce exprimă legătura între componentele ϕ_+ şi ϕ_-:

$$\phi_+ = \frac{1}{2p_-}\gamma_0\left[\vec{\gamma}_\perp \cdot \left(\vec{p}_\perp - e\vec{A}_\perp\right) + m\right]\phi_- \qquad (1.22)$$

$\longrightarrow$ Prin înmulţirea (1.21) cu γ_+ obţinem:

$$\left[i\,\partial_- + 2\left(p_+ - eA_+\right)\right]\phi_- + \left[\vec{\gamma}_\perp \cdot \left(\vec{p}_\perp - e\vec{A}_\perp\right)\gamma_0 - m\gamma_0\right]\phi_+ = 0 \qquad (1.23)$$

Cu ajutorul relaţiei (1.22) înlocuim componenta ϕ_+. In plus, folosind $\vec{\gamma}_\perp\gamma_0 = -\gamma_0\,\vec{\gamma}_\perp$ precum şi identitatea $\left(\vec{\gamma}_\perp \cdot \vec{v}_\perp\right)^2 = -\vec{v}_\perp^2$ valabilă pentru orice vector $\vec{v}_\perp$, obţinem:

$$\left[\vec{\gamma}_\perp \cdot \left(\vec{p}_\perp - e\vec{A}_\perp\right) - m\right]\left[\vec{\gamma}_\perp \cdot \left(\vec{p}_\perp - e\vec{A}_\perp\right) + m\right]$$

$$= \left(\vec{\gamma}_\perp \cdot \left(\vec{p}_\perp - e\vec{A}_\perp\right)\right)^2 - m^2 = -\left(\vec{p}_\perp - e\vec{A}_\perp\right)^2 - m^2 \qquad (1.24)$$

Astfel (1.23) devine:

$$\left[i\,\partial_- - \frac{1}{2p_-}\Big(-4p_+p_- + 4eA_+p_- + \left(\vec{p}_\perp - e\vec{A}_\perp\right)^2 + m^2\Big)\right]\phi_- = 0 \qquad (1.25)$$

Folosind (1.9) pentru pătratul vectorului impuls, precum şi $p^2 = m^2$ şi relaţia

$$A^2 = 4A_+A_- - \vec{A}_\perp^2 = -\vec{A}_\perp^2 \qquad (1.26)$$

Obţinem în final ecuaţia Dirac pentru componenta ϕ_-, deosebit de simplificată:

$$\boxed{i\partial_-\,\phi_- = \frac{1}{2p_-}\left(2eA\cdot p - e^2A^2\right)\phi_-} \qquad (1.27)$$

De remarcat că matricile Dirac au dispărut, iar ecuaţia (1.27) poate fi rezolvată imediat prin integrare

$$\phi_-(x_-) = \phi_0\,e^{-i\,\Phi(x_-)} \qquad (1.28)$$

cu faza

$$\Phi(x_-) = \int_0^{x_-} dx'_-\left(\frac{eA\cdot p}{p_-} - \frac{e^2A^2}{2p_-}\right) \qquad (1.29)$$

ϕ_0 este un spinor constant ce satisface ecuaţia $\gamma_+\phi_0 = 0$. Alegem acest spinor ca:

$$\phi_0 = \gamma_0\,\gamma_-\,u(p) \tag{1.30}$$

unde $u(p)$ este spinor unitar, soluţie a ecuaţiei Dirac libere:

$$(\gamma\cdot p - m)\,u(p) = 0 \tag{1.31}$$

In final, funcţia de undă ϕ se va exprima cu ajutorul componentelor ϕ_+ şi ϕ_- de con-luminos, conform (1.19). Folosind expresia ϕ_+ (1.22) cu ϕ_- (1.28) şi ϕ_0 (1.30) obţinem,

$$\phi = \frac{\phi_- + \phi_+}{2} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2p_-}\gamma_0\left(\vec{\gamma}_\perp\cdot\left(\vec{p}_\perp - e\vec{A}_\perp\right) + m\right)\right]\gamma_0\,\gamma_-\,u(p)\,e^{-i\Phi} \tag{1.32}$$

Prin comutarea $\gamma_0\,\gamma_-$ la stânga şi folosind ecuaţia Dirac pentru spinorul liber (1.31) sub forma

$$(\vec{\gamma}_\perp\cdot\vec{p}_\perp + m)\,u(p) = (\gamma_- p_+ + \gamma_+ p_-)\,u(p) \tag{1.33}$$

obţinem expresia funcţiei de undă ϕ (1.32):

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{2}\left[\gamma_0\gamma_- + \frac{1}{2p_-}\gamma_-\left(\gamma_- p_+ + \gamma_+ p_- - e\vec{\gamma}_\perp\cdot\vec{A}_\perp\right)\right]u(p)\,e^{-i\Phi}\\ &= \frac{1}{2}\left[\gamma_0\,\gamma_- + \frac{1}{2}\gamma_-\gamma_+ - \frac{1}{2p_-}\,e\,\gamma_-\vec{\gamma}_\perp\cdot\vec{A}_\perp\right]u(p)\,e^{-i\Phi}\end{aligned} \tag{1.34}$$

Folosind a 2-a relaţie (1.12) $\gamma_\pm\gamma_\mp = 2\gamma_0\gamma_\mp$ primii doi termeni din (1.34) se reduc la matricea unitate, iar al 3-lea termen poate fi transformat folosind $\gamma_-\gamma\cdot A = -\gamma_-\vec{A}_\perp$, va conduce la soluţia

$$\boxed{\phi = \left(1 + \frac{e}{4p_-}\gamma_-\gamma\cdot A\right)u(p)\,e^{-i\Phi}} \tag{1.35}$$

Soluţia găsită poate fi imediat generalizată pentru o direcţie arbitrară de propagare după vecturul de undă k cu $k^\mu = \omega(1,0,0,1)$ prin înlocuirea p_- şi γ_- în (1.35) şi (1.29) prin expresiile covariante corespunzătoare,

$$\begin{aligned}2\omega p_- = \omega\left(p^0 - p^3\right) = k\cdot p \quad &\Rightarrow \quad p_- = \frac{k\cdot p}{2\omega}\\ \omega\gamma_- = \omega\left(\gamma^0 - \gamma^3\right) = k\cdot\gamma \equiv \not{k} \quad &\Rightarrow \quad \gamma_- = \frac{k\cdot\gamma}{\omega}\end{aligned} \tag{1.36}$$

atunci, relaţiaia care definitivează expresia de <u>stări Volkov</u> (1.1) va fi:

$$\boxed{\phi = \left(1 + \frac{e}{2k\cdot p}\not{A}\,\not{k}\right)u(p)\,e^{-i\Phi}} \tag{1.37}$$

Densitatea de curent

Acum putem evalua şi densitatea de curent Dirac j^μ asociată funcţiei de undă (1.1).

$$j^\mu = \overline{\psi}_p \gamma^\mu \psi = N_p^2 \overline{u}(p) \left(1 + \frac{e}{2k \cdot p} \not{A} \not{k}\right) \gamma^\mu \left(1 + \frac{e}{2k \cdot p} \not{k} \not{A}\right) u(p)$$

$$= N_p^2 \overline{u}(p) \left[\gamma^\mu + \frac{e}{2k \cdot p} (\not{A} \not{k} \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k} \not{A}) + \left(\frac{e}{2k \cdot p}\right)^2 \not{A} \not{k} \gamma^\mu \not{k} \not{A}\right] u(p) \qquad (1.38)$$

Tinând cont de relaţiile de anticomutare pentru matricile Dirac şi relaţiile: $\not{k}^2 = k^2 = 0$, $\not{A}^2 = A^2$ precum şi $k \cdot A = 0$ obţinem,

$$j^\mu = N_p^2 \, \overline{u}(p) \left[\gamma^\mu - \frac{e}{k \cdot p} \not{k} A^\mu + \frac{e}{k \cdot p} k^\mu \not{A} - \left(\frac{e}{2k \cdot p}\right)^2 2 \, k^\mu \not{k} A^2\right] u(p) \qquad (1.39)$$

Spinorii Dirac funcţie de impuls satisfac relaţia:

$$\overline{u}(p) \, \gamma^\mu u(p) = \frac{p^\mu}{m} \qquad (1.40)$$

atunci curentul (1.39) poate fi rescris sub forma:

$$j^\mu = N_p^2 \, \frac{1}{m} \left[p^\mu - eA^\mu + k^\mu \left(\frac{eA \cdot p}{k \cdot p} - \frac{e^2 A^2}{2k \cdot p}\right)\right] \qquad (1.41)$$

Prezenţa câmpului EM modifică impulsul particulei. In cazul unor oscilaţii periodice ale câmpului EM, termenii lineari se anulează prin medierex, $\langle A^\mu \rangle = 0$, doar termenul pătratic contribuie la valoarea medie.

Astfel se poate defini <u>impulsul efectiv</u>

$$q^\mu = p^\mu - \frac{e^2 \langle A^2 \rangle}{2k \cdot p} k^\mu \qquad (1.42)$$

De remarcat că q^μ satisace relaţia energie-impuls modificată:

$$q^2 = p^2 - e^2 \langle A^2 \rangle = m^2 \left(1 - \frac{e^2 \langle A^2 \rangle}{m^2}\right) = m_*^2 \qquad (1.43)$$

Electronul în acest fel capătă o <u>masă efectivă</u> m_* crescută fată de masa electronului liber m (deoarece pentru câmpul EM mărimea $A^2 = -\vec{A}_\perp^2$ este negativă.

Dacă impunem condiţia de <u>normare în cutie</u> vom cere ca densitatea medie a electronului $\langle j^0 \rangle$ să fie o particulă în volumul V, obţinem:

$$N_p = \sqrt{\frac{m}{q_0 V}} \qquad (1.44)$$

Cazul unei unde EM plane polarizate circular

Pentru o undă plană polarizată circular (1.4), pătratul potenţialului vector este constant:

$$A^2 = a^2 \bigg(\epsilon_1^2 \cos^2(k \cdot x) + \epsilon_2^2 \sin^2(k \cdot x)\bigg) = -a^2 \qquad (1.45)$$

Integrarea relaţiei (1.2) este elementară şi conduce la:

$$\psi_p = \sqrt{\frac{m}{q_0 V}} \left(1 + \frac{e}{2k\cdot p}\, \not{k}\, \not{A}\right) u(p)$$
$$\times \exp\left[i\,e\,a\,\frac{\epsilon_1\cdot p}{k\cdot p}\sin(k\cdot x) - i\,e\,a\,\frac{\epsilon_2\cdot p}{k\cdot p}\cos(k\cdot x) - i\,q\cdot x\right] \tag{1.46}$$

cu impulsul efectiv

$$q^\mu = p^\mu + \frac{e^2 a^2}{2k\cdot p} k^\mu \tag{1.47}$$