Procese QED în câmpuri laser intense
tema 49

M. Penţia

January 25, 2023

.

”Verbum sapienti sat est”

Cuprins

Capitol 1

Propagatori, Contracţii, VEV

1.1 Evoluţia operatorilor de câmp în QED

1.1.1 Operatorul de evoluţie

In mecanica cuantică:

Ecuaţia de evoluţie stare cuantică $\left|\psi(t)\right\rangle$ |

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{U}(t_0, t)\left|\psi(t_0)\right\rangle \tag{1.1}$$

Ecuaţia de mişcare |

$$i\hbar\,\frac{d\hat{U}}{dt} = \hat{H}\hat{U} \tag{1.2}$$

Hamiltonian - număr (independent de timp) |

$$\text{soluţia} \qquad \hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\hat{H}\,t\right) \tag{1.3}$$

Hamiltonian - operator (independent de timp) |

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\hat{H}\,t\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\,t\right)^n \tag{1.4}$$

Hamiltonian - operator (funcţie de timp) |

$$\hat{U}(t_0, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\overbrace{\int_{t_0}^{t} dt'\,\hat{H}(t')}^{\hat{H}t}\right) = \sum_{n}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\,\hat{H}(t')\right)^n \tag{1.5}$$

fiecare termen din sumă este un produs de integrale, adică o integrală multiplă de ordin n din produsul Hamiltonian-ului luat la n momente de timp diferite.

aici produsele $\hat{H}(t)\hat{H}(t')$ la momente diferite comută $\boxed{\left[\hat{H}(t), \hat{H}(t')\right] = 0}$

In teoria cuantică a câmpurilor:

acum operatorii $\hat{H}(t)$ la momente diferite nu comută $\boxed{\left[\hat{H}(t), \hat{H}(t')\right] \neq 0}$

$$\hat{U}(t_0,t)=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt'\,\hat{H}(t')\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt'\,\hat{H}(t')\right)^n$$

$$=\hat{I}-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt'\,\hat{H}(t')+\frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_{t_0}^{t}dt_1\,\hat{H}(t_1)\int_{t_0}^{t}dt_2\,\hat{H}(t_2)+\dots \qquad (1.6)$$

cu dezvoltarea Dyson de integrale succesive cuprinse secvenţial $t>t_1>t_2>\ldots>t_n$

$$\hat{U}(t_0,t)=\sum_{n}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\ldots\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_n\,\hat{H}(t_1)\hat{H}(t_2)\ldots\hat{H}(t_n) \qquad (1.7)$$

unde avem ordonarea temporală $t_1>t_2>\cdots>t_n$ a termenilor $\hat{H}(t_i)$.

Acţiunea T de ordonare temporală, plasează operatorii dintr-un produs, pe cel cu timpul mai mare la stânga. De exemplu, pentru doi operatori $\hat{\phi}(x)\hat{\psi}(y)$, avem

$$T\left(\hat{\phi}(x)\,\hat{\psi}(y)\right)=\begin{cases}\hat{\phi}(x)\,\hat{\psi}(y) & \text{pentru}\quad x^0>y^0\\ \hat{\psi}(y)\,\hat{\phi}(x) & \text{pentru}\quad y^0>x^0\end{cases} \qquad (1.8)$$

In acest fel, evoluţia temporală a câmpurilor cuantice $\hat{\psi}$ se obţine cu ajutorul operatorului $\hat{U}(t_0,t)$, sub forma (1.7) a dezvoltării Dyson cu ordonarea temporală a integralelor.

$$\left|\hat{\psi}(t)\right\rangle=\hat{U}(t_0,t)\left|\hat{\psi}(t_0)\right\rangle \qquad (1.9)$$

1.1.2 Dezvoltarea operatorului de imprăştiere $\hat{S}$

Pentru a determina operatorul de împrăştiere $\hat{S}$, cu ajutorul operatorului de evoluţie $\hat{U}(t_0,t)$, va trebui întâi să exprimăm Hamiltonian-ul de interacţie, pornind de la densitatea de Lagrangian QED:

$$\mathcal{L}_{QED}=\hat{\bar{\psi}}\left(i\hbar\,c\,\gamma^\mu D_\mu-mc^2\right)\hat{\psi}-\frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu} \qquad (1.10)$$

unde derivata covarianta D_μ, invariantă la transformarea de calibrare $U(1)$, este:

$$D_\mu=\partial_\mu+\frac{i\,e}{\hbar c}A_\mu \qquad (1.11)$$

Inlocuind D_μ în $\mathcal{L}_{QED}$ avem densitatea de Lagrangian, sub formă explicită:

$$\mathcal{L}_{QED}=i\hbar\,c\,\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\partial_\mu\hat{\psi}-\frac{e}{\hbar c}\hat{\bar{\psi}}\underbrace{\gamma^\mu A_\mu}_{\hat{A\!\!\!/}}\hat{\psi}-mc^2\hat{\bar{\psi}}\hat{\psi}-\frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu} \qquad (1.12)$$

Astfel, densitatea de Lagrangian de interacţie este: $$\mathcal{L}'=-\frac{e}{\hbar c}\hat{\bar{\psi}}\hat{A\!\!\!/}\hat{\psi} \qquad (1.13)$$

iar, densitatea de Hamiltonian de interacţie este: $$\mathcal{H}'=\frac{e}{\hbar c}\hat{\bar{\psi}}\hat{A\!\!\!/}\hat{\psi} \qquad (1.14)$$

- Folosind definiţia operatorului $\hat{S}$:

$$\boxed{\hat{S} = \lim_{t\pm\to\pm\infty} \hat{U}(t_-, t_+) = T\left[\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \hat{H}'(t)\right)\right] = T\left[\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d^4x\, \hat{\mathcal{H}}'(x)\right)\right]} \tag{1.15}$$

sub forma dezvoltării Dyson (1.7) ca sumă de produse de integrale temporal ordonate de Hamiltonieni,

$$\hat{S} = T\left[\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d^4x\, \hat{\mathcal{H}}'(x)\right)\right] = T\sum_n \frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d^4x\, \hat{\mathcal{H}}'(x)\right)^n = \tag{1.16}$$

prin ordonare temporală $\quad x_1^0 > x_2^0 > \cdots > x_n^0$

$$= \sum_n \frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n\; T\Big(\hat{\mathcal{H}}'(x_1)\,\hat{\mathcal{H}}'(x_2)\ldots\hat{\mathcal{H}}'(x_n)\Big) \tag{1.17}$$

prin dezvoltarea Dyson pe domenii de integrare cuprinse recurent, în ordine temporală

$$= \underbrace{\hat{I}}_{\hat{S}^{(0)}} + \underbrace{\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\int_{x_0}^{x} d^4x_1 \hat{\mathcal{H}}'(x_1)}_{\hat{S}^{(1)}} + \underbrace{\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{x_0}^{x} d^4x_1 \int_{x_0}^{x_1} d^4x_2 \Big(\hat{\mathcal{H}}'(x_1)\,\hat{\mathcal{H}}'(x_2)\Big)}_{\hat{S}^{(2)}} + \ldots \tag{1.18}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{S}^{(n)} \tag{1.19}$$

$\hat{S}^{(n)}$ este termenul ce conţine produsul temporal ordonat de n-Hamiltonieni, luaţi în poziţii spaţiu-timp ordonate după $\quad x_1^0 > x_2^0 > \cdots > x_n^0$.
$\hat{S}^{(0)}$ este operatorul identitate $\hat{I}$ şi nu cere nici o reordonare. Exprimă componenta de împrăştiere înainte. Aceasta este neglijată în calculul mărimilor de interes fizic, ca secţiunea eficace sau probabilitatea de dezintegrare.

Dezvoltarea operatorului $\hat{S}$ pentru Hamiltonian-ul QED

- Termenul de ordin întâi $\hat{S}^{(1)}$, de un singur Hamiltonian în dezvoltarea (1.17), care acţionează prin toţi operatorii la acelaşi timp t_1. Deci, se consideră ordonaţi temporal,

$$\hat{S}^{(1)} = \frac{-i}{\hbar}\int d^4x_1\, \hat{\mathcal{H}}'(x_1) = \frac{-i}{\hbar}\int d^4x\left(\frac{e}{\hbar c}\hat{\bar{\psi}}\hat{A\!\!\!/}\hat{\psi}\right)_x = \frac{-ie}{\hbar^2 c}\int d^4x\left(\hat{\bar{\psi}}\hat{A\!\!\!/}\hat{\psi}\right)_x \tag{1.20}$$

- Termenul de ordin doi, cu produs de doi Hamiltonieni, $\hat{S}^{(2)}$ în dezvoltarea (1.17), este:

$$\hat{S}^{(2)} = \frac{(-i/\hbar)^2}{2!}\int d^4x_1 \int d^4x_2\; T\Big(\overbrace{(\hat{\bar{\psi}}\hat{A\!\!\!/}\hat{\psi})_{x_1}}^{\hat{\mathcal{H}}'(x_1)}\overbrace{(\hat{\bar{\psi}}\hat{A\!\!\!/}\hat{\psi})_{x_2}}^{\hat{\mathcal{H}}'(x_2)}\Big) \tag{1.21}$$

- Matricea $\hat{S}$ este în general o matrice infinită, ce leagă diverse stări iniţiale şi finale, cu diverse particule şi interacţii, specificate prin coordonate, impulsuri, spini şi alte mărimi fizice ale particulelor, posibil sau imposibil de a lua parte. Multe componente sunt egale cu zero, deoarece unele interacţii (cum ar fi $e^-\gamma \to e^-e^+$) sunt imposibile, datorită violării diverselor legi de conservare (exemplu conservarea sarcinii).

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e^-_{r^1\vec{p}^1}\,,\; e^+_{r^2\vec{p}^2} \\ e^-_{r^1\vec{p}^1}\,,\; e^+_{r^2\vec{p}^3} \\ e^-_{r^1\vec{p}^2}\,,\; e^+_{r^2\vec{p}^3} \\ \vdots \\ e^-_{r^2\vec{p}^1}\,,\; e^+_{r^2\vec{p}^3} \\ \vdots \\ e^-_{r^1\vec{p}^1}\,,\; \gamma_{r^2\vec{k}^1} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Stări proprii} \\ \text{finale}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \dots & S_{1i} & \dots & \dots \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & \dots & S_{2i} & \dots & \dots \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & \dots & S_{3i} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{f1} & S_{f2} & S_{f3} & \dots & S_{fi} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}}_{\text{Matricea } \hat{S}} \underbrace{\begin{pmatrix} e^-_{r^1\vec{p}^1}\,,\; e^+_{r^2\vec{p}^2} \\ e^-_{r^1\vec{p}^1}\,,\; e^+_{r^2\vec{p}^3} \\ e^-_{r^1\vec{p}^2}\,,\; e^+_{r^2\vec{p}^3} \\ \vdots \\ e^-_{r^2\vec{p}^1}\,,\; e^+_{r^2\vec{p}^3} \\ \vdots \\ e^-_{r^1\vec{p}^1}\,,\; \gamma_{r^2\vec{k}^1} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Stări proprii} \\ \text{iniţiale}}}$$

In cazuri concrete, se face calculul $\hat{S}_{fi}$ pentru interacţia respectivă.

1.1.3 Amplitudinea de tranziţie

- Dacă folosim dezvoltarea în serie (1.21) a operatorului $\hat{S}$, pentru termenul de ordin doi $\hat{S}^{(2)}$ avem:

$$\hat{S}^{(2)} = \iint K\left(\hat{\bar{\psi}}\hat{\not{A}}\hat{\psi}\right)_{x_1}\left(\hat{\bar{\psi}}\hat{\not{A}}\hat{\psi}\right)_{x_2} dx_1^4\, dx_2^4$$

- Fie procesul de interacţie din Fig.1.1. Să determinăm amplitudinea de tranziţie:

$$\underbrace{\langle \mu^+\mu^- |}_{\substack{\text{stare} \\ \text{finală}}} S_{fi} \underbrace{| e^+e^- \rangle}_{\substack{\text{stare} \\ \text{init.}}} = \langle \mu^+\mu^- | K \left(\hat{\bar{\psi}}^c_{\mu^-}\, \overbracket{\hat{\not{A}}^a\, \hat{\psi}^c_{\mu^+}\Big)_{x_2}\Big(\hat{\bar{\psi}}^a_{e^+}\, \hat{\not{A}}^c}\, \hat{\psi}^a_{e^-}\right)_{x_1} | e^+e^- \rangle \tag{1.22}$$

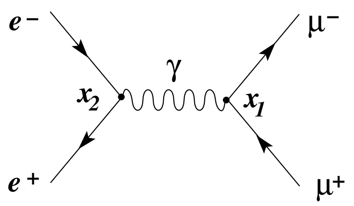


Figura 1.1: Diagrama procesului de anihilare perechi e^-e^+ cu producere perechi $\mu^-\mu^+$.

$\langle \mu^+\mu^- \|$ - starea finală (bra)	$\| e^+e^- \rangle$ - starea iniţială (ket)

K - constantă din teorie

$\hat{\psi}^c_{\mu^+}$ - opeator creare μ^+ în $\|ket\rangle$	$\psi^a_{e^-}$ - operator anihilare e^- din $\|ket\rangle$
$\hat{\bar{\psi}}^c_{\mu^-}$ - operator creare μ^- în $\|ket\rangle$	$\hat{\bar{\psi}}^a_{e^+}$ - operator anihilare e^+ din $\|ket\rangle$
$\hat{\not{A}}^a$ - operator anihilare foton virtual	$\hat{\not{A}}^c$ - operator creare foton virtual

linia deasupra operatorilor $\overbracket{\hat{\not{A}}^c\, \hat{\not{A}}^a}$ indică propagarea fotonului virtual γ de la $x_2 \to x_1$.

- Calculul amplitudinii (1.22) se face trepat, în următoarea ordine:

  1. Anihilarea particulelor din starea iniţială $\left|e^+e^-\right\rangle$, ce conduce la starea ket $\left|0\right\rangle$ de vacuum, multiplicată cu un factor K_2.

$$\left\langle \mu^+\mu^- \middle| K\left(\hat{\overline{\psi}}{}^c_{\mu^-}\, \hat{\not{A}}^a\, \hat{\psi}^c_{\mu^+}\right)_{x_1} \left(\hat{\not{A}}^c\right)_{x_2} K_2 \middle| 0 \right\rangle \tag{1.23}$$

  2. Crearea cu $\hat{\not{A}}^c$ în x_2 a fotonului virtual şi apoi propagarea lui între $x_2 \to x_1$ şi anihilarea cu $\hat{\not{A}}^a$ în x_1. Procesul adaugă un factor suplimentar K_γ, în urma permutării $\hat{\not{A}}^c \leftrightarrow \hat{\psi}^c_{\mu^+}$ dar păstrează starea de vacuum $\left|\,0\right\rangle$.

$$\left\langle \mu^+\mu^- \middle| K\left(\hat{\overline{\psi}}{}^c_{\mu^-} \hat{\psi}^c_{\mu^+}\right)_{x_1} K_\gamma K_2 \middle| 0 \right\rangle \tag{1.24}$$

  3. Opeatorii rămaşi, acţionează asupra stării de vacuum şi crează un μ^+ şi un μ^-, ce conduce la o nouă stare ket $\left|\mu^+\mu^-\right\rangle$ multiplicată cu un nou factor K_1,

$$\left\langle \mu^+\mu^- \middle| \underbrace{K K_1 K_\gamma K_2}_{S_{fi}} \middle| \mu^+\mu^- \right\rangle = S_{fi} \underbrace{\left\langle \mu^+\mu^- \middle| \mu^+\mu^- \right\rangle}_{I} \tag{1.25}$$

- Integrările din termenii $\hat{S}^{(n)}$ (1.19) ai dezvoltării Dyson, ca produse de operatori ordonaţi temporal (1.21), se fac cu ajutorul teoremei Wick prin care se transformă ordonărea temporală într-o ordonare normală de operatori plus "contracţiile" de perechi de operatori (numere), care comută cu operatorii. In acest fel integrările se pot realiza fără dificultate.

- Să luăm ca exemplu, expresiile operatorilor de câmp scalar complex cu componentele $\hat{\psi}(x)$ reală şi $\hat{\psi}^\dagger(x)$ complex conjugată (şi transpusă), numită uneori Hermitic conjugată.

anihilare particule incoming $E > 0$ ↓	creare antiparticule outgoing $E > 0$ ↓

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \Big(\underbrace{\hat{b}_{\vec{p}}\, e^{-i\,p\cdot x}}_{\sim \hat{\psi}^-(x)} + \underbrace{\hat{c}^\dagger_{\vec{p}}\, e^{i\,p\cdot x}}_{\sim \hat{\psi}^+(x)} \Big) \tag{1.26}$$

$$\hat{\psi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \Big(\underbrace{\hat{c}_{\vec{p}}\, e^{-i\,p\cdot x}}_{\sim \hat{\psi}^{\dagger -}(x)} + \underbrace{\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}\, e^{i\,p\cdot x}}_{\sim \hat{\psi}^{\dagger +}(x)} \Big) \tag{1.27}$$

In aceste relaţii,
operatorul $\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}$ $\left(\hat{b}_{\vec{p}}\right)$ crează (anihilează) o particulă b cu impuls $\vec{p}$.
operatorul $\hat{c}^\dagger_{\vec{p}}$ $\left(\hat{c}_{\vec{p}}\right)$ crează (anihilează) o particulă c cu impuls $\vec{p}$

Aceşti operatori, coeficienţi Fourier, satisfac relaţiile de comutare:

$$\boxed{\left[\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}^\dagger_{\vec{p}'}\right] = \left[\hat{c}_{\vec{p}}, \hat{c}^\dagger_{\vec{p}'}\right] = \delta(\vec{p} - \vec{p}')} \tag{1.28}$$

1.1.4 Ordonare normală, Ordonare temporală şi Contracţii operatori

- Evaluarea amplitudinilor de tranziţie implică dezvoltări Dyson (1.7) cu un set de operatori ordonaţi temporal, de tip $\langle f \,|T\{\hat{H}'(x_1)\hat{H}'(x_2)\ldots\hat{H}'(x_n)\}|\, i\rangle$ unde $|\, i\rangle$ şi $|\, f\rangle$ sunt stări proprii de câmpuri libere.

  Ordonarea T a operatorilor se face după argumentul temporal $t_1 > t_2 > \cdots > t_n$.

- Ordonarea normală a unui produs de operatori, alcătuit din operatori de creare şi anihilare, înseamnă plasarea celor de creare la stânga şi a celor de anihilare la dreapta.

  In QED, $\hat{H}'$ conţin operatori de creare şi anihilare, care trebuiesc ordonaţi normal (toţi cei de creare la stânga iar cei de anihilare la dreapta), care vor trebui să înceapă cu anihilarea stărilor $|\, i\rangle$. Aceasta se poate face prin folosirea la fiecare interschimbare, a relaţiilor de comutare pentru bosoni, sau a celor de anticomutare pentru fermioni.

  Pentru evitarea energiilor infinite, la fel ca în cazul oscilatorului armonic, s-a ales exprimarea Hamiltonian-ului cu operatorul de anihilare $\hat{a}$ la dreapta $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)$. Aceasta operaţie are puţin efect asupra operatorilor ce comută, cum ar fi de exemplu operatorii $\hat{b}_{\vec{p}}$ şi $\hat{c}^\dagger_{\vec{p}}$, coeficienţi ale aceleiaşi componente de câmp. Adică, interschimbarea în termenul $\hat{b}_{\vec{p}}\,\hat{c}^\dagger_{\vec{p}}$ cu $\hat{c}^\dagger_{\vec{p}}\,\hat{b}_{\vec{p}}$ nu crează nici o problemă, deoarece factorii comută, adică $\hat{b}_{\vec{p}}\,\hat{c}^\dagger_{\vec{p}} = \hat{c}^\dagger_{\vec{p}}\,\hat{b}_{\vec{p}}$. In schimb, termenul $\hat{b}_{\vec{p}}\,\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}$ din dezvoltările (1.26) - (1.27), este o altă problemă, deoarece în general $\quad \hat{b}_{\vec{p}}\,\hat{b}^\dagger_{\vec{p}\,'} \neq \hat{b}^\dagger_{\vec{p}\,'}\,\hat{b}_{\vec{p}} \quad$ (1.28).

- Tinem cont că dezvoltarea operatorilor de câmp $\hat{\phi}$, prin moduri de oscilaţie, conţine două componente, una de anihilare $\hat{\phi}^-$ şi una de creare $\hat{\phi}^+$, adică: $\hat{\phi} = \hat{\phi}^- + \hat{\phi}^+$ (vezi de ex. (1.26) şi (1.27)). Pe de altă parte avem $\hat{\phi}^-|0\rangle = 0$ şi $\langle 0|\hat{\phi}^+ = 0$.

  Atenţie: In diverse lucrări indicii $+$ şi $-$ sunt folosiţi în sens invers, ca stări de energie ”pozitivă” pentru operator de anihilare, respectiv ”negativă” pentru operator de creare.

- In general, doi operatori: $\hat{\phi}(x_1) = \hat{\phi}^+(x_1) + \hat{\phi}^-(x_1)$ şi $\hat{\psi}(x_2) = \hat{\psi}^+(x_2) + \hat{\psi}^-(x_2)$ au componente de creare: $\hat{\phi}^+(x_1)$ şi $\hat{\psi}^+(x_2)$ şi de anihilare: $\hat{\phi}^-(x_1)$ şi $\hat{\psi}^-(x_2)$

  operatori notaţi în continuare: $\qquad \hat{\phi}_1 = \hat{\phi}_1^+ + \hat{\phi}_1^- \quad$ şi $\quad \hat{\psi}_2 = \hat{\psi}_2^+ + \hat{\psi}_2^-$

- Produsul de doi operatori $\hat{\phi}_1$ şi $\hat{\psi}_2$, ordonaţi temporal $x_1^0 > x_2^0$ (ordinea $1 \to 2$), este:

$$T\Big(\hat{\phi}_1\hat{\psi}_2\Big) = T\Big(\hat{\phi}_1^+ + \hat{\phi}_1^-\Big)\Big(\hat{\psi}_2^+ + \hat{\psi}_2^-\Big) = \hat{\phi}_1^+\hat{\psi}_2^+ + \hat{\phi}_1^-\hat{\psi}_2^- + \hat{\phi}_1^+\hat{\psi}_2^- + \hat{\phi}_1^-\hat{\psi}_2^+ \tag{1.29}$$

- Ordonarea normală a acestui produs (creare la stânga, anihilare la dreapta) este:

$$N\Big(\hat{\phi}_1\hat{\psi}_2\Big) = N\Big(\hat{\phi}_1^+ + \hat{\phi}_1^-\Big)\Big(\hat{\psi}_2^+ + \hat{\psi}_2^-\Big) = \hat{\phi}_1^+\hat{\psi}_2^+ + \hat{\phi}_1^-\hat{\psi}_2^- + \hat{\phi}_1^+\hat{\psi}_2^- + \hat{\psi}_2^+\hat{\phi}_1^- \tag{1.30}$$

  După cum se vede, doar ultimul termen este interschimbat. Atunci diferenţa este:

$$T\Big(\hat{\phi}_1\hat{\psi}_2\Big) - N\Big(\hat{\phi}_1\hat{\psi}_2\Big) = \hat{\phi}_1^-\hat{\psi}_2^+ - \hat{\psi}_2^+\hat{\phi}_1^- = \Big[\hat{\phi}_1^-, \hat{\psi}_2^+\Big] \tag{1.31}$$

exprimată prin comutatorul (canonic al) operatorilor, adică este un număr complex.

Această diferenţă defineşte contracţia celor doi operatori:

$$\boxed{\overbracket{\hat{\phi}_1\,\hat{\psi}_2} \equiv T\Big(\hat{\phi}_1\hat{\psi}_2\Big) - N\Big(\hat{\phi}_1\hat{\psi}_2\Big) = \begin{cases} \Big[\hat{\phi}_1^-, \hat{\psi}_2^+\Big] & x_1^0 > x_2^0 \\ \Big[\hat{\psi}_2^-, \hat{\phi}_1^+\Big] & x_2^0 > x_1^0 \end{cases}} \tag{1.32}$$

- Deoarece valoarea aşteptată pe stările de vacuum (vacuum expectation value - VEV) a produsului normal ordonat este zero, operatorul de anihilare ($\hat{\phi}_1^-$ sau $\hat{\psi}_2^-$) fiind cel mai din dreapta, $\hat{\phi}_1^-\big|\,0\big\rangle = 0$, luând VEV pentru diferenţa (1.31), în care produsul normal ordonat este egal cu zero, rămâne VEV pentru produsul temporal ordonat ca VEV de comutatori:

$$\Big\langle 0\,\Big|T\Big(\hat{\phi}_1\hat{\psi}_2\Big)\Big|\,0\Big\rangle = \begin{cases} \Big\langle 0\Big|\Big[\hat{\phi}_1^-, \hat{\psi}_2^+\Big]\Big|0\Big\rangle & x_1^0 > x_2^0 \\ \Big\langle 0\Big|\Big[\hat{\psi}_2^-, \hat{\phi}_1^+\Big]\Big|0\Big\rangle & x_2^0 > x_1^0 \end{cases} \tag{1.33}$$

1.1.5 Teorema Wick

- Luăm două câmpuri oarecare $\hat{A}(x_1)$ şi $\hat{B}(x_2)$, care pot fi orice câmp $\hat{\phi}$, $\hat{\psi}$, $\hat{A}^\mu$, $\hat{\overline{\phi}}$, etc. şi care au componente de creare şi anihilare:

$$\hat{A} = \underbrace{\hat{A}^-}_{\substack{\text{op.}\\\text{anih.}}} + \underbrace{\hat{A}^+}_{\substack{\text{op.}\\\text{crea.}}} \quad ; \quad \hat{B} = \underbrace{\hat{B}^-}_{\substack{\text{op.}\\\text{anih.}}} + \underbrace{\hat{B}^+}_{\substack{\text{op.}\\\text{crea.}}} \tag{1.34}$$

- Am văzut (1.32), contracţia a doi operatori este exprimată prin comutatori (anticomutatori):

$$\overbracket{\hat{A}(x_1)\,\hat{B}(x_2)} = \begin{cases} \Big[\hat{A}^-(x_1), \hat{B}^+(x_2)\Big]_\mp & x_1^0 > x_2^0 \\ \pm\Big[\hat{B}^-(x_2), \hat{A}^+(x_1)\Big]_\pm & x_2^0 > x_1^0 \end{cases} \tag{1.35}$$

unde indicele ”plus” indică anticomutator, pentru câmpurile $\hat{A}$ şi $\hat{B}$ câmpuri fermionice, care la permutare schimbă de semn. Indicele ”minus” indică comutator, pentru câmpuri bosonice, care la permutare nu schimbă de semn. Semnul $\pm$ din faţa parantezei drepte din cea de-a doua condiţie, specifică ”plus”pentru comutare, iar ”minus” pentru anticomutare.

De remarcat că pentru câmpurile amintite mai înainte (1.26) - (1.27) toţi comutatorii (anticomutatorii) sunt nuli, cu excepţia $\hat{A} = \hat{\phi}$ şi $\hat{B} = \hat{\phi}^\dagger$ sau $\hat{A} = \hat{\psi}$ şi $\hat{B} = \hat{\overline{\psi}}$, etc.

- Deci, contracţia a doi operatori este egală cu comutatorul componentelor de anihilare şi creare, ordonate temporal. Acesta este un număr complex, de cele mai multe ori fiind comutatorul componentelor conjugate canonic.

- VEV pentru contracţia a doi operatori, deoarece $\left\langle 0 \left| N(\text{orice şir op}) \right| 0 \right\rangle = 0$, este

$$
\begin{aligned}
\left\langle 0 \left| \contraction{}{\hat{A}}{}{\hat{B}}\hat{A}\hat{B} \right| 0 \right\rangle &= \left\langle 0 \left| T\left(\hat{A}\hat{B}\right) \right| 0 \right\rangle \\
\left\langle 0 \left| \contraction{}{\hat{A}}{}{\hat{B}}\hat{A}\hat{B} \right| 0 \right\rangle &= \contraction{}{\hat{A}}{}{\hat{B}}\hat{A}\hat{B} \left\langle 0 \middle| 0 \right\rangle = \contraction{}{\hat{A}}{}{\hat{B}}\hat{A}\hat{B}
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

- Pentru un produs de trei operatori, contracţiile se fac în perechi de operatori, iar dacă sunt operatori de creare şi de anihilare, prin trecerea la ordonarea normală, cu operatorul de anihilare la dreapta, conduce în final la o VEV egală cu zero, deoarece acţionează asupra stării de vacuum.

  In general, pentru un produs de număr impar de operatori, VEV va fi zero.

$$
T\left(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\right) = N\left(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\right) + N\left(\contraction{}{\hat{A}}{}{\hat{B}}\hat{A}\hat{B}\hat{C}\right) + N\left(\contraction{}{\hat{A}}{\hat{B}}{\hat{C}}\hat{A}\hat{B}\hat{C}\right) + N\left(\contraction{\hat{A}}{\hat{B}}{}{\hat{C}}\hat{A}\hat{B}\hat{C}\right)
\tag{1.37}
$$

- Exprimăm ordonarea temporală prin cea normală a operatorilor $\hat{A}$ şi $\hat{B}$ şi contracţia lor (care este un numar asupra căruia ordonarea normală nu are nici un efect): şi contracţia lor.

$$
T\left(\hat{A}\hat{B}\right) = N\left(\hat{A}\hat{B}\right) + \contraction{}{\hat{A}}{\,}{\hat{B}}\hat{A}\,\hat{B} = N\left[\left(\hat{A}\hat{B}\right) + \contraction{}{\hat{A}}{\,}{\hat{B}}\hat{A}\,\hat{B}\right]
\tag{1.38}
$$

- Rezultatul poate fi generalizat pentru şiruri mai lungi de operatori, obţinem **teorema Wick**. De exemplu pentru un şir de patru operatori avem:

$$
\begin{aligned}
T\left(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\right) = {} & N\left(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\right) + N\left(\contraction{}{\hat{A}}{}{\hat{B}}\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\right) + N\left(\contraction{}{\hat{A}}{\hat{B}}{\hat{C}}\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\right) + N\left(\contraction{}{\hat{A}}{\hat{B}\hat{C}}{\hat{D}}\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\right) \\
& + N\left(\contraction{\hat{A}}{\hat{B}}{}{\hat{C}}\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\right) + N\left(\contraction{\hat{A}}{\hat{B}}{\hat{C}}{\hat{D}}\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\right) + N\left(\contraction{\hat{A}\hat{B}}{\hat{C}}{}{\hat{D}}\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\right) \\
& + N\left(\contraction{}{\hat{A}}{}{\hat{B}}\contraction{\hat{A}\hat{B}}{\hat{C}}{}{\hat{D}}\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\right) + N\left(\contraction{}{\hat{A}}{\hat{B}}{\hat{C}}\contraction[2ex]{\hat{A}}{\hat{B}}{\hat{C}}{\hat{D}}\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\right) + N\left(\contraction[2ex]{}{\hat{A}}{\hat{B}\hat{C}}{\hat{D}}\contraction{\hat{A}}{\hat{B}}{}{\hat{C}}\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\right)
\end{aligned}
\tag{1.39}
$$

- Să studiem comportarea unei singure contracţii din şirul de operatori din ordonarea $T\left(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots\hat{Z}\right)$ şi să luăm termenul normal ordonat $N\left(\contraction{\hat{A}\hat{B}}{\hat{C}}{\hat{D}\hat{E}}{\hat{F}}\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\hat{E}\hat{F}\hat{G}\dots\right)$. Deoarece contracţia e un număr, putem să-l scoatem ca factor în afara produsului:

$$
N\left(\contraction{\hat{A}\hat{B}}{\hat{C}}{\hat{D}\hat{E}}{\hat{F}}\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\hat{E}\hat{F}\hat{G}\dots\right) = \contraction{}{\hat{C}}{}{\hat{F}}\hat{C}\hat{F} \times N\left(\hat{A}\hat{B}\hat{D}\hat{E}\hat{G}\dots\right)
\tag{1.40}
$$

- Atunci când evaluăm VEV a acestui termen, el se va anula, deoarece orice produs normal ordonat (cu operatorii de anihilare la dreapta) $\left\langle 0 \left| N\left(\text{orice op}\right) \right| 0 \right\rangle = 0$. De aceea, singurii termeni care rămân de evaluat VEV a $T\left(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\dots\hat{Z}\right)$ sunt cei care conţin contracţiile tuturor operatorilor. Astfel:

$$
\begin{aligned}
\Big\langle 0 \Big| T\Big(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\ldots\hat{Y}\hat{Z}\Big)\Big| 0\Big\rangle = & \Big\langle 0 \Big| T\Big(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\hat{E}\hat{F}\ldots\hat{Y}\hat{Z}\Big)\Big| 0\Big\rangle \\
& + \Big\langle 0 \Big| T\Big(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\hat{E}\hat{F}\ldots\hat{Y}\hat{Z}\Big)\Big| 0\Big\rangle \qquad (1.41) \\
& + \left(\begin{array}{c}\text{toate combinaţiile posibile de} \\ \text{contracţii de perechi de} \\ \text{operatori}\end{array}\right)
\end{aligned}
$$

- Dacă avem un număr impar de operatori de creare şi anihilare, VEV pentru produsul lor temporal ordonat va fi zero, deoarece contracţiile se fac în perechi de operatori.

1.1.6 Propagatori - evaluare şi ordonare temporală

- Se prepară o stare iniţială prin acţiunea operatorului de creare asupra stării de vacuum $\big|i\big\rangle = \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}'}\big|0\big\rangle$ în punctul spaţiu-timp y şi se cere să aflăm amplitudinea de tranziţie la starea finală $\big|f\big\rangle = \big\langle 0\big|\hat{a}_{\vec{p}}$ din punctul x, similar (1.22), cu expresia câmpurilor (**??**):

$$
\begin{aligned}
\big\langle f\big|\hat{S}\big|i\big\rangle &= \big\langle 0\big|\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y)\big|0\big\rangle \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}\ \overbrace{d^3\vec{p}'}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{4E_{\vec{p}}\,E_{\vec{p}'}}}\overbrace{\underbrace{\big\langle 0\,\big|\hat{a}_{\vec{p}}}_{\sim\langle f|}\ \underbrace{\hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}'}\big|0\big\rangle}_{\sim|i\rangle}}^{(2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{p}')} e^{-i\,p\cdot x+i\,p'\cdot y} \quad \Big| \ \text{integrare } d^3\vec{p}' \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\,e^{-i\,p\cdot(x-y)}
\end{aligned}
$$

deci

$$
\boxed{\big\langle f\big|\hat{S}\big|i\big\rangle = \big\langle 0\big|\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y)\big|0\big\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\,e^{-i\,p\cdot(x-y)} \equiv D(x-y)} \qquad (1.42)
$$

unde funcţia $D(x{-}y)$ defineşte propagatorul tranziţiei $\big|i\big\rangle \longrightarrow \big|f\big\rangle$, pentru $y^0 < x^0$

Similar, funcţia $D(y{-}x)$ exprimă propagatorul tranziţiei $\big|f\big\rangle \longrightarrow \big|i\big\rangle$, pentru $x^0 < y^0$

$$
\boxed{\big\langle i\big|\hat{S}\big|f\big\rangle = \big\langle 0\big|\hat{\phi}(y)\,\hat{\phi}(x)\big|0\big\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\,e^{-i\,p\cdot(y-x)} \equiv D(y-x)} \qquad (1.43)
$$

In concluzie, amplitudinea de tranziţie este direct legată de VEV a produsului de operatori de câmp şi propagatorul interacţiei, ordonat temporal.

$$
\begin{cases}
\big\langle f\big|\hat{S}\big|i\big\rangle = \big\langle 0\big|\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y)\big|0\big\rangle = D(x-y) & \text{pentru} \quad x^0 > y^0 \\
\big\langle i\big|\hat{S}\big|f\big\rangle = \big\langle 0\big|\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y)\big|0\big\rangle = D(y-x) & \text{pentru} \quad y^0 > x^0
\end{cases}
$$

- Cei doi propagatori de mai sus sunt componentele propagatorului Feynman, definit cu ajutorul ordonarii temporale T (1.8) introdusă în dezvoltarea Dyson (1.7) este:

$$\Delta_F(x,y) = \langle 0 \big| T\Big(\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y)\Big)\big|\,0\rangle = \begin{cases} D(x-y) & \text{pentru} \quad x^0 > y^0 \\ D(y-x) & \text{pentru} \quad y^0 > x^0 \end{cases} \tag{1.44}$$

unde

$$T\Big(\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y)\Big) = \begin{cases} \hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}(y) & \text{pentru} \quad x^0 > y^0 \\ \hat{\phi}(y)\,\hat{\phi}(x) & \text{pentru} \quad y^0 > x^0 \end{cases} \tag{1.45}$$

- Propagatorul Feynman are expresia analitică de forma:

$$\boxed{\Delta_F(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{p^2-m^2}\,e^{-i\,p\cdot(x-y)}} \tag{1.46}$$

integrarea după dp^0, conduce la

$$\begin{cases} D(x-y) \underbrace{=}_{p^0=E_{\vec{p}}} \displaystyle\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\,e^{-i\,p\,\cdot\,(x-y)} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \boxed{\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\,e^{-i\,E_{\vec{p}}\,(x^0-y^0)+i\,\vec{p}\,\cdot\,(\vec{x}-\vec{y})}} \quad \text{pt.} \quad x^0 > y^0 & (1.47) \\ D(y-x) \underbrace{=}_{p^0=-E_{\vec{p}}} \displaystyle\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\,e^{-i\,p\,\cdot\,(y-x)} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \boxed{\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\,e^{-i\,E_{\vec{p}}\,(y^0-x^0)+i\,\vec{p}\,\cdot\,(\vec{y}-\vec{x})}} \quad \text{pt.} \quad y^0 > x^0 & (1.48) \end{cases}$$

1.1.7 Reprezentarea grafică a propagatorilor Feynman

Deci, propagatorul Feynman $\Delta_F(x,y)$ este alcătuit din două componente:

- I-a componentă, (1.47), prin termenul $e^{-i\,E_{\vec p}\,(x^0-y^0)+i\,\vec p\cdot(\vec x-\vec y)}$, descrie secvenţa temporală $y^0<x^0$. Exprimă propagarea $y\to x$ a unei particule ($E_{\vec p}=+E$) produsă în $y\equiv(y^0,\vec y)$, pe timpul $y^0<x^0$, pe spaţiul $|\vec y|<|\vec x|$, şi anihilată în $x\equiv(x^0,\vec x)$ (vezi Figura 1.2).

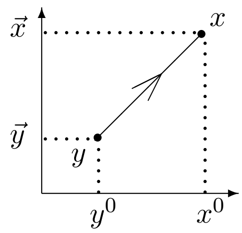
(1.47) propagare $y\to x$ $D(x-y)\sim e^{-i\,p\cdot(x-y)}=$ $=e^{-i\,E\,(x^0-y^0)+i\,\vec p\cdot(\vec x-\vec y)}$	$E>0$ $\quad$ $\vec p>0$ $\underbrace{\Delta t>0}_{x^0-y^0}$ $\quad$ $\underbrace{|\Delta\vec x|>0}_{|\vec x|-|\vec y|}$ $\boxed{\text{particulă}}$ $\quad$ mişcare directă în sp-timp	

Figura 1.2: Propagator Feynman de particulă $y\to x$

- A II-a componentă (1.48), prin termenul $e^{-i\,E_{\vec p}\,(y^0-x^0)+i\,\vec p\cdot(\vec y-\vec x)}$, descrie secvenţa temporală $x^0<y^0$ şi secvenţa spaţială $|\vec x|<|\vec y|$. Adică, exprimă propagarea $x\to y$ a unei particule ($E_{\vec p}=+E$), dar invers în timp şi spaţiu.

  Pentru antiparticulă luăm $E_{\vec p}=-E$ şi $\vec p=-\vec p$. Prin inversia atât temporală cât şi spaţială, obţinem propagarea normală în spaţiu şi timp $y\to x$, ca în cazul particulei.

Astfel ecuaţia (1.48) descrie

ATÂT propagarea inversă $x\to y$ a unei particule ($E>0$) produsă în $x\equiv(x^0,\vec x)$, propagată INVERS în timp $x^0\to y^0$ şi spaţiu $\vec x\to\vec y$ (Figura 1.3).

CÂT şi propagarea directă $y\to x$ a unei antiparticule ($-E$) produsă în $y\equiv(y^0,\vec y)$, propagată DIRECT în timp $y^0<x^0$ şi spaţiu $|\vec y|<|\vec x|$ şi anihilată în $x\equiv(x^0,\vec x)$.

In acest fel, prin reprezentarea grafică de particulă, cu propagare inversă $x\to y$ în spaţiu-timp (Figura 1.3) obţinem reprezentarea propagatorului Feynman (1.48) de antiparticulă $y\to x$,

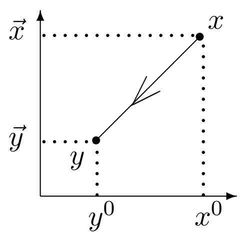
(1.48) propagare antiparticulă $y\to x$ $D(y-x)\sim e^{-i\,p\cdot(y-x)}=$ $=e^{i(-E)(x^0-y^0)+i(-\vec p)\cdot(\vec x-\vec y)}$	$\underbrace{-E}_{E\text{ antiparticulă}}>0$ $\quad$ $\vec p=-\vec p$ $y^0<x^0$ $\quad$ $|\vec y|<|\vec x|$ $\boxed{\text{antiparticulă}}$ $\quad$ mişcare directă în sp-timp	

Figura 1.3: Propagator Feynman de antiparticulă $y\to x$

1.1.8 Teorema Wick prin propagatori

- In calculul amplitudinii de tranziţie (1.42) operatorii se iau între stările de vacuum, adică se determină valoarea medie pe starea de vacum - "vacuum expectation value" (VEV). Cum contracţia este un număr constant, el este egal cu valoarea medie. Deci, contracţia (1.35) mediată pe stările de vacuum "vacuum expectation value" (VEV), este:

$$\begin{aligned}\overbracket{\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}}(y) &= \langle 0|\overbracket{\hat{\phi}(x)\,\hat{\phi}}(y)|\,0\rangle \\ &= \langle 0|\,T\Big(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\Big)|\,0\rangle - \underbrace{\langle 0|N\Big(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\Big)|\,0\rangle}_{=0} \\ &= \langle 0|\,T\Big(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)\Big)|\,0\rangle \end{aligned} \qquad (1.49)$$

  deoarece VEV pentru un produs normal ordonat de operatori de câmp este egal cu zero (operatorii de anihilare aflaţi la dreapta anihilează starea de vacuum).

- Dar, am văzut (1.44), VEV a produsului temporal ordonat de câmpuri scalare reale este tocmai propagatorul Feynman (1.46) între cele două câmpuri.

- Contracţia unei perechi de operatori dintr-un şir de operatori $\ldots\overbracket{\hat{\phi}(x_1)\ldots\hat{\phi}}(x_2)\ldots$ se introduce pentru a-i putea înlocui cu propagatorul Feynman, fără a schimba ordinea celorlalţi operatori din şir. Adică facem înlocuirea,

$$\overbracket{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}}(y) = \Delta_F(x,y) \qquad (1.50)$$

- Pentru orice şir de operatori de câmp $\hat{\phi}_1 = \hat{\phi}(x_1), \hat{\phi}_2 = \hat{\phi}_(x_2), \ldots$, avem

$$\boxed{T(\hat{\phi}_1\ldots\hat{\phi}_n) = N\Big(\hat{\phi}_1\ldots\hat{\phi}_n\Big) + N\Big(\text{toate contracţiile posibile}\Big)} \qquad (1.51)$$

- Să luăm un exemplu al ecuaţiei (1.51), pentru $n = 4$ operatori, pentru care coordonatele temporale $x_1^0 > x_2^0 > x_3^0 > x_4^0$.

$$\begin{aligned}T(\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3\hat{\phi}_4) = N\Big(&\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3\hat{\phi}_4\Big) \\ &+\overbracket{\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2}N\Big(\hat{\phi}_3\hat{\phi}_4\Big) + \overbracket{\hat{\phi}_1\hat{\phi}_3}N\Big(\hat{\phi}_2\hat{\phi}_4\Big) + \overbracket{\hat{\phi}_1\hat{\phi}_4}N\Big(\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3\Big) \\ &+\overbracket{\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3}N\Big(\hat{\phi}_1\hat{\phi}_4\Big) + \overbracket{\hat{\phi}_2\hat{\phi}_4}N\Big(\hat{\phi}_1\hat{\phi}_3\Big) + \overbracket{\hat{\phi}_3\hat{\phi}_4}N\Big(\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\Big) \\ &+\overbracket{\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2}\overbracket{\hat{\phi}_3\hat{\phi}_4} + \overbracket{\hat{\phi}_1\hat{\phi}_3}\overbracket{\hat{\phi}_2\hat{\phi}_4} + \overbracket{\hat{\phi}_1\hat{\phi}_4}\overbracket{\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3}\end{aligned} \qquad (1.52)$$

Contracţiile sunt coeficienţi complecşi, iar operatorii $\hat{\phi}_i$ sunt ordonaţi normal.
In ordonarea temporală de mai sus avem I-ul termen cu 4 operatori ordonaţi normal, 6 termeni cu câte doi operatori ordonaţi normal şi 3 termeni numere complexe, fără nici un operator.

- Acum, pentru a determina amplitudinea de împrăştiere $\langle f \,|\hat{S}|\, i\rangle$ va trebui să determinăm propagatorul Feynman (1.44) $\Delta_F(x_1 - x_4) = \langle 0\,|T\hat{\phi}_1\,\hat{\phi}_2\,\hat{\phi}_3\,\hat{\phi}_4|\,0\rangle$ luăm ordonarea temporală (1.52) între stările de vacuum. Tinem cont că termenii cu operatori (primii 7) sunt normal ordonaţi, astfel că acţionând cu operatorul de anihilare asupra stării de vacuum obţinem o contribuţie nulă. Singurele contribuţii diferite de zero sunt ale ultimilor 3 termeni, numere complexe. Folosind şi exprimarea (1.50) a contracţiilor prin propagatorii Feynman, avem:

$$\begin{aligned}
\langle 0\,|T(\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3\hat{\phi}_4)|\,0\rangle &= \Big(\overbracket{\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2}\,\overbracket{\hat{\phi}_3\hat{\phi}_4} + \overbracket{\hat{\phi}_1\hat{\phi}_3}\,\overbracket{\hat{\phi}_2\hat{\phi}_4} + \overbracket{\hat{\phi}_1\hat{\phi}_4}\,\overbracket{\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3}\Big)\langle 0|\,0\rangle \\
&= \ \Delta_F(x_1-x_2)\Delta_F(x_3-x_4) \\
&\quad +\Delta_F(x_1-x_3)\Delta_F(x_2-x_4) \\
&\quad +\Delta_F(x_1-x_4)\Delta_F(x_2-x_3) \qquad (1.53)
\end{aligned}$$

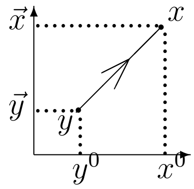
unde am folosit condiţia de normare $\langle 0\,|\,0\rangle = 1$

1.1.9 Propagatorul de particulă $D(x-y)$ pentru câmp scalar complex

- Propagatorul Feynman (1.44) $y \longrightarrow x$ respectiv $D(x-y)$, pentru un câmp scalar complex, ţinând cont de ordonarea temporală a componentelor, este

$$\Delta_F(x,y) = \langle 0 | \hat{\psi}(x)\, \hat{\psi}^\dagger(y) | 0 \rangle = D(x-y) \qquad \text{pentru} \qquad x^0 > y^0 \tag{1.54}$$

- Evaluăm propagatorul (1.47) cu $y \longrightarrow x$, adică $D(x-y)$ pentru $y^0 < x^0$ ce descrie crearea unei particule în y şi anihilarea ei în x, pentru un câmp scalar complex (vezi Figura 1.2).



- Determinăm partea $\hat{\psi}^\dagger(y) | 0 \rangle$ din propagatorul (1.54), cu $\hat{\psi}^\dagger(y)$ de forma (1.27),

$$\hat{\psi}^\dagger(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \Big(\underbrace{\hat{c}_{\vec{p}} | 0 \rangle}_{=0} e^{-ip\cdot y} + \underbrace{\hat{b}^\dagger_{\vec{p}} | 0 \rangle}_{|\vec{p}\rangle} e^{ip\cdot y} \Big) \tag{1.55}$$

Doar componenta de creare a particulei b are contribuţie diferită de zero (deoarece pentru anihilare stare de vacuum $\hat{c}_{\vec{p}} | 0 \rangle = 0$), adică,

$$\hat{\psi}^\dagger(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} |\vec{p}\rangle\, e^{ip\cdot y} \qquad \boxed{\text{crează particula } b \text{ în poziţia } y} \tag{1.56}$$

- Să determinăm acum şi cealaltă parte a propagatorului Feynman (1.54), adică $\langle 0 | \hat{\psi}(x)$, cu câmpul $\hat{\psi}(x)$ (1.26). Practic luăm complex conjugata ecuaţiei (1.55) şi facem permutarea $x \leftrightarrow y$ şi $\hat{p} \leftrightarrow \hat{q}$, având câmpul $\hat{\psi}(x)$ de forma (1.26),

$$\langle 0 | \hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} \Big(\underbrace{\langle 0 | \hat{b}_{\vec{q}}}_{\langle \vec{q} |} e^{-iq\cdot x} + \underbrace{\langle 0 | \hat{c}^\dagger_{\vec{q}}}_{=0} e^{iq\cdot x} \Big) \tag{1.57}$$

Doar componenta de anihilare b are contribuţie diferită de zero (deoarece $\langle 0 | \hat{c}^\dagger_{\vec{q}} = 0$),

$$\langle 0 | \hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} \langle \vec{q} | e^{-iq\cdot x} \qquad \boxed{\text{anihilează particula } b \text{ în poziţia } x} \tag{1.58}$$

- Cu (1.56) şi (1.58), expresia propagatorului Feynman (1.47) pentru $y \longrightarrow x$ este:

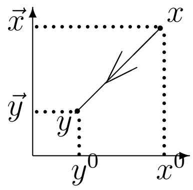
$$\begin{aligned} D(x-y) &= \langle 0 | \hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(y) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}\, 2E_{\vec{q}}}} e^{-iq\cdot x + ip\cdot y}\, \delta^{(3)}(\vec{q}-\vec{p}) \\ &\qquad \text{integrăm după} \quad d^3\vec{q} \quad \text{cu} \quad \delta^{(3)}(\vec{q}-\vec{p}) \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)} \qquad \boxed{\text{propagator particulă } b \ y \longrightarrow x} \end{aligned} \tag{1.59}$$

care exprimă producerea PARTICULEI b în $y \equiv (y^0, \vec{y})$ şi propagarea ei până în $x \equiv (x^0, \vec{x})$, unde este anihilată la momentul x^0 $(x^0 > y^0)$.

1.1.10 Propagatorul de antiparticulă $D(y-x)$ pentru câmp scalar complex

- Propagatorul Feynman (1.44) $x \to y$ respectiv $D(y-x)$, pentru un câmp scalar complex, ţinând cont de ordonarea temporală a componentelor, este

$$\Delta_F(x,y) = \langle 0|\hat{\psi}^\dagger(y)\,\hat{\psi}(x)|\,0\rangle = D(y-x) \qquad \text{pentru} \quad y^0 > x^0 \tag{1.60}$$



- Evaluăm acum şi propagatorul (1.60) cu $x \to y$, adică $D(y-x)$ pentru $x^0 < y^0$ ce descrie crearea unei antiparticule $\bar{c}$ în y şi anihilarea ei în x, pentru un câmp scalar complex (vezi Figura 1.3).
- Pentru aceasta întâi evaluăm $\hat{\psi}(x)|\,0\rangle$,

$$\hat{\psi}(x)|\,0\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\Big(\underbrace{\hat{b}_{\vec{p}}\,|\,0\rangle}_{=0}\,e^{-i\,p\cdot x} + \underbrace{\hat{c}^\dagger_{\vec{p}}\,|\,0\rangle}_{|\vec{p}\rangle}\,e^{i\,p\cdot x}\Big) \tag{1.61}$$

Doar componenta de creare particula c este diferită de zero (deoarece $\hat{b}_{\vec{p}}\,|\,0\rangle = 0$),

$$\hat{\psi}(x)|\,0\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\,|\vec{p}\rangle\,e^{i\,p\cdot x} \qquad \boxed{\text{crează particula } c \text{ în } x} \tag{1.62}$$

- Pentru evaluarea componentei $\langle 0|\hat{\psi}^\dagger(y)$, luăm ecuaţia complex conjugată celei (1.62) şi schimbăm $x \to y$ şi $p \to q$

$$\langle 0|\hat{\psi}^\dagger(y) = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}}\,|\vec{q}\rangle\,e^{-i\,q\cdot y} \qquad \boxed{\text{anihilează particula } c \text{ în } y} \tag{1.63}$$

- Cu (1.62) şi (1.63) expresia propagatorului Feynman invers $D(y-x)$, pentru $x^0 < y^0$, adică evoluţia $x \to y$, asemănător (1.59), este:

$$D(y-x) = \langle 0|\hat{\psi}^\dagger(y)\hat{\psi}(x)|\,0\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\,e^{i\,p\cdot(x-y)}$$

$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\,e^{-i\,p\cdot(y-x)} \qquad \boxed{\begin{array}{l}\text{propagator particula} \quad c \quad x \to y \\ \text{sau antiparticulă} \quad \bar{c} \quad y \to x\end{array}} \tag{1.64}$$

care efectiv exprimă (deoarece avem secvenţa temporală $y^0 < x^0$) producerea unei <u>ANTIPARTICULE</u> $\bar{c}$ în $y \equiv (y^0, \vec{y})$ şi care se propagă în spaţiu şi timp până în $x \equiv (x^0, \vec{x})$, unde este anihilată la momentul ulterior x^0 $(x^0 > y^0)$.

- Cu expresiile (1.59) şi (1.64) luate împreună, am obţinut propagatorul Feynman $\Delta_F(x,y)$ (1.44), care scris cu ajutorul funcţiei $\theta(x<0)=0$ şi $\theta(x\geq 0)=1$, este:

$$\Delta_F(x,y) = \langle 0|T\Big(\hat{\psi}(x)\,\hat{\psi}^\dagger(y)\Big)|\,0\rangle$$

$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\Big[\underbrace{\theta(x^0-y^0)e^{-i\,p\cdot(x-y)}}_{\text{particulă}} + \underbrace{\theta(y^0-x^0)e^{i\,p\cdot(x-y)}}_{\text{antiparticulă}}\Big] \tag{1.65}$$