

**Procese QED în câmpuri laser intense**  
**tema 50**

M. Penția

April 5, 2023

”Verbum sapienti sat est”

# Cuprins

<b>1</b>	<b>Diagrame Feynman de procese QED</b>	<b>4</b>
1.1	Operatorul de împrăștiere $\hat{S}$ în QED	4
1.1.1	Componentele de anihilare și creare ale operatorilor de câmp	6
1.2	Procese QED	12
1.2.1	Imprăștierea foton-electron $\gamma e^-$ (forma scurtă)	13
1.2.2	Imprăștierea foton-pozitron $\gamma e^+$ (forma scurtă)	14
1.2.3	Anihilare perechi $e^+e^-$ (forma scurtă)	15
1.2.4	Producere perechi $e^+e^-$ (forma scurtă)	16
1.2.5	Imprăștiere Møller $e^-e^-$ (forma scurtă)	17
1.2.6	Imprăștiere Møller $e^+e^+$ (forma scurtă)	18
1.2.7	Imprăștiere Bhabha $e^-e^+$ (forma scurtă)	19
1.2.8	Energia proprie electron (forma scurtă)	20
1.2.9	Energia proprie pozitron (forma scurtă)	21
1.2.10	Energia proprie foton (forma scurtă)	22
1.2.11	Energia proprie vacuum (forma scurtă)	23
1.3	Calcul diagrame Feynman pentru amplitudini de ordin doi	24
1.3.1	Imprăștierea foton - electron (forma completă)	24

# Capitol 1

## Diagrame Feynman de procese QED

### 1.1 Operatorul de împrăștiere $\hat{S}$ în QED

Pentru a determina operatorul de împrăștiere  $\hat{S}$ , va trebui întâi să exprimăm Hamiltonian-ul de interacție, pornind de la Lagrangian-ul QED:

$$\mathcal{L}_{QED} = \hat{\bar{\psi}} \left( i\hbar c \gamma^\mu D_\mu - mc^2 \right) \hat{\psi} - \frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} \quad (1.1)$$

unde derivata covariantă  $D_\mu$ , invariantă la transformarea de calibrare  $U(1)$ , este: 
$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \quad (1.2)$$

Inlocuind  $D_\mu$  în  $\mathcal{L}_{QED}$  avem densitatea de Lagrangian, sub formă explicită:

$$\mathcal{L}_{QED} = i\hbar c \hat{\bar{\psi}} \gamma^\mu \partial_\mu \hat{\psi} - e \hat{\bar{\psi}} \underbrace{\gamma^\mu A_\mu}_{\hat{A}} \hat{\psi} - mc^2 \hat{\bar{\psi}} \hat{\psi} - \frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} \quad (1.3)$$

Am introdus notația "slash" pentru 4-vectori 
$$\hat{A} = \gamma^\mu A_\mu \quad (1.4)$$

Astfel, densitatea de Lagrangian de interacție este: 
$$\mathcal{L}'_I = -e \hat{\bar{\psi}} \hat{A} \hat{\psi} \quad (1.5)$$

iar, densitatea de Hamiltonian de interacție este: 
$$\mathcal{H}'_I = e \hat{\bar{\psi}} \hat{A} \hat{\psi} \quad (1.6)$$

- Folosind definiția operatorului  $\hat{S}$ , sub forma dezvoltării Dyson ca sumă de produse de integrale temporal ordonate de Hamiltonieni, putem scrie dezvoltarea  $\hat{S}$ :

$$\hat{S} = T \left[ \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \hat{\mathcal{H}}'_I(x) \right) \right] = T \sum_n \frac{1}{n!} \left( -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \hat{\mathcal{H}}'_I(x) \right)^n \quad (1.7)$$

dezv. Dyson, cu Hamiltonienii și integralele în ordine temporală  $T: x_1^0 > x_2^0 > \dots > x_n^0$

$$= \sum_n \frac{1}{n!} \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n T \left( \hat{\mathcal{H}}'_I(x_1) \hat{\mathcal{H}}'_I(x_2) \dots \hat{\mathcal{H}}'_I(x_n) \right) \quad (1.8)$$

$$= \underbrace{\hat{I}}_{\hat{S}^{(0)}} + \underbrace{\left( -\frac{i}{\hbar} \right) \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \hat{\mathcal{H}}'_I(x_1)}_{\hat{S}^{(1)}} + \underbrace{\left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 T \left( \hat{\mathcal{H}}'_I(x_1) \hat{\mathcal{H}}'_I(x_2) \right)}_{\hat{S}^{(2)}} + \dots \quad (1.9)$$

ceea ce înseamnă integrare pe domenii cuprinse succesiv unul în altul, în ordine temporală

$$= \underbrace{\hat{I}}_{\hat{S}^{(0)}} + \underbrace{\left( -\frac{i}{\hbar} \right) \int_{x_0}^x d^4x_1 \hat{\mathcal{H}}'_I(x_1)}_{\hat{S}^{(1)}} + \underbrace{\left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{x_0}^x d^4x_1 \int_{x_0}^{x_1} d^4x_2 \left( \hat{\mathcal{H}}'_I(x_1) \hat{\mathcal{H}}'_I(x_2) \right)}_{\hat{S}^{(2)}} + \dots \quad (1.10)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{S}^{(n)} \quad (1.11)$$

$\hat{S}^{(n)}$  este termenul ce conține produsul temporal ordonat de  $n$ -Hamiltonieni, luați în poziții spațiu-timp ordonate după  $x_1^0 > x_2^0 > \dots > x_n^0$ , cu timpul  $x_1^0$  cel mai lung, și  $x_n^0$  cel mai recent. Integrările se fac succesiv în ordine inversă:  $dx_n \rightarrow dx_{n-1} \rightarrow \dots dx_1$ .

- Termenul de ordin zero  $\hat{S}^{(0)}$  este operatorul identitate  $\hat{I}$  și nu cere nici o reordonare. Exprimă componenta de împrăștiere înainte. Aceasta este neglijată în calculul mărimilor de interes fizic, ca secțiunea eficace sau probabilitatea de dezintegrare.
- Termenul de ordin întâi  $\hat{S}^{(1)}$ , de un singur Hamiltonian în dezvoltarea (1.8), care acționează prin toți operatorii la același timp  $t_1$ , nu necesită reordonare temporală, iar teorema Wick se reduce la  $T \left\{ (\hat{A} \hat{B} \dots)_{x_1} \right\} = N \left\{ (\hat{A} \hat{B} \dots)_{x_1} \right\}$ .

$$\hat{S}^{(1)} = \frac{-i}{\hbar} \int d^4x_1 \hat{\mathcal{H}}'_I(x_1) = \frac{-i}{\hbar} \int d^4x T \left( e^{\hat{\psi}} \hat{A} \hat{\psi} \right)_x = \frac{-ie}{\hbar} \int d^4x N \left( \hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi} \right)_x \quad (1.12)$$

- Termenul de ordin doi, cu produs de doi Hamiltonieni,  $\hat{S}^{(2)}$  în dezvoltarea (1.9), este:

$$\hat{S}^{(2)} = \frac{1}{2!} \left( \frac{-i}{\hbar} \right)^2 \left( \frac{e}{\hbar c} \right)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 T \left( \overbrace{\left( \hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi} \right)_{x_1}}^{\hat{\mathcal{H}}'(x_1)} \overbrace{\left( \hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi} \right)_{x_2}}^{\hat{\mathcal{H}}'(x_2)} \right) \quad (1.13)$$

- Va trebui să facem ordonarea temporală a produsului de operatori de câmp, cu teorema Wick. Înainte însă, vom analiza componentele fiecăruia din acești operatori de câmp.

### 1.1.1 Componentele de anihilare și creare ale operatorilor de câmp

Să considerăm acum câmpurile cuantice în descrierea de Interacțiune. Matematic acestea sunt descrise prin dezvoltări Fourier de operatori Heisenberg de câmpuri libere, care pentru fotoni și electroni (pozitroni) sunt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_\mu(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \left[ \hat{a}_\lambda(\vec{k}) \underbrace{\epsilon_\mu^\lambda e^{-ik \cdot x}}_{\sim \hat{A}_\mu^-(x)} + \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) \underbrace{\epsilon_\mu^\lambda e^{ik \cdot x}}_{\sim \hat{A}_\mu^+(x)} \right] \\ \hat{\psi}(x) = \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega} \left[ \hat{b}_s(\vec{p}) \underbrace{u_s(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}}_{\sim \hat{\psi}^-(x)} + \hat{c}_s^\dagger(\vec{p}) \underbrace{v_s(\vec{p}) e^{ip \cdot x}}_{\sim \hat{\psi}^+(x)} \right] \\ \hat{\bar{\psi}}(x) = \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega} \left[ \hat{c}_s(\vec{p}) \underbrace{\bar{v}_s(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}}_{\sim \hat{\bar{\psi}}^-(x)} + \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \underbrace{\bar{u}_s(\vec{p}) e^{ip \cdot x}}_{\sim \hat{\bar{\psi}}^+(x)} \right] \end{array} \right. \quad (1.14)$$

operatorul  $\hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k})$  ( $\hat{a}_\lambda(\vec{k})$ ) crează (anihilează) un foton cu impuls  $\vec{k}$ .

In aceste relații, operatorul  $\hat{b}_s^\dagger(\vec{p})$  ( $\hat{b}_s(\vec{p})$ ) crează (anihilează) un electron cu impuls  $\vec{p}$   
operatorul  $\hat{c}_s^\dagger(\vec{p})$  ( $\hat{c}_s(\vec{p})$ ) crează (anihilează) un pozitron cu impuls  $\vec{p}$ .

Deoarece aceste stări sunt caracterizate de un impuls dat, ele sunt stări de undă plană.

Cuantificarea câmpului electromagnetic real conduce la un operator  $\hat{A}_\mu(x)$  hermitic, exprimat prin aceiași operatori de frecvență pozitivă  $\hat{a}_\lambda(\vec{k})$  și frecvență negativă  $\hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k})$ , fotonul fiind și antiparticula lui.

In cazul unui câmp complex, operatorii  $\hat{\psi}(x)$  și  $\hat{\bar{\psi}}(x)$  nu mai sunt hermitici, fiind exprimați prin operatori de creare și anihilare diferiți  $\hat{b}_s(\vec{p})$  și  $\hat{c}_s(\vec{p})$ , pentru electroni și pozitroni.

Dacă am aplica unul din acești operatori (coeficienți Fourier), împreună cu spinorul asociat și factorul de normare, asupra stării de vacuum și apoi am proiecta pe spațiul de coordonate, am obține funcția de undă plană pentru o particulă de acel impuls.

Coeficienții de câmp cuantic se obțin prin transformata Fourier inversă la spațiul de coordonate al acestor operatori de undă plană, de creare (anihilare). De aceea acești operatori au același efect ca atunci când transformata Fourier s-a aplicat pe o poziție dată, în loc de un impuls dat. Exprimăm aceste operații în tabelele de mai jos.

Tabel 1.1: Componente creare/anihilare operatori de câmp fermioni  $\hat{\psi}(x)$  și  $\hat{\bar{\psi}}(x)$  (1.14)

$\hat{\psi}(x) = \hat{\psi}^-(x) + \hat{\psi}^+(x)$	$\hat{\bar{\psi}}(x) = \hat{\bar{\psi}}^-(x) + \hat{\bar{\psi}}^+(x)$
<p style="text-align: center;">anihilare electron în <math>x</math></p> $\hat{\psi}^-(x) = \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega} \hat{b}_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-i p \cdot x}$ <p style="text-align: center;">creare pozitron în <math>x</math></p> $\hat{\psi}^+(x) = \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega} \hat{c}_s^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}) e^{i p \cdot x}$	<p style="text-align: center;">anihilare pozitron în <math>x</math></p> $\hat{\bar{\psi}}^-(x) = \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega} \hat{c}_s(\vec{p}) \bar{v}_s(\vec{p}) e^{-i p \cdot x}$ <p style="text-align: center;">creare electron în <math>x</math></p> $\hat{\bar{\psi}}^+(x) = \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega} \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \bar{u}_s(\vec{p}) e^{i p \cdot x}$

Tabel 1.2: Componente de creare/anihilare operatori  $\hat{A}_\mu(x)$  de câmp EM (1.14)

$\hat{A}_\mu(x) = \hat{A}_\mu^-(x) + \hat{A}_\mu^+(x)$
<p style="text-align: center;">anihilare foton în <math>x</math></p> $\hat{A}_\mu^-(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \epsilon_\mu^\lambda \hat{a}_\lambda(\vec{k}) e^{-i k \cdot x}$ <p style="text-align: center;">creare foton în <math>x</math></p> $\hat{A}_\mu^+(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \epsilon_\mu^\lambda \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) e^{i k \cdot x}$

- Utilizarea operatorilor de mai sus, implică relațiile de comutare și anticomutare ale operatorilor de creare și anihilare.

$$\begin{aligned}
\left[ \hat{a}_\lambda(\vec{k}), \hat{a}_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') \right] &= -(2\pi)^3 2\omega \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\
\left\{ \hat{b}_r(\vec{p}), \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}') \right\} &= (2\pi)^3 \frac{\omega}{m} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{rs} \\
\left\{ \hat{c}_r(\vec{p}), \hat{c}_s^\dagger(\vec{p}') \right\} &= (2\pi)^3 \frac{\omega}{m} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{rs}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Toți ceilalți comutatori (bosonici) sunt nuli, la fel toți ceilalți anticomutatori (fermionici) sunt nuli, și toți comutatorii de operatori fermionici cu operatori bosonici sunt nuli.

**Aplicație - Anihilare stare de electron**

- Să evaluăm relația de anihilare electron:  $\hat{\psi}^-(x)|e^-\rangle$  (1.16)

- Creare stare de electron din vacuum (similar oscilator armonic):  $|e^-\rangle = \hat{b}_s^\dagger(p)|0\rangle$  (1.17)

- Componenta  $\hat{\psi}^-(x)$  cu operatorul de anihilare electron (Tabel 1.1).  $\hat{\psi}^-(x) = \sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega} \hat{b}_s(\vec{k}) u_s(\vec{k}) e^{-ik \cdot x}$

Introducând aceste mărimi în expresia (1.16) pe care dorim să o evaluăm obținem:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^-(x)|e^-\rangle &= \sum_r \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega} \hat{b}_r(\vec{k}) u_r(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} \underbrace{\hat{b}_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle}_{|e^-\rangle} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega} e^{-ik \cdot x} \sum_r u_r(\vec{k}) \underbrace{\hat{b}_r(\vec{k}) \hat{b}_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle} \end{aligned} \quad (1.18)$$

- Rescriem produsul de operatori cu anticomutator:

$$\hat{b}_r(\vec{k}) \hat{b}_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle = \left[ \left\{ \hat{b}_r(\vec{k}), \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \right\} - \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \hat{b}_r(\vec{k}) \right] |0\rangle$$

Ațiunea operatorului de anihilare a stării de vacuum dă zero, rămâne:

$$\hat{b}_r(\vec{k}) \hat{b}_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle = \left\{ \hat{b}_r(\vec{k}), \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \right\} |0\rangle$$

De aceea

$$\hat{\psi}^-(x)|e^-\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega} e^{-ik \cdot x} \sum_r u_r(\vec{k}) \left\{ \hat{b}_r(\vec{k}), \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \right\} |0\rangle \quad (1.19)$$

cu relația de anticomutare din (1.15),

$$\left\{ \hat{b}_r(\vec{k}), \hat{b}_s^\dagger(\vec{p}) \right\} = (2\pi)^3 \frac{\omega}{m} \delta^3(\vec{k} - \vec{p}) \delta_{rs}$$

Inlocuind în (1.19), facem sumarea și apoi integrarea

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^-(x)|e^-\rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega} e^{-ik \cdot x} \sum_r u_r(\vec{k}) (2\pi)^3 \frac{\omega}{m} \delta^3(\vec{k} - \vec{p}) \delta_{rs} |0\rangle \\ &= \int d^3k e^{-ik \cdot x} u_s(\vec{k}) \delta^3(\vec{k} - \vec{p}) |0\rangle = u_s(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} |0\rangle \end{aligned} \quad (1.20)$$

In integrarea  $d^3k$ , factorul de fază temporal  $e^{-i\omega t}$  este dependent de energie, asociată cu  $\vec{p}$ , iar nu cu  $\vec{k}$ , deoarece devine egal cu  $\vec{p}$ , datorită funcției delta. Rezultatul final este:

$$\boxed{\hat{\psi}^-(x)|e^-\rangle = u_s(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} |0\rangle} \quad (1.21)$$



**Aplicație - Anihilare stare de foton**

- Să trecem la evaluarea relației de anihilare foton:  $\hat{A}_\mu^-(x)|\gamma\rangle$  (1.22)

- Creare stare de foton din vacuum (similar oscilator armonic):  $|\gamma\rangle = \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k})|0\rangle$  (1.23)

Ooperatorul  $A_\mu^-(x)$  (Tabel 1.2) este:  $\hat{A}_\mu^-(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega} \epsilon_\mu^\lambda \hat{a}_\lambda(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot x}$

Introducând  $\hat{A}_\mu^-(x)$  în relația dinainte, pe care vrem să o evaluăm, obținem:

$$\hat{A}_\mu^-(x)|\gamma\rangle = \int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2\omega} e^{-i\vec{k}'\cdot x} \epsilon_\mu^{\lambda'} \underbrace{\hat{a}_{\lambda'}(\vec{k}') \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k})}_{|\gamma\rangle} |0\rangle \quad (1.24)$$

La fel ca înainte, pentru ordonarea normală rescriem produsul de operatori de data asta, cu ajutorul comutatorului, ținând apoi cont de acțiunea operatorului de anihilare  $\hat{a}_{\lambda'}|0\rangle = 0$

$$\hat{A}_\mu^-(x)|\gamma\rangle = \int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2\omega} e^{-i\vec{k}'\cdot x} \epsilon_\mu^{\lambda'} [\hat{a}_{\lambda'}(\vec{k}'), \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k})] |0\rangle \quad (1.25)$$

relația de comutare (1.15):  $[\hat{a}_\lambda(\vec{k}), \hat{a}_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}')] = -(2\pi)^3 2\omega \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$

$$\begin{aligned} \text{atunci} \quad \hat{A}_\mu^-(x)|\gamma\rangle &= - \int d^3\vec{k}' e^{-i\vec{k}'\cdot x} \epsilon_\mu^{\lambda'} \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) |0\rangle \\ &= - \epsilon_\mu^{\lambda'} \delta_{\lambda\lambda'} e^{-i\vec{k}\cdot x} |0\rangle \end{aligned} \quad (1.26)$$

Dacă luăm  $|\gamma\rangle$  ca o stare transversală, atunci termenii cu operator de anihilare longitudinal și temporal (din suma după  $\lambda'$  din  $A_\mu^-(x)$ ), va anihila starea  $|\gamma\rangle$ , și de aceea, acești termeni vor dispărea din sumă. Ca urmare, suma după  $\lambda'$  se va reduce la o sumă de doi termeni, unde indicii din simbolul delta Kronecker sunt acum pentru două dimensiuni. Această trecere la delta Kronecker cu două dimensiuni înseamnă de asemenea că indicii superior și inferior sunt identici și pot fi interschimbați. Ca urmare putem face imediat suma după  $\lambda'$ :

$$\hat{A}_\mu^-(x)|\gamma\rangle = \epsilon_\mu^{\lambda'} \delta_{\lambda\lambda'} e^{-i\vec{k}\cdot x} |0\rangle = \epsilon_\mu^\lambda e^{-i\vec{k}\cdot x} |0\rangle$$

Atunci, obținem:  $\hat{A}_\mu^-(x)|\gamma\rangle = \epsilon_\mu^\lambda e^{-i\vec{k}\cdot x} |0\rangle$  (1.27)

- In concluzie, cele două relații căutate sunt:

$$\boxed{\hat{A}_\mu^-(x)|\gamma\rangle = \epsilon_\mu^\lambda e^{-i\vec{k}\cdot x} |0\rangle} \quad \boxed{\hat{\psi}^-(x)|e^-\rangle = u_s(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\cdot x} |0\rangle} \quad (1.28)$$

• **Ordonarea temporală:**  $T(\hat{\psi}(x_1)\hat{\bar{\psi}}(x_2))$

Dacă  $t_1 > t_2$ : primul operează  $\hat{\bar{\psi}}(x_2)$  (1.14) (cu componenta  $\hat{b}^\dagger$  crează o particulă), va fi plasat la dreapta, iar  $\hat{\psi}(x_1)$  operează ulterior (cu componenta  $\hat{b}$  anihilează particula), va fi plasat la stânga:  $\hat{\psi}(x_1)\hat{\bar{\psi}}(x_2)|0\rangle$ .

$\implies$  pentru  $t_1 > t_2$  (particulă)  $T(\hat{\psi}(x_1)\hat{\bar{\psi}}(x_2)) = \hat{\psi}(x_1)\hat{\bar{\psi}}(x_2)$  Fig. 1.1 a)

Dacă  $t_2 > t_1$ : primul operează  $\hat{\psi}(x_1)$  (1.14) (cu componenta  $\hat{c}^\dagger$  crează o antiparticulă), va fi plasat la dreapta, iar  $\hat{\bar{\psi}}(x_2)$  operează ulterior (cu componenta  $\hat{c}$  anihilează antiparticula), va fi plasat la stânga:  $\hat{\bar{\psi}}(x_2)\hat{\psi}(x_1)|0\rangle$  echivalent cu  $\langle 0|\hat{\psi}(x_1)\hat{\bar{\psi}}(x_2)$

$\implies$  pentru  $t_1 < t_2$  (antiparticulă)  $T(\hat{\psi}(x_1)\hat{\bar{\psi}}(x_2)) = \hat{\bar{\psi}}(x_2)\hat{\psi}(x_1)$  Fig. 1.1 b)

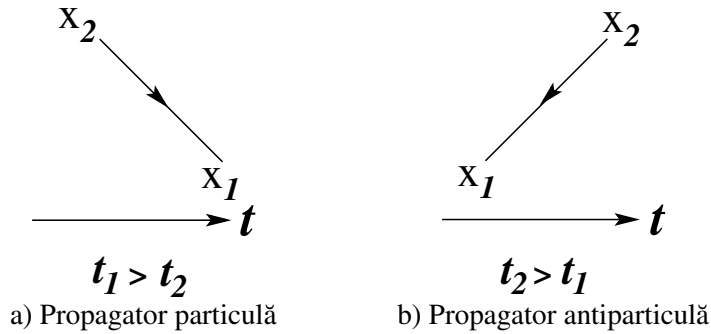


Figura 1.1: Propagatori - ordonare temporală

• **Ordonarea normală - Teorema Wick**

Teorema Wick transformă un produs de operatori ordonați temporal într-o sumă de termeni produs de operatori ordonați normal (cu cei de anihilare la dreapta) conținând factori multiplicativi de contracție.

- Să exprimăm, cu ajutorul teoremei Wick, termenul  $\hat{S}^{(2)}$  (1.13) al operatorului  $\hat{S}$  (1.7), cu ordonările temporale transformate în ordonări normale plus toate contracțiile posibile.

$$\begin{aligned}
 \hat{S}^{(2)} = & -\frac{1}{2!} \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 T \left( \overbrace{(\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_1}}^{\hat{\mathcal{H}}'(x_1)} \overbrace{(\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_2}}^{\hat{\mathcal{H}}'(x_2)} \right) = -\frac{1}{2!} \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \iint d^4x_1 d^4x_2 \times \\
 & \left( \begin{aligned}
 & N \left[ (\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_1} (\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_2} \right] + \\
 & + N \left[ \overbrace{(\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_1} (\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_2}}^{\text{contracția} = 0} \right] + N \left[ \overbrace{(\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_1} (\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_2}}^{\text{contracția} = 0} \right] + N \left[ \overbrace{(\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_1} (\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_2}}^{\text{contracția} = 0} \right] + \\
 & + N \left[ \overbrace{(\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_1} (\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_2}}^{\text{contracția} = 0} \right] + \left( \text{și ceilalți termeni cu o singură contracție} = 0 \right) + \\
 & + N \left[ \overbrace{(\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_1} (\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_2}}^{\text{contracția} = 0} \right] + N \left[ \overbrace{(\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_1} (\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_2}}^{\text{contracția} = 0} \right] + N \left[ \overbrace{(\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_1} (\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_2}}^{\text{contracția} = 0} \right] + \\
 & + \left( \text{ceilalți termeni cu cel puțin una din două contracții} = 0 \right) + \\
 & + N \left[ \overbrace{(\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_1} (\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})_{x_2}}^{\text{contracțiile} = 0} \right] + \left( \text{termeni cu contracțiile} = 0 \right)
 \end{aligned} \right) \quad (1.29)
 \end{aligned}$$

In cazul de față, contracțiile se referă la VEV pentru produsul de câte două câmpuri cuantice, iar acestea exprimă propagatorul:

$$\begin{aligned}
 \overbrace{\hat{A}_{\mu x_1} \hat{A}_{\nu x_2}} & = \langle 0 | \hat{A}_{\mu x_1} \hat{A}_{\nu x_2} | 0 \rangle = D_{\mu\nu}^F(x_1 - x_2) \\
 \overbrace{\hat{\psi}_{x_1} \hat{\psi}_{x_2}} & = \langle 0 | \hat{\psi}_{x_1} \hat{\psi}_{x_2} | 0 \rangle = iS_F(x_1 - x_2)
 \end{aligned} \quad (1.30)$$

## 1.2 Procese QED

PROCES	INTERACTIA	ELEMENT MATRICE $\hat{S}$
Imprăștiere foton-electron $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$ Imprăștiere foton-pozitron $\gamma + e^+ \rightarrow \gamma + e^+$		$\langle \gamma, e^-   \hat{S}   \gamma, e^- \rangle$ $\langle \gamma, e^+   \hat{S}   \gamma, e^+ \rangle$
Anihilare perechi $e^+e^-$ $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$		$\langle \gamma, \gamma   \hat{S}   e^-, e^+ \rangle$
Producere perechi $e^+e^-$ $\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$		$\langle e^-, e^+   \hat{S}   \gamma, \gamma \rangle$
Imprăștierea Møller $e^-$ $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$ Imprăștierea Møller $e^+$ $e^+ + e^+ \rightarrow e^+ + e^+$		$\langle e^-, e^-   \hat{S}   e^-, e^- \rangle$ $\langle e^+, e^+   \hat{S}   e^+, e^+ \rangle$
Imprăștierea Bhabha $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$		$\langle e^-, e^+   \hat{S}   e^-, e^+ \rangle$
Energie proprie electron $e^- \rightarrow e^-$ Energie proprie pozitron $e^+ \rightarrow e^+$		$\langle e^-   \hat{S}   e^- \rangle$ $\langle e^+   \hat{S}   e^+ \rangle$
Energie proprie foton $\gamma \rightarrow \gamma$		$\langle \gamma   \hat{S}   \gamma \rangle$
Energie vacuum Vacuum $\rightarrow$ Vacuum		$\langle 0   \hat{S}   0 \rangle$

### 1.2.1 Imprăștierea foton-electron $\gamma e^-$ (forma scurtă)

- Imprăștierea foton-electron  $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$  este descrisă de elementele de matrice  $\hat{S}_{ge}^{(2)}$  cu un singur comutator, de forma (1.13).

$$\hat{S}_{ge}^{(2)} = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 N \left( \underbrace{\hat{\psi}_{x_1} \hat{A}_{x_1} \hat{\psi}_{x_2} \hat{A}_{x_2}}_{iS_F(x_1-x_2)} \hat{\psi}_{x_2} \right) \quad (1.31)$$

unde trebuie să folosim componentele operatorului de creare/anihilare electroni  $\hat{\psi}^\pm$  și creare/anihilare fotoni  $\hat{A}^\pm$ , vezi expresiile (1.14).

- Amplitudinea de împrăștiere  $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$  se compune din:

$$\langle \gamma, e^- | \hat{S}_{ge}^{(2)} | \gamma, e^- \rangle = \langle \gamma, e^- | \hat{S}_A | \gamma, e^- \rangle + \langle \gamma, e^- | \hat{S}_B | \gamma, e^- \rangle \quad (1.32)$$

- Folosind componentele corespunzătoare de creare/anihilare din  $\hat{\psi}(x)$ ,  $\hat{\bar{\psi}}(x)$  și  $\hat{A}_\mu(x)$  (1.14), pag.6, explicitate în Tabel 1.1, pag.7, avem:

$$\hat{S}_A = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 N \left[ \begin{array}{cccccc} \text{crea.} & \text{crea.} & & & \text{anih.} & \text{anih.} \\ e^- & \gamma' & & & \gamma & e^- \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow \\ \left( \hat{\psi}_{x_1}^+ \right) & \left( \hat{A}_{x_1}^+ \right) & \underbrace{\left( \hat{\psi}_{x_1}^- \right) \left( \hat{\psi}_{x_2}^+ \right)}_{iS_F(x_1-x_2)} & \left( \hat{A}_{x_2}^- \right) & \left( \hat{\psi}_{x_2}^- \right) & \end{array} \right] \quad (1.33)$$

$$\hat{S}_B = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 N \left[ \begin{array}{cccccc} \text{crea.} & \text{anih.} & & & \text{crea.} & \text{anih.} \\ e^- & \gamma & & & \gamma' & e^- \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow \\ \left( \hat{\psi}_{x_1}^+ \right) & \left( \hat{A}_{x_1}^- \right) & \underbrace{\left( \hat{\psi}_{x_1}^- \right) \left( \hat{\psi}_{x_2}^+ \right)}_{iS_F(x_1-x_2)} & \left( \hat{A}_{x_2}^+ \right) & \left( \hat{\psi}_{x_2}^- \right) & \end{array} \right] \quad (1.34)$$

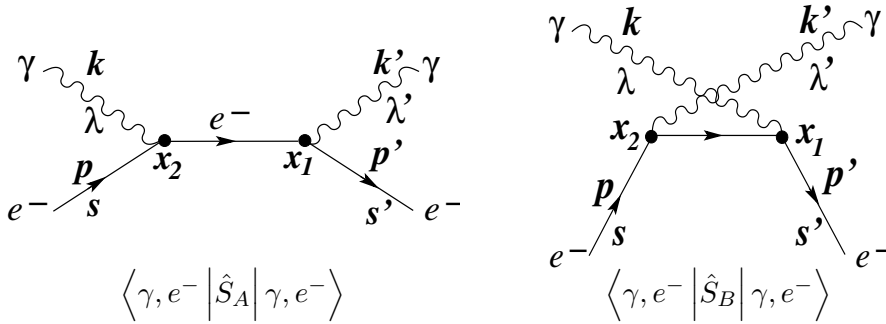


Figura 1.2: Diagramele Feynman de împrăștiere  $\gamma e^-$  cu un propagator

- Final (vezi detalii în continuare pag.24), matricea de împrăștiere foton - electron este:

$$\langle \gamma, e^- | \hat{S}_{ge}^{(2)} | \gamma, e^- \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p+k-p'-k') \mathcal{M}_{fi}$$

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{fi}^A + \mathcal{M}_{fi}^B \\ \mathcal{M}_{fi}^A = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}_{\lambda'} iS_F(p+k) \not{\epsilon}_\lambda u_s(\vec{p}) \\ \mathcal{M}_{fi}^B = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}_{\lambda'} iS_F(p-k') \not{\epsilon}_\lambda u_s(\vec{p}) \end{cases} \quad (1.35)$$

### 1.2.2 Imprăștierea foton-pozitron $\gamma e^+$ (forma scurtă)

- Imprăștierea foton-pozitron  $\gamma e^+ \rightarrow \gamma e^+$  este descrisă de elementele de matrice  $\hat{S}_{ge}^{(2)}$  cu un singur comutator,

$$\hat{S}_{gp}^{(2)} = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 N \left( \hat{\psi}_{x_1} \hat{A}_{x_1} \underbrace{\overleftarrow{\hat{\psi}}_{x_1} \overrightarrow{\hat{\psi}}_{x_2}}_{iS_F(x_1-x_2)} \hat{A}_{x_2} \hat{\psi}_{x_2} \right) \quad (1.36)$$

unde trebuie să folosim componentele operatorului de creare/anihilare pozitroni  $\hat{\psi}^\pm$  și creare/anihilare fotoni  $\hat{A}^\pm$ , vezi expresiile (1.14).

- Amplitudinea de împrăștiere  $\gamma e^+ \rightarrow \gamma e^+$  se compune din:

$$\langle \gamma, e^+ | \hat{S}_{gp}^{(2)} | \gamma, e^+ \rangle = \langle \gamma, e^+ | \hat{S}_A | \gamma, e^+ \rangle + \langle \gamma, e^+ | \hat{S}_B | \gamma, e^+ \rangle \quad (1.37)$$

- Folosind componentele corespunzătoare de creare/anihilare din  $\hat{\psi}(x)$ ,  $\overleftarrow{\hat{\psi}}(x)$  și  $\hat{A}_\mu(x)$  (1.14), pag.6, explicitate în Tabel 1.1, pag.7, avem:

$$\hat{S}_A = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 N \left[ \begin{array}{cccc} \text{crea. } e^+ & \text{crea. } \gamma' & & \text{anilh. } \gamma & \text{anilh. } e^+ \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ (\hat{\psi}_{x_1}^+) & (\hat{A}_{x_1}^+) & \underbrace{(\overleftarrow{\hat{\psi}}_{x_1}^-) (\overrightarrow{\hat{\psi}}_{x_2}^+)}_{iS_F(x_1-x_2)} & (\hat{A}_{x_2}^-) & (\overleftarrow{\hat{\psi}}_{x_2}^-) \end{array} \right] \quad (1.38)$$

$$\hat{S}_B = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 N \left[ \begin{array}{cccc} \text{crea. } e^+ & \text{anilh. } \gamma & & \text{crea. } \gamma' & \text{anilh. } e^+ \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ (\hat{\psi}_{x_1}^+) & (\hat{A}_{x_1}^-) & \underbrace{(\overleftarrow{\hat{\psi}}_{x_1}^-) (\overrightarrow{\hat{\psi}}_{x_2}^+)}_{iS_F(x_1-x_2)} & (\hat{A}_{x_2}^+) & (\overleftarrow{\hat{\psi}}_{x_2}^-) \end{array} \right] \quad (1.39)$$

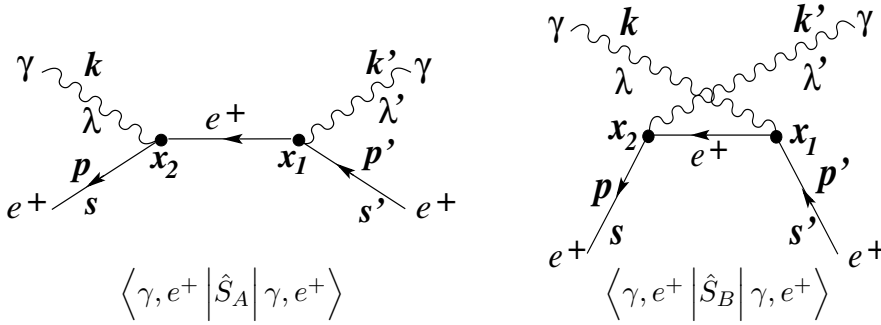


Figura 1.3: Diagramele Feynman de împrăștiere  $\gamma e^+$  cu un propagator

- Final (vezi detalii în continuare) matricea de împrăștiere foton - pozitron este:

$$\langle \gamma, e^+ | \hat{S}_{gp}^{(2)} | \gamma, e^+ \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p+k-p'-k') \mathcal{M}_{fi} \begin{cases} \mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{fi}^A + \mathcal{M}_{fi}^B \\ \mathcal{M}_{fi}^A = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \bar{v}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}_{\lambda'} iS_F(p+k) \not{\epsilon}_\lambda v_s(\vec{p}') \\ \mathcal{M}_{fi}^B = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \bar{v}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}_{\lambda'} iS_F(p-k') \not{\epsilon}_\lambda v_s(\vec{p}') \end{cases} \quad (1.40)$$

**1.2.3 Anihilare perechi  $e^+e^-$  (forma scurtă)**

- Procesul de anihilare  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$  este descris de aceleași elemente de matrice  $\hat{S}_{ap}^{(2)}$  cu un singur comutator, de forma (1.13).

$$\hat{S}_{ap}^{(2)} = \frac{(-ie/\hbar)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N \left( \hat{\psi}_{x_1} \hat{A}_{x_1} \underbrace{\hat{\psi}_{x_1} \hat{\psi}_{x_2}}_{iS_F(x_1-x_2)} \hat{A}_{x_2} \hat{\psi}_{x_2} \right) \quad (1.41)$$

- Amplitudinea procesului  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$  este:  $\langle \gamma, \gamma | \hat{S}_{ap}^{(2)} | e^-, e^+ \rangle$
- Folosind componentele corespunzătoare de creare/anihilare din  $\hat{\psi}(x)$ ,  $\hat{\bar{\psi}}(x)$  și  $\hat{A}(x)$  (1.14), pag.6, explicitate în Tabel 1.1, pag.7, avem:

$$\hat{S}_{ap}^{(2)} = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N \left[ \begin{array}{cccccc} \text{anih.} & \text{crea.} & & & \text{crea.} & \text{anih.} \\ e^- & \gamma & & & \gamma & e^+ \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow \\ \left( \hat{\psi}_{x_1}^- \right) & \left( \hat{A}_{x_1}^+ \right) & \underbrace{\left( \hat{\psi}_{x_1}^- \right) \left( \hat{\psi}_{x_2}^+ \right)}_{iS_F(x_1-x_2)} & & \left( \hat{A}_{x_2}^+ \right) & \left( \hat{\psi}_{x_2}^- \right) \end{array} \right]$$

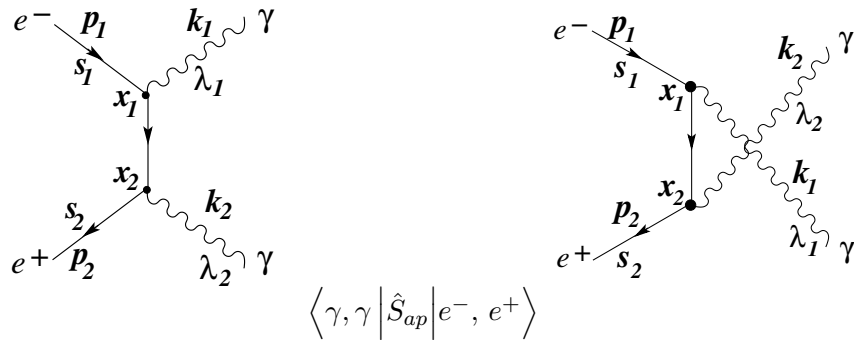


Figura 1.4: Diagramele Feynman de anihilare perechi  $e^+e^-$  cu un propagator

### 1.2.4 Producere perechi $e^+e^-$ (forma scurtă)

- Procesul de producere perechi  $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$  este descris de aceleași elemente de matrice  $\hat{S}_{pp}^{(2)}$  cu un singur comutator, de forma (1.13).

$$\hat{S}_{pp}^{(2)} = \frac{(-ie/\hbar)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N \left[ \hat{\psi}_{x_1} \hat{A}_{x_1} \underbrace{\left( \hat{\psi}_{x_1} \right) \left( \hat{\psi}_{x_2} \right)}_{iS_F(x_1-x_2)} \hat{A}_{x_2} \hat{\psi}_{x_2} \right] \quad (1.42)$$

- Amplitudinea procesului  $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$  este:  $\langle e^-, e^+ | \hat{S}_{pp}^{(2)} | \gamma, \gamma \rangle$
- Folosind componentele corespunzătoare de creare/anihilare din  $\hat{\psi}(x)$ ,  $\hat{\bar{\psi}}(x)$  și  $\hat{A}(x)$  (1.14), pag.6, explicitate în Tabel 1.1, pag.7, avem:

$$\hat{S}_{pp}^{(2)} = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N \left[ \underbrace{\left( \hat{\bar{\psi}}_{x_1}^+ \right) \left( \hat{A}_{x_1}^- \right)}_{\text{crea. anih.}} \underbrace{\left( \hat{\psi}_{x_1}^- \right) \left( \hat{\psi}_{x_2}^+ \right)}_{iS_F(x_1-x_2)} \underbrace{\left( \hat{A}_{x_2}^- \right) \left( \hat{\psi}_{x_2}^+ \right)}_{\text{anih. crea.}} \right]$$

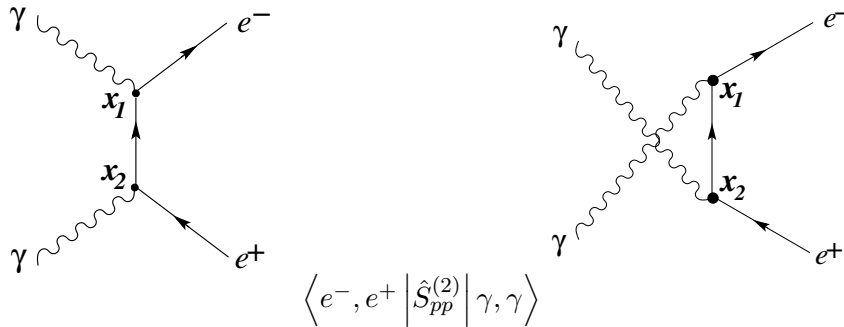


Figura 1.5: Diagramele Feynman de producere perechi  $e^-e^+$  cu un propagator



### 1.2.5 Împrăștiere Møller $e^-e^-$ (forma scurtă)

- Procesul de împrăștiere  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$  este descris de aceleași elemente de matrice  $\hat{S}_{mse}^{(2)}$  cu un singur comutator, de forma (1.13).

$$\hat{S}_{mse}^{(2)} = \frac{(-ie/\hbar)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N \left( \hat{\psi}_{x_1} \hat{\psi}_{x_1} \underbrace{\hat{A}_{x_1} \hat{A}_{x_2}}_{D_F(x_1-x_2)} \hat{\psi}_{x_2} \hat{\psi}_{x_2} \right) \quad (1.43)$$

- Amplitudinea procesului  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$  este  $\langle e^-, e^- | \hat{S}_{mse}^{(2)} | e^-, e^- \rangle$
- Folosind componentele corespunzătoare de creare/anihilare din  $\hat{\psi}(x)$  și  $\hat{\bar{\psi}}(x)$  (1.14), pag.6, explicitate în Tabel 1.1, pag.7, avem:

$$\hat{S}_{mse}^{(2)} = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N \left[ \begin{array}{c} \text{crea.} \quad \text{anih.} \\ e^- \quad e^- \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \left( \hat{\psi}_{x_1}^+ \right) \left( \hat{\psi}_{x_1}^- \right) \end{array} \underbrace{\left( \hat{A}_{x_1}^- \right) \left( \hat{A}_{x_2}^+ \right)}_{D_F(x_1-x_2)} \begin{array}{c} \text{crea.} \quad \text{anih.} \\ e^- \quad e^- \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \left( \hat{\psi}_{x_2}^+ \right) \left( \hat{\psi}_{x_2}^- \right) \end{array} \right]$$

- În împrăștierea Møller avem o situație în care atât particulele incidente cât și cele emergente sunt particule identice. De aceea, avem patru diagrame Feynman diferite, asociate cu termenul  $\hat{S}^{(2)}$ . În calculul amplitudinii procesului avem nevoie tot de patru termeni. Dar vom vedea că două perechi sunt identice tocmai din motivul simetriei între particulele incidente și cele emergente. De aici rezultă că avem doar două diagrame diferite care pot fi asociate cu elementul de matrice. Cele două diagrame diferă doar prin interschimbarea celor două particule, vezi Fig. 1.6.

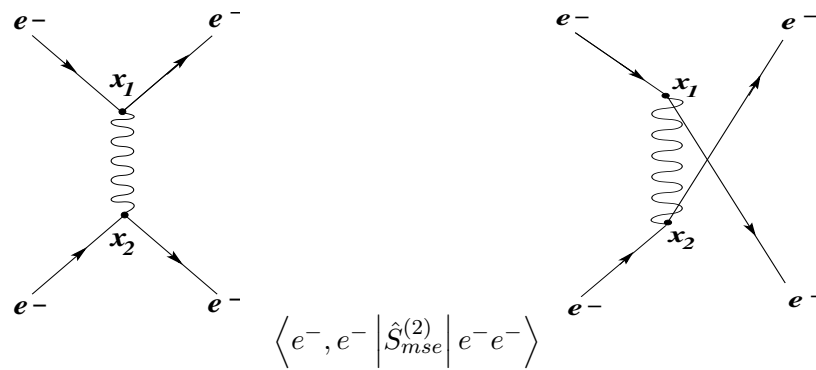


Figura 1.6: Diagramele Feynman de împrăștiere Møller  $e^-e^-$  cu un propagator

- Evaluarea în continuare a amplitudinii observăm că doi termeni ce urmează a fi sumați au semne diferite. Aceasta rezultă din proprietatea de anticomutativitate a operatorilor fermionici de creare și anihilare. În cazul bosonilor nu avem această situație, deoarece operatorii corespunzători în cazul bosonilor comută.

### 1.2.6 Împrăștiere Møller $e^+e^+$ (forma scurtă)

- Procesul de împrăștiere  $e^+e^+ \rightarrow e^+e^+$  este descris de aceleași elemente de matrice  $\hat{S}_{mp}^{(2)}$  cu un singur comutator, de forma (1.13).

$$\hat{S}_{msp}^{(2)} = \frac{(-ie/\hbar)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N\left(\hat{\psi}_{x_1} \hat{\psi}_{x_1} D_F(x_1-x_2) \hat{\psi}_{x_2} \hat{\psi}_{x_2}\right) \quad (1.44)$$

- Amplitudinea procesului  $e^+e^+ \rightarrow e^+e^+$  este  $\langle e^+, e^+ | \hat{S}_{msp}^{(2)} | e^+, e^+ \rangle$
- Folosind componentele corespunzătoare de creare/anihilare din  $\hat{\psi}(x)$  și  $\hat{\bar{\psi}}(x)$  (1.14), pag.6, explicitate în Tabel 1.1, pag.7, avem:

$$\hat{S}_{MS}^{(2)} = -\left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N\left[\begin{array}{cc} \text{crea.} & \text{anih.} \\ e^+ & e^+ \\ \downarrow & \downarrow \\ (\hat{\psi}_{x_1}^+) & (\hat{\bar{\psi}}_{x_1}^-) \end{array} \underbrace{(\hat{A}_{x_1}^-)(\hat{A}_{x_2}^+)}_{D_F(x_1-x_2)} \begin{array}{cc} \text{crea.} & \text{anih.} \\ e^+ & e^+ \\ \downarrow & \downarrow \\ (\hat{\psi}_{x_2}^+) & (\hat{\bar{\psi}}_{x_2}^-) \end{array}\right]$$

- În împrăștierea Møller avem o situație în care atât particulele incidente cât și cele emergente sunt particule identice. Cele două diagrame diferă doar prin interschimbarea celor două particule, vezi Fig. 1.7.

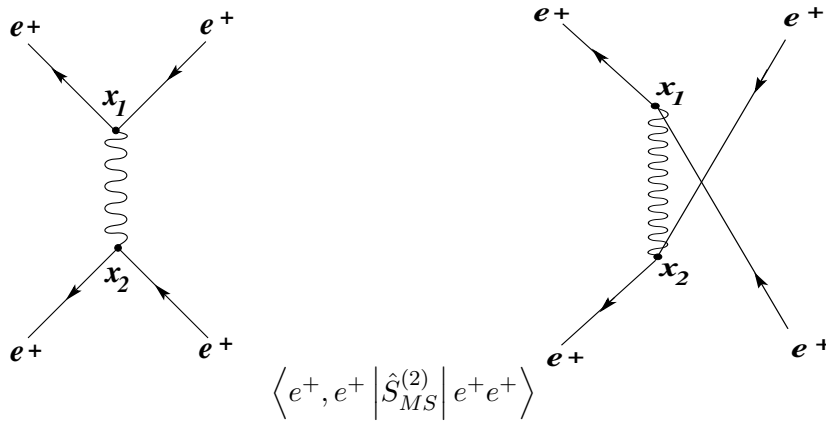


Figura 1.7: Diagramele Feynman de împrăștiere Møller  $e^+e^+$  cu un propagator

- Evaluarea în continuare a amplitudinii observăm că doi termeni ce urmează a fi sumați au semne diferite. Aceasta rezultă din proprietatea de anticomutativitate a operatorilor fermionici de creare și anihilare. În cazul bosonilor nu avem această situație, deoarece operatorii corespunzători în cazul bosonilor comută.

### 1.2.7 Împrăștiere Bhabha $e^-e^+$ (forma scurtă)

- Procesul de împrăștiere  $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$  este descris de aceleași elemente de matrice  $\hat{S}_{be}^{(2)}$  cu un singur comutator, de forma (1.13).

$$\hat{S}_{bs}^{(2)} = \frac{(-ie/\hbar)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N\left(\hat{\psi}_{x_1} \hat{\psi}_{x_1} D_F(x_1-x_2) \hat{\psi}_{x_2} \hat{\psi}_{x_2}\right) \quad (1.45)$$

- Amplitudinea de împrăștiere  $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$  se compune din:

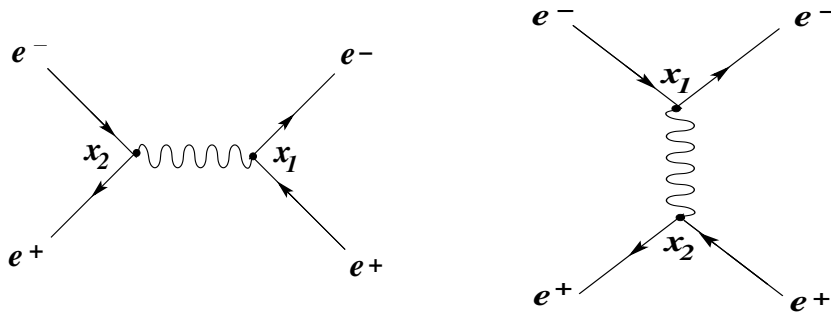
$$\langle e^-, e^+ | \hat{S}_{bs}^{(2)} | e^-, e^+ \rangle = \langle e^-, e^+ | \hat{S}_A | e^-, e^+ \rangle + \langle e^-, e^+ | \hat{S}_B | e^-, e^+ \rangle \quad (1.46)$$

- Folosind componentele corespunzătoare de creare/anihilare din  $\hat{\psi}(x)$  și  $\hat{\bar{\psi}}(x)$  (1.14), pag.6, explicitate în Tabel 1.1, pag.7, avem:

$$\hat{S}_A = - \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N \left[ \begin{array}{cccc} \text{crea.} & \text{crea.} & & \text{anih.} & \text{anih.} \\ e^- & e^+ & & e^+ & e^- \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \left(\hat{\psi}_{x_1}^+\right) & \left(\hat{\psi}_{x_1}^+\right) & \underbrace{\left(\hat{A}_{x_1}^-\right) \left(\hat{A}_{x_2}^+\right)}_{D_F(x_1-x_2)} & \left(\hat{\psi}_{x_2}^-\right) & \left(\hat{\psi}_{x_2}^-\right) \end{array} \right]$$

$$\hat{S}_B = - \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N \left[ \begin{array}{cccc} \text{anih.} & \text{crea.} & & \text{crea.} & \text{anih.} \\ e^- & e^- & & e^+ & e^+ \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \left(\hat{\psi}_{x_1}^-\right) & \left(\hat{\psi}_{x_1}^+\right) & \underbrace{\left(\hat{A}_{x_1}^-\right) \left(\hat{A}_{x_2}^+\right)}_{D_F(x_1-x_2)} & \left(\hat{\psi}_{x_2}^+\right) & \left(\hat{\psi}_{x_2}^-\right) \end{array} \right]$$

- În împrăștierea Bhabha avem două diagrame diferite, vezi Fig. 1.8.



$$\langle e^-, e^+ | \hat{S}_A | e^-, e^+ \rangle + \langle e^-, e^+ | \hat{S}_B | e^-, e^+ \rangle$$

Figura 1.8: Diagramele Feynman de împrăștiere Bhabha  $e^-e^+$  cu un propagator

### 1.2.8 Energia proprie electron (forma scurtă)

- Procesul de autointeracție al electronului este descris de aceleași elemente de matrice  $\hat{S}_{see}^{(2)}$  cu un singur comutator, de forma (1.13).

$$\hat{S}_{see}^{(2)} = -\frac{1}{2!} \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N \left[ \underbrace{\hat{\psi}_{x_1} \hat{\psi}_{x_1}}_{iS_F(x_1-x_2)} \underbrace{\hat{\psi}_{x_2} \hat{A}_{x_2}^- \hat{A}_{x_2}^+}_{D_F(x_1-x_2)} \hat{\psi}_{x_2} \right] \quad (1.47)$$

- Amplitudinea procesului  $e^- \rightarrow e^-$  este :  $\langle e^- | \hat{S}_{see} | e^- \rangle$
- Folosind componentele corespunzătoare de creare/anihilare din  $\hat{\psi}(x)$  și  $\hat{\bar{\psi}}(x)$  (1.14), pag.6, explicitate în Tabel 1.1, pag.7, avem:

$$\hat{S}_{see}^{(2)} = \frac{(-ie/\hbar)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N \left[ \overset{\text{crea.}}{e^-} \downarrow \left( \hat{\psi}_{x_1}^+ \right) \underbrace{\left( \hat{\psi}_{x_1}^- \right) \left( \hat{\psi}_{x_2}^+ \right)}_{iS_F(x_1-x_2)} \underbrace{\left( \hat{A}_{x_1}^- \right) \left( \hat{A}_{x_2}^+ \right)}_{D_F(x_1-x_2)} \overset{\text{anih.}}{e^-} \downarrow \left( \hat{\bar{\psi}}_{x_2}^- \right) \right]$$

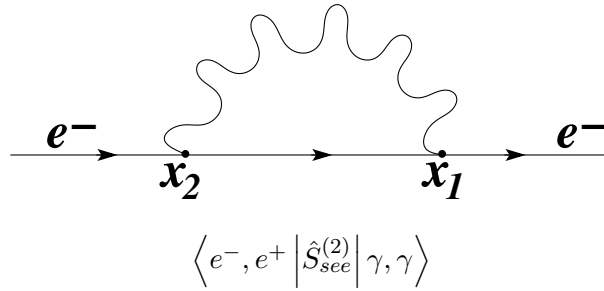


Figura 1.9: Diagrama Feynman de energie proprie  $e^-$

**1.2.9 Energia proprie pozitron (forma scurtă)**

- Procesul de autointeracție al pozitronului este descris de aceleași elemente de matrice  $\hat{S}_{sep}^{(2)}$  cu un singur comutator, de forma (1.13), dar folosind alte componente de creare/anihilare din  $\hat{\psi}(x)$  și  $\hat{\bar{\psi}}(x)$  (1.14), pag.6.

$$\hat{S}_{sep}^{(2)} = -\frac{1}{2!} \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N \left[ \underbrace{\hat{\psi}_{x_1} \hat{\psi}_{x_2}}_{iS_F(x_1-x_2)} \underbrace{\hat{A}_{x_1}^- \hat{A}_{x_2}^+}_{D_F(x_1-x_2)} \hat{\psi}_{x_2} \right] \quad (1.48)$$

- Amplitudinea procesului  $e^+ \rightarrow e^+$  este:  $\langle e^+ | \hat{S}_{sep} | e^+ \rangle$
- Folosind componentele corespunzătoare de creare/anihilare din  $\hat{\psi}(x)$  și  $\hat{\bar{\psi}}(x)$  (1.14), pag.6, explicitate în Tabel 1.1, pag.7, avem:

$$\hat{S}_{sep}^{(2)} = \frac{(-ie/\hbar)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N \left[ \overset{\text{crea. } e^+}{\downarrow} \left( \hat{\psi}_{x_1}^+ \right) \underbrace{\left( \hat{\psi}_{x_1}^- \right) \left( \hat{\psi}_{x_2}^+ \right)}_{iS_F(x_1-x_2)} \underbrace{\left( \hat{A}_{x_1}^- \right) \left( \hat{A}_{x_2}^+ \right)}_{D_F(x_1-x_2)} \overset{\text{anih. } e^+}{\downarrow} \left( \hat{\bar{\psi}}_{x_2}^- \right) \right]$$

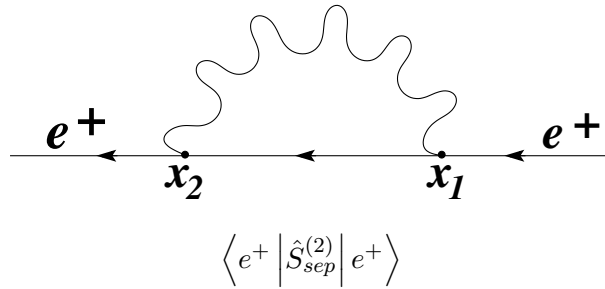


Figura 1.10: Diagrama Feynman de energie proprie  $e^+$

### 1.2.10 Energia proprie foton (forma scurtă)

- Procesul de autointeracție al fotonului este descris de aceleași elemente de matrice  $\hat{S}_{ep}^{(2)}$ , folosind componentele de creare/anihilare din  $\hat{A}(x)$  (1.14), pag.6.

$$\hat{S}_{seg}^{(2)} = \frac{(-ie/\hbar)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N \left( Tr \left[ \underbrace{\hat{\psi}_{x_1}^- \hat{\psi}_{x_2}^+}_{iS_F(x_1-x_2)} \underbrace{\hat{\psi}_{x_1}^+ \hat{\psi}_{x_2}^-}_{iS_F(x_1-x_2)} \right] \right) \quad (1.49)$$

- Amplitudinea procesului  $\gamma \rightarrow \gamma$  este:  $\langle \gamma | \hat{S}_{seg} | \gamma \rangle$
- Folosind componentele corespunzătoare de creare/anihilare din  $\hat{A}(x)$  (1.14), pag.6, explicitate în Tabel 1.2, pag.7, avem:

$$\hat{S}_{seg}^{(2)} = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N \left( Tr \left[ \underbrace{\left( \hat{\psi}_{x_1}^- \right) \left( \hat{\psi}_{x_2}^+ \right)}_{iS_F(x_1-x_2)} \overset{\text{crea.}}{\downarrow \gamma} \hat{A}_{x_1}^+ \underbrace{\left( \hat{\psi}_{x_1}^+ \right) \left( \hat{\psi}_{x_2}^- \right)}_{iS_F(x_1-x_2)} \overset{\text{anih.}}{\downarrow \gamma} \hat{A}_{x_2}^- \right] \right) \quad (1.50)$$

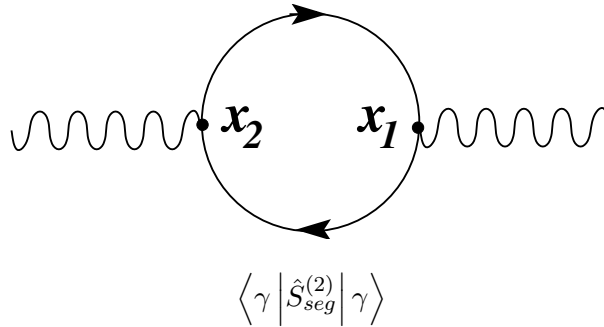


Figura 1.11: Diagrama Feynman de energie proprie foton  $\gamma$

**1.2.11 Energia proprie vacuum (forma scurtă)**

- Procesul fluctuațiilor de vacuum este descris de aceleași elemente de matrice  $\hat{S}_{sev}^{(2)}$  cu un singur comutator, de forma (1.13),

$$\hat{S}_{sev}^{(2)} = \frac{(-ie/\hbar)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N \left( Tr \left[ \underbrace{\hat{\psi}_{x_2}^- \hat{\psi}_{x_1}^+}_{iS_F(x_2-x_1)} \underbrace{\hat{\psi}_{x_1}^- \hat{\psi}_{x_2}^+}_{iS_F(x_1-x_2)} \underbrace{\hat{A}_{x_1}^- \hat{A}_{x_2}^+}_{D_F(x_1-x_2)} \right] \right) \quad (1.51)$$

- Amplitudinea procesului  $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$  este:  $\langle 0 | \hat{S}_{sev}^{(2)} | 0 \rangle$

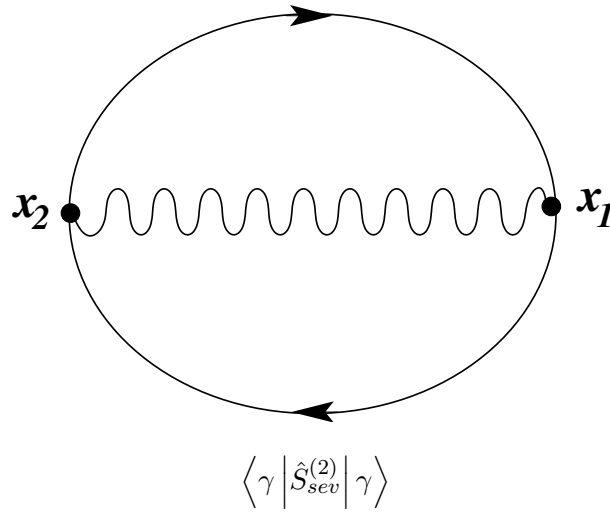


Figura 1.12: Diagrama Feynman de energie proprie a stării de vacuum.

### 1.3 Calcul diagrame Feynman pentru amplitudini de ordin doi

#### 1.3.1 Imprăștierea foton - electron (forma completă)

- Vom trece să calculăm în detaliu relațiile amplitudinilor de probabilitate ce rezultă din evaluarea elementelor de matrice  $\hat{S}$  cu ajutorul diagramei Feynman.
- Imprăștierea foton-electron  $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$  este descrisă de elementele de matrice cu un singur comutator de tip (1.13) pag.5.
- Amplitudinea de împrăștiere este:

$$\underbrace{\langle \gamma, e^- |}_{\text{stare finală}} \hat{S}_{ge}^{(2)} \underbrace{|\gamma, e^- \rangle}_{\text{stare inițială}} = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle \gamma, e^- | \underbrace{(\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})(\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})}_{\text{diagramă Feynman}} | \gamma, e^- \rangle \quad (1.52)$$

Aceasta se compune din două elemente de matricea  $\hat{S}$  (vezi (1.32)):

$$\langle \gamma, e^- | \hat{S}_{ge}^{(2)} | \gamma, e^- \rangle = \langle \gamma, e^- | \hat{S}_A | \gamma, e^- \rangle + \langle \gamma, e^- | \hat{S}_B | \gamma, e^- \rangle$$

prezentate în cele două diagrame Feynman din Fig.1.13.

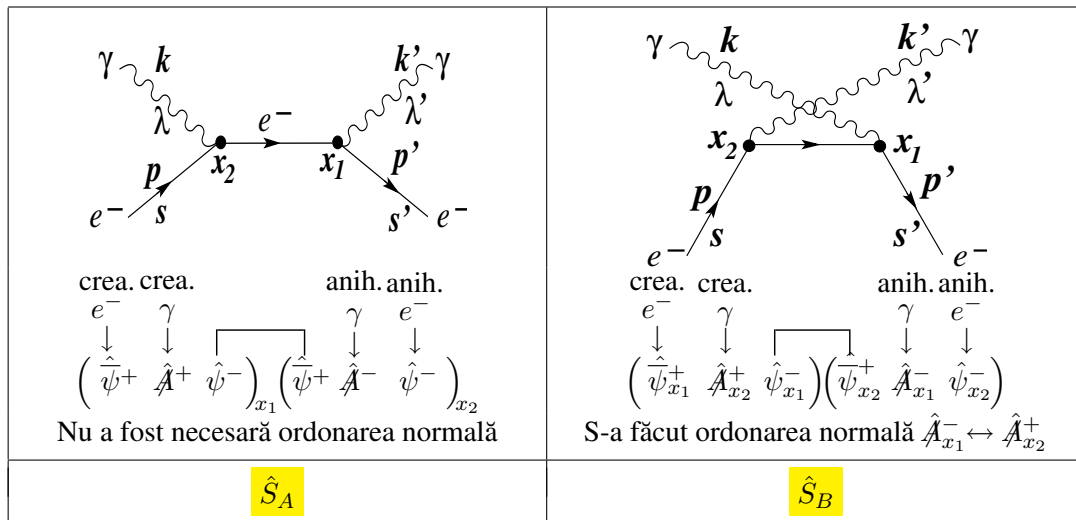


Figura 1.13: Diagramele Feynman de împrăștiere  $\gamma e^-$  de tip  $(\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})(\hat{\psi} \hat{A} \hat{\psi})$

- Cu expresiile  $\hat{S}_A$  (1.33) și  $\hat{S}_B$  (1.34), obținute din diagramele Feynman din Fig.1.13, cu ordonarea normală a operatorilor de câmp, elementul de matrice  $\hat{S}_{ge}^{(2)}$  devine:

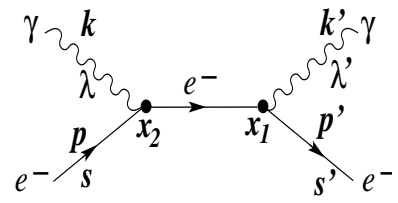


$$\begin{aligned}
\langle \gamma, e^- | \hat{S}_{ge}^{(2)} | \gamma, e^- \rangle &= \langle \gamma, e^- | \hat{S}_A | \gamma, e^- \rangle + \langle \gamma, e^- | \hat{S}_B | \gamma, e^- \rangle = \\
&= - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 \times \langle \gamma, e^- | \left[ \left( \overset{\text{crea.}}{\downarrow} \hat{\psi}_{x_1}^+ \right) \left( \overset{\text{crea.}}{\downarrow} \hat{A}_{x_1}^+ \right) \overbrace{\left( \hat{\psi}_{x_1}^- \right) \left( \hat{\psi}_{x_2}^+ \right)}^{iS_F(x_1-x_2)} \left( \overset{\text{anih.}}{\downarrow} \hat{A}_{x_2}^- \right) \left( \overset{\text{anih.}}{\downarrow} \hat{\psi}_{x_2}^- \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \overset{\text{crea.}}{\downarrow} \hat{\psi}_{x_1}^+ \right) \left( \overset{\text{anih.}}{\downarrow} \hat{A}_{x_1}^- \right) \overbrace{\left( \hat{\psi}_{x_1}^- \right) \left( \hat{\psi}_{x_2}^+ \right)}^{iS_F(x_1-x_2)} \left( \overset{\text{crea.}}{\downarrow} \hat{A}_{x_2}^+ \right) \left( \overset{\text{anih.}}{\downarrow} \hat{\psi}_{x_2}^- \right) \right] | \gamma, e^- \rangle
\end{aligned} \tag{1.53}$$

- Să trecem întâi la calculul detaliat al matricii  $\langle f | \hat{S}_A | i \rangle$  (primul termen din (1.53)), cu componenta de matrice  $\hat{S}_A$ :

$$\hat{S}_A = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 N \left( \overset{\text{crea.}}{\downarrow} \hat{\psi}_{x_1}^+ \right) \left( \overset{\text{crea.}}{\downarrow} \hat{A}_{x_1}^+ \right) \overbrace{\left( \hat{\psi}_{x_1}^- \right) \left( \hat{\psi}_{x_2}^+ \right)}^{iS_F(x_1-x_2)} \left( \overset{\text{anih.}}{\downarrow} \hat{A}_{x_2}^- \right) \left( \overset{\text{anih.}}{\downarrow} \hat{\psi}_{x_2}^- \right)$$

- In expresia de mai sus putem omite ordonarea normală  $N$ , deoarece termenii sunt deja ordonați normal.



$$\begin{aligned}
\langle \gamma, e^- | \hat{S}_A | \gamma, e^- \rangle &= - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 \times \\
&\quad \times \langle \gamma, e^- | \left( \overset{\text{crea.}}{\downarrow} \hat{\psi}_{x_1}^+ \right) \left( \overset{\text{crea.}}{\downarrow} \hat{A}_{x_1}^+ \right) \overbrace{\left( \hat{\psi}_{x_1}^- \right) \left( \hat{\psi}_{x_2}^+ \right)}^{iS_F(x_1-x_2)} \left( \overset{\text{anih.}}{\downarrow} \hat{A}_{x_2}^- \right) \left( \overset{\text{anih.}}{\downarrow} \hat{\psi}_{x_2}^- \right) | \gamma, e^- \rangle
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Folosim componentele de câmp de anihilare electron, anihilare foton și cele hermitic conjugate (1.28),

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_{x_2}^- | \gamma, e^- \rangle &= u_s(\vec{p}) e^{-i p \cdot x_2} | \gamma, 0 \rangle \xrightarrow{hc} \langle \gamma, e^- | \hat{\psi}_{x_1}^+ = \langle \gamma, 0 | e^{i p' \cdot x_1} \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \\
\hat{A}_{x_2}^- | \gamma, e^- \rangle &= \epsilon^\lambda e^{-i k \cdot x_2} | 0, e^- \rangle \xrightarrow{hc} \langle \gamma, e^- | \hat{A}_{x_1}^+ = \langle 0, e^- | \epsilon^{\lambda'} e^{i k' \cdot x_1}
\end{aligned} \tag{1.55}$$

precum și contracția scrisă prin propagator, care, în spațiul de 4-impulsuri  $q$ , se exprimă prin Transformata Fourier a acestuia, sub forma:

$$\begin{aligned}
\overbrace{\left( \hat{\psi}_{x_1}^- \right) \left( \hat{\psi}_{x_2}^+ \right)} &= i S_F(x_2 - x_1) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 q \left( i S_F(q) \right) e^{-i q \cdot (x_1 - x_2)} \\
(\text{sau cu propagatorul } x_2 < x_1) &= \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{q}}} e^{-i q \cdot (x_1 - x_2)}
\end{aligned}$$

Atunci, ultimul rând din (1.54) se poate scrie sub forma:

$$\times \left\langle 0, 0 \left| \underbrace{\begin{array}{c} \langle \gamma, e^- | \hat{\psi}_{x_1}^+ \rangle \quad \langle \gamma, e^- | \hat{A}_{x_1}^+ \rangle \quad \overbrace{\hat{\psi}_{x_1}^- \hat{\psi}_{x_2}^+} \\ \langle \hat{A}_{x_2}^- | \gamma, e^- \rangle \quad \langle \psi_{x_2}^- | \gamma, e^- \rangle \end{array}}_{\text{număr}} \right| 0, 0 \right\rangle$$

Acesta este un număr complex în general, iar  $\langle 0, 0 | 0, 0 \rangle = 1$ , atunci expresia de mai sus devine:

$$\begin{aligned} & \times \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}^{\lambda'} \left[ \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 q \left( iS_F(q) \right) e^{i q \cdot (x_1 - x_2)} \right] \not{\epsilon}^\lambda u_s(\vec{p}) e^{-i(p+k) \cdot x_2} e^{-i(-p'-k') \cdot x_1} \\ & = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 q e^{-i(p+k-q) \cdot x_2} e^{-i(-p'-k'+q) \cdot x_1} \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}^{\lambda'} \left( iS_F(q) \right) \not{\epsilon}^\lambda u_s(\vec{p}) \end{aligned}$$

- Inlocuind ultimul rând din (1.54) și efectuând integrările după  $d^4 x_1$  și  $d^4 x_2$  ce duc la funcții  $\delta$ , apoi integrarea după  $d^4 q$ , obținem:

$$\begin{aligned} \langle \gamma, e^- | \hat{S}_A | \gamma, e^- \rangle & = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 \times \\ & \times \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-i(p+k-q) \cdot x_2} e^{-i(-p'-k'+q) \cdot x_1} \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}^{\lambda'} \left( iS_F(q) \right) \not{\epsilon}^\lambda u_s(\vec{p}) \\ & = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \overbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p+k-q)}^{x_2} \overbrace{(2\pi)^4 \delta^4(-p'-k'+q)}^{x_1} \underbrace{\bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}^{\lambda'} \left( iS_F(q) \right) \not{\epsilon}^\lambda u_s(\vec{p})} \\ & = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4 q (2\pi)^4 \underbrace{\delta^4(p+k-q)}_{q=p+k} \delta^4(-p'-k'+q) \underbrace{\bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}^{\lambda'} \left( iS_F(q) \right) \not{\epsilon}^\lambda u_s(\vec{p})} \\ & = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 (2\pi)^4 \delta^4(-p'-k'+p+k) \underbrace{\bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}^{\lambda'} \left( iS_F(p+k) \right) \not{\epsilon}^\lambda u_s(\vec{p})} \end{aligned}$$

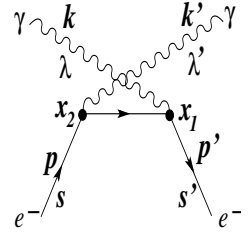
Aceasta conduce la amplitudinea de împrăștiere  $\langle f | \hat{S}_A | i \rangle$  exprimată prin amplitudinea invariantă  $\mathcal{M}_{fi}^A$  de mai jos.

$$\begin{cases} \langle \gamma, e^- | \hat{S}_A | \gamma, e^- \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p+k-p'-k') \mathcal{M}_{fi}^A \\ \mathcal{M}_{fi}^A = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}_{\lambda'} iS_F(p+k) \not{\epsilon}_\lambda u_s(\vec{p}) \end{cases} \quad (1.56)$$

- Să trecem acum la termenul pentru  $\hat{S}_B$  din (1.32) |  $\langle \gamma_{\vec{k}', \lambda'}, e_{\vec{p}', s'}^- | \hat{S}_B | \gamma_{\vec{k}, \lambda}, e_{\vec{p}, s}^- \rangle$

- Folosind componentele corespunzătoare de creare/anihilare din  $\hat{\psi}(x)$ ,  $\hat{\bar{\psi}}(x)$  și  $\hat{A}(x)$  (1.14), exprimăm operatorul celei de-a doua componente ( $\hat{S}_B$ ) de împrăștiere  $(\gamma, e^-)$  (1.34) din (1.32):

$$\hat{S}_B = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N \left( \begin{array}{ccc} \text{crea. anih.} & & \text{crea. anih.} \\ e^- & \gamma & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \hat{\bar{\psi}}^+ & \hat{A}^- & \hat{\psi}^- \end{array} \right)_{x_1} \left( \begin{array}{ccc} & & \\ \hat{\psi}^+ & \hat{A}^+ & \hat{\psi}^- \end{array} \right)_{x_2}$$



- Să trecem la calculul detaliat al matricii  $\langle \gamma, e^- | \hat{S}_B | \gamma, e^- \rangle$  din amplitudinea (1.32), pentru tranziția de la starea  $|\gamma, e^- \rangle \rightarrow \langle \gamma, e^- |$ .

$$\langle \gamma, e^- | \hat{S}_B | \gamma, e^- \rangle = \text{urmează să facem ordonarea normală}$$

$$\begin{aligned} &= - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle \gamma, e^- | \left( \hat{\bar{\psi}}^+_{x_1} \right) \left( \hat{A}^-_{x_1} \right) \left( \hat{\psi}^-_{x_1} \right) \left( \hat{\bar{\psi}}^+_{x_2} \right) \left( \hat{A}^+_{x_2} \right) \left( \hat{\psi}^-_{x_2} \right) | \gamma, e^- \rangle \quad (1.57) \\ &= - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle \gamma, e^- | \left( \hat{\bar{\psi}}^+_{x_1} \right) \left( \hat{A}^+_{x_2} \right) \left( \hat{\psi}^-_{x_1} \right) \left( \hat{\bar{\psi}}^+_{x_2} \right) \left( \hat{A}^-_{x_1} \right) \left( \hat{\psi}^-_{x_2} \right) | \gamma, e^- \rangle \end{aligned}$$

precum și propagatorul sub forma  $iS_F(x_2 - x_1) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}$

Folosind acțiunea operatorilor de câmp (1.55), amplitudinea (1.57) devine:

$$\langle \gamma, e^- | \hat{S}_B | \gamma, e^- \rangle = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 0, 0 | \left( \begin{array}{ccc} \langle 0, e^- | \hat{\bar{\psi}}^+_{x_1} & \langle \gamma, 0 | \hat{A}^+_{x_2} & \hat{\psi}^-_{x_1} \hat{\bar{\psi}}^+_{x_2} \\ e^{ip' \cdot x_1} \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}_{\lambda'} e^{ik' \cdot x_2} & & \\ \hat{A}^-_{x_1} | \gamma, 0 \rangle & \hat{\psi}^-_{x_2} | 0, e^- \rangle & \\ \not{\epsilon}_{\lambda} e^{-ik \cdot x_1} & u_s(\vec{p}) e^{-ip \cdot x_2} & \end{array} \right) | 0, 0 \rangle \quad (1.58)$$

In (1.58) nu mai avem operatori. Folosind normarea  $\langle 0, 0 | 0, 0 \rangle = 1$  a stării de vacuum,

$$\langle \gamma, e^- | \hat{S}_B | \gamma, e^- \rangle = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ip' \cdot x_1} \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}_{\lambda'} e^{ik' \cdot x_2} \hat{\psi}^-_{x_1} \hat{\bar{\psi}}^+_{x_2} u_s(\vec{p}) e^{-ip \cdot x_2} \not{\epsilon}_{\lambda} e^{-ik \cdot x_1} \quad (1.59)$$

Relația este un număr complex. Dacă explicităm și contracția  $\hat{\psi}^-_{x_1} \hat{\bar{\psi}}^+_{x_2} = iS_F(x_2 - x_1)$  prin propagatorul  $iS_F(x_2 - x_1)$ , ținem cont că avem polarizarea transversală a fotonilor, astfel că indicele de polarizare  $\lambda$  poate fi plasat atât jos cât și sus,

$$\langle \gamma, e^- | \hat{S}_B | \gamma, e^- \rangle = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}_{\lambda'} iS_F(x_2 - x_1) \not{\epsilon}_{\lambda} u_s(\vec{p}) e^{-i(p-k') \cdot x_2} e^{-i(k-p') \cdot x_1} \quad (1.60)$$

Acum putem scrie propagatorul  $iS_F(x_2-x_1)$  dependent de 4-impulsul  $q$ , folosind transformata Fourier a acestuia, atunci,

$$\begin{aligned}
& \langle \gamma, e^- \left| \hat{S}_B \right| \gamma, e^- \rangle = \\
& = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}_{\lambda'} \overbrace{\left[ \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 q \left( iS_F(q) \right) e^{-i q \cdot (x_1 - x_2)} \right]}^{iS_F(x_2-x_1)} \not{\epsilon}_{\lambda} u_s(\vec{p}) \\
& \quad \times e^{-i(p-k') \cdot x_2} e^{-i(k-p') \cdot x_1} \\
& = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-i(p-k'-q) \cdot x_2} e^{-i(k-p'+q) \cdot x_1} \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}_{\lambda'} \left( iS_F(q) \right) \not{\epsilon}_{\lambda} u_s(\vec{p}) \\
& \text{facem integrările } d^4 x_1 \text{ și } d^4 x_2. \text{ Acestea dau funcțiile } \delta^4 \\
& = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \overbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p-k'-q)}^{a} \overbrace{(2\pi)^4 \delta^4(k-p'+q)}^{f(x)} \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}_{\lambda'} \left( iS_F(q) \right) \not{\epsilon}_{\lambda} u_s(\vec{p}) \\
& = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \int d^4 q (2\pi)^4 \underbrace{\delta^4(p-k'-q)}_{\text{conserv. în } x_2} \underbrace{\delta^4(k-p'+q)}_{\text{conserv. în } x_1} \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}_{\lambda'} \left( iS_F(q) \right) \not{\epsilon}_{\lambda} u_s(\vec{p})
\end{aligned} \tag{1.61}$$

Folosim funcția  $\delta$  și efectuând integrarea după  $d^4 q$ , pentru  $q = p - k'$ , obținem:

$$\int d^4 q \underbrace{\delta^4(p-k'-q)}_{\Rightarrow q=p-k'} \overbrace{\delta^4(k-p'+q)}^{f(x)} iS_F(q) = \delta^4(k-p'+p-k') iS_F(p-k')$$

- Amplitudinea de tranziție devine,

$$\langle \gamma, e^- \left| \hat{S}_B \right| \gamma, e^- \rangle = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 (2\pi)^4 \delta^4(k-p'+p-k') \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}_{\lambda'} iS_F(p-k') \not{\epsilon}_{\lambda} u_s(\vec{p}) \tag{1.62}$$

- Amplitudinea  $\left\{ \begin{array}{l} \langle \gamma, e^- \left| \hat{S}_B \right| \gamma, e^- \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k-p'+p-k') \mathcal{M}_{fi}^A \\ \langle f \left| \hat{S}_B \right| i \rangle \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_{fi}^A = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}_{\lambda'} iS_F(p-k') \not{\epsilon}_{\lambda} u_s(\vec{p}) \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{1.63}$

- Final, matricea de împrăștiere foton - electron (1.32) pag. 13 este:

$$\begin{aligned}
& \langle \gamma_{\vec{k}', \lambda'}, e_{\vec{p}', s'}^- \left| \hat{S}_{ge}^{(2)} \right| \gamma_{\vec{k}, \lambda}, e_{\vec{p}, s}^- \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p+k-p'-k') \mathcal{M}_{fi} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{fi}^A + \mathcal{M}_{fi}^B \\ \mathcal{M}_{fi}^A = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}_{\lambda'} iS_F(p+k) \not{\epsilon}_{\lambda} u_s(\vec{p}) \\ \mathcal{M}_{fi}^B = - \left( \frac{e}{\hbar} \right)^2 \bar{u}_{s'}(\vec{p}') \not{\epsilon}_{\lambda'} iS_F(p-k') \not{\epsilon}_{\lambda} u_s(\vec{p}) \end{array} \right. \tag{1.64}
\end{aligned}$$