

Capitolul 1

Ecuatia Planck - spectrul EM al corpului negru

1.1 Emisia și absorbția radiației EM de un corp negru

La începutul secolului XX Rayleigh și Jeans au încercat o explicație teoretică a distribuției spectrale a radiației unui corp negru, pe baza principiului clasic al echipartiției statistice a energiei pe gradele de libertate. Conform acestuia, “gazul fonic”, în echilibru termic la temperatura T , are o distribuție de energie kT (k constanta Boltzmann) pe fiecare grad de libertate, indiferent de forma și compoziția corpului negru.

Să vedem raționamentul ce a condus la distribuția Rayleigh-Jeans.

Considerăm întâi un corp negru, care absoarbe toate radiațiile incidente. Ca model de corp negru se poate alege o cavitate închisă (vezi Fig.1.1a), cu pereți ce absorb radiația incidentă aproape 100%. Practic după câteva reflexii radiația ajunge să fie total absorbită în interiorul cavității.

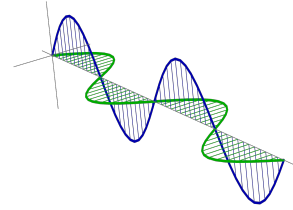


Figura 1.1: Model de corp negru - cavitate cu orificiu de intrare și ieșire radiație EM.
a. Absorbția integrală a radiației incidente, cu creșterea temperaturii corpului negru.
b. La echilibru termic, la o temperatură T dată, corpul negru emite un spectru de radiații EM caracteristic, determinat exclusiv de valoarea acestei temperaturi.

În urma absorbției, corpul negru se încălzește și începe să emită radiații cu un spectru caracteristic (vezi Fig. 1.1b), care poate fi măsurat în exterior.

1.2 Undele electromagnetice in cutie

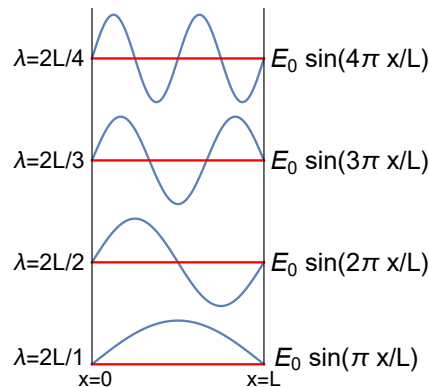
Undele electromagnetice, cu fiecare din cele două componente, electrică și magnetică, vezi Figura alăturată, satisfac ecuația de propagare a undelor.



Pentru componenta electrică, $\left| \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right.$ cu soluția: $E = E_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$ (1.1)

Orice radiație (undă) EM dintr-o cutie se poate descompune în unde spațiale staționare pe cele trei direcții independente (grade de libertate).

In interiorul cutiei se vor afla doar undele sub formă staționară, ca moduri de oscilație discrete, având λ_i ce se anulează la margini. Celelalte, nestaționare, dispar prin interferență. Deci, aflate într-o cutie 1-dim, undele electromagnetice nu pot lua orice valori de lungime de undă λ sau frecvență $\nu = c/\lambda$. Adică, pentru a nu interfera distructiv și a se obține unde staționare, se impune condiția de anulare la margine, unde vor prezenta noduri de oscilație (vezi Fig. alăturată).



In cazul 1-dim | $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ cu soluția: $E = E_0 \sin(kx - \omega t)$ (1.2)

unde $k = 2\pi/\lambda$ - vector de undă, $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{c}{\lambda}$ - pulsația

Condiția de anulare la margine ($x=L$) | $\sin k_n L = 0$ sau $\boxed{k_n L = n\pi}$ (1.3)

Soluțiile spațiale permise au $k_n = n\pi/L$ unde $k_n = 2\pi/\lambda_n$ | sau $\boxed{\lambda_n = 2L/n}$ (1.4)

adică pe lungimea $L = n \frac{\lambda_n}{2}$ avem un numar întreg de $\frac{\lambda_n}{2}$, iar $\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L}$ ($n=1, 2, \dots$)

In concluzie: frecvențele ν_n sunt cuantificate, fiind un număr întreg n de frecvențe fundamentale $\nu_0 = c/2L$, caracteristică dimensiunii L a cutiei. Atunci, avem

modurile de oscilație permise: $E = E_0 \sin k_n x = E_0 \sin \frac{n\pi x}{L}$ (vezi Figura de mai sus)

Inlocuind soluția în ecuația undelor (1.2), obținem | $k^2 = \frac{1}{c^2} \omega^2$ (1.5)

Inlocuind în (1.5) $k_n = n\pi/L$ și $\omega_n = 2\pi \frac{c}{\lambda_n}$, | $n^2 = \frac{4L^2}{\lambda_n^2}$ (1.6)

1.2.1 Modurile posibile de oscilație în cutie

Să evaluăm numărul modurilor de oscilație EM posibile în interiorul cutiei, ca numărul de grade de libertate de oscilație a undelor EM.

În final, căutăm energia EM din cutie, prin sumarea energiilor modurilor de oscilație.

Considerăm întâi cazul 1-dim al unei “cutii” de-a lungul direcției X , discutat anterior. Pentru a avea unde staționare, va trebui să avem moduri de oscilație ce prezintă noduri la margine, adică să aibe un număr întreg de $\lambda_x/2$ pe lungimea L (vezi (1.4)):

$$\lambda_x = \frac{2L}{n_x} \quad (n_x = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.7)$$

Cazul 2-dim al compunerii undelor staționare independente care vor conduce la unde (oscilații) permise în cutie, este prezentată în Fig.1.2.1. Aici se compun două moduri 1-dim, unul cu $n_x = 3$ pe direcția X și celălalt cu $n_y = 2$ pe direcția Y . Liniile ce unesc nodurile celor două moduri de oscilație, indică fronturile unei rezultante și dau proiecția lungimilor de undă λ_x și λ_y pe direcția de propagare, unde se compun coerent și formează unda rezultantă λ .

Pe de o parte $\lambda = \lambda_x \cos \alpha$ și $\lambda = \lambda_y \cos \beta$ cu $\beta = \pi/2 - \alpha \implies \lambda = \lambda_y \sin \alpha$. Atunci,

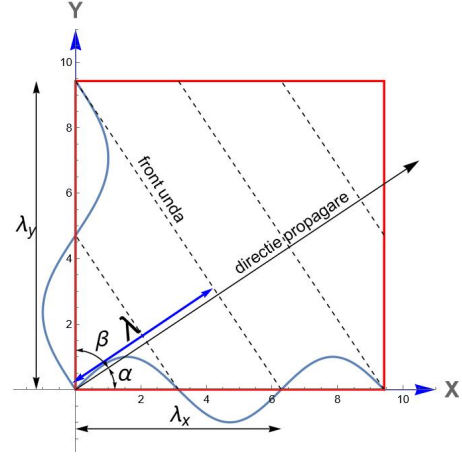
$$n_x^2 + n_y^2 = \left(\frac{2L}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{2L}{\lambda_y}\right)^2 = \left(\frac{2L \cos \alpha}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2L \cos \beta}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 (\underbrace{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}_{=1}) = \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2$$


Figura 1.2: Compunerea a două unde staționare cu $n_x = 3$ pe X și $n_y = 2$ pe Y .

În cazul 3-dim al cutiei noastre, aceasta are dimensiunea L suficient de mare față de lungimile de undă λ ale radiațiilor EM emise și absorbite. În acest fel, radiația se va afla integral în interiorul cutiei: $L \gg \lambda$. Aici însă, avem un nou grad de libertate, cel de oscilație pe direcția Z , cu proiecția corespunzătoare pe direcția de propagare. Astfel, similar (1.7), avem n_x , n_y și n_z moduri de oscilație posibile, cu lungimile de undă corespunzătoare:

$$\lambda_x = \frac{2L}{n_x}, \quad \lambda_y = \frac{2L}{n_y} \quad \text{și} \quad \lambda_z = \frac{2L}{n_z} \quad (n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.8)$$

Deci, lungimea de undă λ rezultantă se compune din proiecțiile lungimilor de undă ale celor trei moduri 1-dim independente de oscilație, pe direcția de propagare:

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_x \cos \alpha & \lambda \leq \lambda_x \\ \lambda = \lambda_y \cos \beta & \lambda \leq \lambda_y \\ \lambda = \lambda_z \cos \gamma & \lambda \leq \lambda_z \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\text{Din (1.8) avem,} \quad n_x = \frac{L}{\lambda_x/2}, \quad n_y = \frac{L}{\lambda_y/2}, \quad n_z = \frac{L}{\lambda_z/2}$$

unde înlocuim λ_x , λ_y și λ_z din (1.9), obținem,

$$n_x = \frac{2L \cos \alpha}{\lambda}, \quad n_y = \frac{2L \cos \beta}{\lambda}, \quad n_z = \frac{2L \cos \gamma}{\lambda} \quad (1.10)$$

Dacă le ridicăm la pătrat și le adunăm
(deoarece $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, vezi Figura)

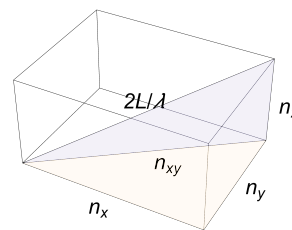
obținem
$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2 \quad (1.11)$$

sau pentru frecvență

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left(\frac{2L\nu}{c}\right)^2 \quad (1.12)$$

de unde lungimea de undă (sau frecvența) oscilației rezultante este:

$$\lambda = \frac{2L}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} \quad \text{sau frecvența} \quad \nu = \frac{c}{2L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad (1.13)$$



1.3 Ecuația Rayleigh-Jeans pentru densitatea spectrală

Considerăm acum un sistem de coordonate alcătuit din numerele întregi (n_x, n_y, n_z) de semilungimi de undă de pe fiecare latură a cutiei. Ca urmare, oscilațiile permise vor fi combinații din cele trei moduri independente de oscilație (n_x, n_y, n_z) . Ele vor da tabloul combinațiilor posibile de oscilații independente din cutia de latura L . In Fig. 1.3a este reprezentat acest tablou în cazul 2-dim.

In cazul 3-dim, cu soluția de unde staționare a ecuației undelor (1.1) obținem relația de dispersie 3-dim, similar (1.5) - (1.6) din cazul 1-dim,

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{1}{c^2} \omega^2 \quad (1.14)$$

cu $k_i = \frac{n_i \pi}{L}$ și $\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda}$, combinația numărului de moduri de oscilație în cutia 3-dim:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{4L^2}{\lambda^2} \quad (1.15)$$

care este ecuația unei sfere de rază $\rho = 2L/\lambda$ din spațiul n_x, n_y, n_z (vezi Fig. 1.3a).

In cazul 1-dim, lungimea L specifică (1.6) numărul $n = 2L/\lambda_n$ al modului de oscilație λ_n , proporțional cu lungimea L a domeniului și invers proporțional cu λ_n .

In cazul 3-dim, latura L specifică (1.15) raza $\rho = 2L/\lambda$ a sferei din spațiul numărului de moduri (n_x, n_y, n_z) de oscilații ce produc unda rezultantă cu lungime de undă λ :

$$\rho = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{2L}{\lambda} \quad (1.16)$$

Deci λ este direct legată de ρ . Căutăm acum numărul de oscilatori (n_x, n_y, n_z) cu aceeași lungime de undă λ , în intervalul $d\lambda$. Adică determinăm numărul de puncte aflate la distanța $\rho = 2L/\lambda$, în intervalul $d\rho = (-2L/\lambda^2) d\lambda$, în stratul dintre sferele de rază ρ și $\rho + d\rho$ (vezi Fig.1.3a)

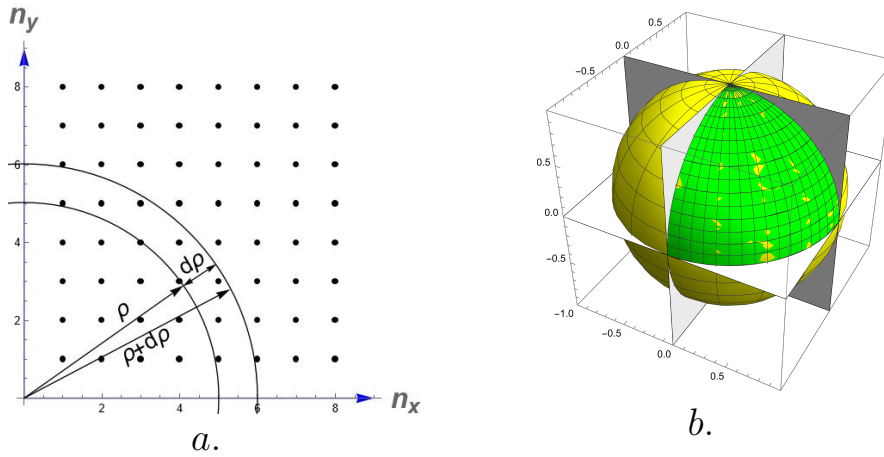


Figura 1.3: a. Tabloul 2-dim de oscilatori cu numere întregi (n_x, n_y) de $(\lambda_x/2, \lambda_y/2)$.
 b. Octantul 3-dim de oscilatori cu numere întregi pozitive (n_x, n_y, n_z) posibile.

Volumul acestei benzi sferice este dat de aria sferei $4\pi\rho^2$ înmulțită cu grosimea $d\rho$, adică $V = 4\pi\rho^2 d\rho$. Dar, trebuie să avem în vedere că doar 1/8 din sfera de rază ρ are valorile n_x, n_y, n_z pozitive (vezi Fig. 1.3b).

De asemenea, trebuie să ținem cont și de cele două grade de libertate pentru cele două direcții de polarizare ale radiației EM în plan perpendicular pe direcția de propagare.

Atunci, numărul total de oscilatori (grade de libertate) din banda sferică $d\rho$ este:

$$N_\rho d\rho = 2 \frac{4\pi\rho^2}{8} d\rho = \pi\rho^2 d\rho \quad (1.17)$$

înlocuind din (1.16) $\rho = \frac{2L}{\lambda}$ și $d\rho = \left| \frac{2L}{\lambda^2} \right| d\lambda$, numărul de oscilatori pt. un mod λ dat este:

$$N_\lambda d\lambda = \frac{8\pi L^3}{\lambda^4} d\lambda \quad (1.18)$$

înlocuind în (1.18) $\lambda = c/\nu$ și $d\lambda = -c/\nu^2 d\nu$, deoarece $N_\lambda d\lambda = N_\nu d\nu$ numărul de oscilatori pt. un mod ν dat este:

$$N_\nu d\nu = \frac{8\pi L^3 \nu^2}{c^3} d\nu \quad (1.19)$$

Ipoteza Rayleigh-Jeans folosește principiul echipartiției energiei, care spune că pe fiecare oscilator (grad de libertate), la temperatura T , se repartizează o **energie medie** $\bar{E} = kT$, unde k - constanta Boltzmann. Deci, energia totală pentru cei $N_\lambda d\lambda$ sau $N_\nu d\nu$ oscilatori este:

$$W_\lambda d\lambda = N_\lambda d\lambda kT = \frac{8\pi L^3}{\lambda^4} kT d\lambda \quad W_\nu d\nu = N_\nu d\nu kT = \frac{8\pi L^3 \nu^2}{c^3} kT d\nu \quad (1.20)$$

Densitatea spectrală de energie din cutie se află împărțind la volumul L^3 al cutiei,

$$u_\lambda d\lambda = \frac{W_\lambda d\lambda}{L^3} = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT d\lambda \quad u_\nu d\nu = \frac{W_\nu d\nu}{L^3} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu \quad (1.21)$$

Aceasta este ecuația Rayleigh-Jeans pentru densitatea spectrală, și arată că:

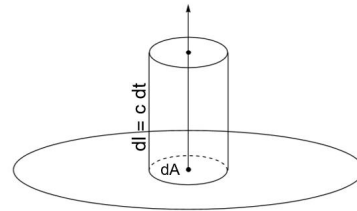
- densitatea de energie pe unitatea de lungime de undă u_λ este invers proporțională cu λ^4
- densitatea de energie pe unitatea de frecvență u_ν este direct proporțională cu ν^2

Ecuția Rayleigh-Jeans a fost o încercare utilă, dar nu complet reușită în explicarea distribuției spectrale măsurate a corpului negru. Conform legii Rayleigh-Jeans (1.21) densitatea spectrală de energie devine foarte mare pentru λ mici (ν mari), neconfirmată experimental, vezi Fig. 1.4. Această comportare a fost numită catastrofa ultravioletă și a declanșat căutarea unei noi abordări, a unei noi interpretări, care în final a condus la fundamentarea mecanicii cuantice.

1.3.1 Ecuția Rayleigh-Jeans a intensității spectrale a corpului negru

Din punct de vedere istoric, ecuația Rayleigh-Jeans a fost inițial exprimată sub forma intensității spectrale a radiației corpului negru $B(\lambda/\nu, T)$, nu sub forma densității de energie $u_{\lambda/\nu}$. Intensitatea spectrală a radiației (sau radianța) $B(\lambda/\nu, T)$ este definită ca energia emisă în unitatea de timp, de unitatea de suprafață, în unitatea de unghi solid și pe unitatea de λ (ν). Intre cele două forme însă există o legătură directă. Să vedem care este această legătură.

Să evaluăm $B(\lambda/\nu, T)$ - intensitatea spectrală a radiației (radianța) corpului negru. Pentru aceasta, luăm o suprafață radiantă (vezi Figura alăturată) și evaluăm energia emisă prin radiație. Considerăm elementul de arie dA din această suprafață, care emite în intervalul de timp dt radiația EM cu densitatea de energie spectrală $u_{\lambda/\nu}$.



Atunci, energia $dW_{\lambda/\nu}$ a radiației emisă de corpul negru cu intensitatea spectrală $B(\lambda/\nu, T)$, în domeniul $d\lambda$ ($d\nu$), de elementul de arie dA , în timpul dt , se află în cilindrul cu baza dA și înălțimea $c dt$. Integrând pe întreaga cavitate de emisie a corpului negru (vezi Fig.1.1), după întregul unghi solid 4π , această energie este:

$$dW_{\lambda} = \underbrace{B(\lambda, T) d\lambda}_{\text{densitate}} \underbrace{dA dt \frac{d\Omega}{4\pi}}_{\text{volum}} = \underbrace{B(\lambda, T) d\lambda}_{\text{densitate}} \frac{dA dt}{c} 4\pi = \underbrace{B(\lambda, T) d\lambda}_{\text{densitate}} \frac{dV}{c} 4\pi \quad (1.22)$$

separând densitatea spectrală de energie $u_{\lambda} = \frac{dW_{\lambda}}{dV d\lambda}$ obținem în final, din (1.22), expresia intensității spectrale $B(\lambda, T)$ prin densitatea spectrală u_{λ} :

$$B(\lambda, T) = \frac{c}{4\pi} u_{\lambda} \quad (1.23)$$

și, ținând cont că $B(\lambda, T) d\lambda = B(\nu, T) d\nu$, obținem în mod similar, $B(\nu, T)$ exprimat prin u_{ν} :

$$B(\nu, T) = \frac{c}{4\pi} u_{\nu} \quad (1.24)$$

Acum putem exprima ecuația Rayleigh-Jeans (1.21) și pentru intensitatea spectrală $B(\lambda, T)$ și $B(\nu, T)$ sub forma:

$$\boxed{B(\lambda, T) d\lambda = \frac{c}{4\pi} \frac{8\pi}{\lambda^4} kT d\lambda = \frac{2c kT}{\lambda^4} d\lambda} \quad \boxed{B(\nu, T) d\nu = \frac{c}{4\pi} \frac{8\pi \nu^2 kT}{c^3} d\nu = \frac{2\nu^2 kT}{c^2} d\nu} \quad (1.25)$$

Aceasta este ecuația Rayleigh-Jeans pentru intensitatea spectrală, vezi Fig. 1.4.

1.4 Ecuația Planck pentru spectrul EM al corpului negru

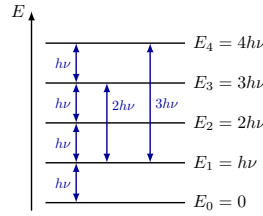
În descrierea clasică, lumina este o undă electromagnetică, a cărei energie se regăsește în componentele oscilatorii electrică și magnetică. În cutie, apar în plus condiții (restricții) suplimentare pentru lungimile de undă (sau frecvențe). Ca urmare are loc o separare a modurilor de oscilație permise. După cum am văzut (1.18), numărul de oscilatori cu aceeași lungime de undă λ este $N_\lambda = \frac{8\pi L^3}{\lambda^4}$ sau numărul de oscilatori (1.19) cu aceeași frecvență ν este $N_\nu = \frac{8\pi L^3 \nu^2}{c^3}$.

Modurile de oscilație posibile ajung în echilibru termic, la o temperatură T dată. Realizarea acestui echilibru impune existența unui transfer de energie între modurile de oscilație.

Se aplică în continuare distribuția Boltzmann după energie, care exprimă probabilitatea unui mod de oscilație n de energie E_n .

$$P_n = \frac{e^{-E_n/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/kT}} \quad (1.26)$$

Ipoteza Planck: Energia E_n a unui oscilator este cuantificată $h\nu$, cu h - constanta Planck. În consecință, modurile de oscilație ale radiației unui corp negru la o temperatura dată, pot avea doar frecvențe multipli întregi $n\nu$ (vezi Fig. alăturată).



$$E_n = n h \nu \quad (1.27)$$

Ipoteza Planck

Intr-o cutie, la o temperatură T dată, radiațiile pot avea frecvențe $n\nu$ sau energii $n h \nu$ diferite, distribuite Boltzmann (1.26). Atunci, după Planck (1.27), **energia medie** \bar{E} a acestor radiații va fi:

$$\bar{E} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n h \nu e^{-n h \nu / k T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n h \nu / k T}} \quad (1.28)$$

Pentru a simplifica relația facem schimbarea de variabilă: $x = e^{-h\nu/kT}$, iar energia (1.28) va fi:

$$\bar{E} = h\nu \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = h\nu \frac{x + 2x^2 + 3x^3 + \dots}{1 + x + x^2 + \dots} = h\nu x \frac{1 + 2x + 3x^2 + \dots}{1 + x + x^2 + \dots} \quad (1.29)$$

Folosim dezvoltările în serie: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ și $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$

Deci, energia medie \bar{E} a radiației cuantificate din cutie, la temperatura T , este:

$$\bar{E} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (1.30)$$

Pentru a găsi limita clasică, punem $h\nu \rightarrow 0$, iar din dezvoltarea $e^{h\nu/kT} - 1$, pentru $\frac{h\nu}{kT} \rightarrow 0$, avem:

$$e^{h\nu/kT} - 1 = 1 + \frac{h\nu}{kT} + \frac{1}{2!} \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 + \dots - 1 \rightarrow \frac{h\nu}{kT}$$

8 CAPITOLUL 1. ECUAȚIA PLANCK - SPECTRUL EM AL CORPULUI NEGRU

Atunci, energia medie (1.30) este:
$$\bar{E} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \rightarrow \frac{h\nu}{h\nu/kT} = kT \quad (1.31)$$

Am regăsit limita clasică a energiei unui oscilator armonic în echilibru termic $\bar{E} = kT$.

Pentru a exprima densitatea de energie, folosim legătura clasică (1.21) (Rayleigh-Jeans), ce ne dă energia medie a radiației pe unitate de volum: u_ν în unitate de ν , sau u_λ în unitate de λ , unde înlocuim energia medie kT (1.31) clasică (Rayleigh-Jeans) cu cea (1.30) cuantică (Planck):

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \underbrace{kT}_{\bar{E}} d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad ; \quad u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \underbrace{kT}_{\bar{E}} d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{hc/\lambda}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1} d\lambda$$

Ecuția Planck pentru densitatea de energie a radiației corpului negru:

$$\boxed{u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1} d\lambda} \quad \text{sau} \quad \boxed{u_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu} \quad (1.32)$$

u_ν măsoară energia radiației în unitatea de volum, pe unitatea de frecvență ν .

u_λ măsoară energia radiației în unitatea de volum, pe unitatea de lungime de undă λ .

Trecerea de la densitatea de energie u la intensitatea spectrală B a corpului negru se face prin înmulțirea cu $c/(4\pi)$, vezi relațiile (1.23) și (1.24):

$$B(\nu, T) d\nu = \frac{c}{4\pi} u_\nu d\nu = \frac{c}{4\pi} \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

sau

$$B(\lambda, T) d\lambda = \frac{c}{4\pi} u_\lambda d\lambda = \frac{c}{4\pi} \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1} d\lambda$$

adică,

Ecuția Planck pentru intensitatea spectrală a radiației corpului negru:

$$\boxed{B(\lambda, T) d\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1} d\lambda} \quad \text{sau} \quad \boxed{B(\nu, T) d\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu} \quad (1.33)$$

$B(\lambda, T)$ măsoară energia radiației emisă în unitatea de timp (puterea), de unitatea de suprafață, în unitatea de unghi solid, pe unitatea de λ (vezi Fig. 1.4a sau Fig. 1.5).

$B(\nu, T)$ măsoară energia radiației emisă în unitatea de timp (putere), de unitatea de suprafață, în unitatea de unghi solid, pe unitatea de frecvență ν (vezi Fig. 1.4b).

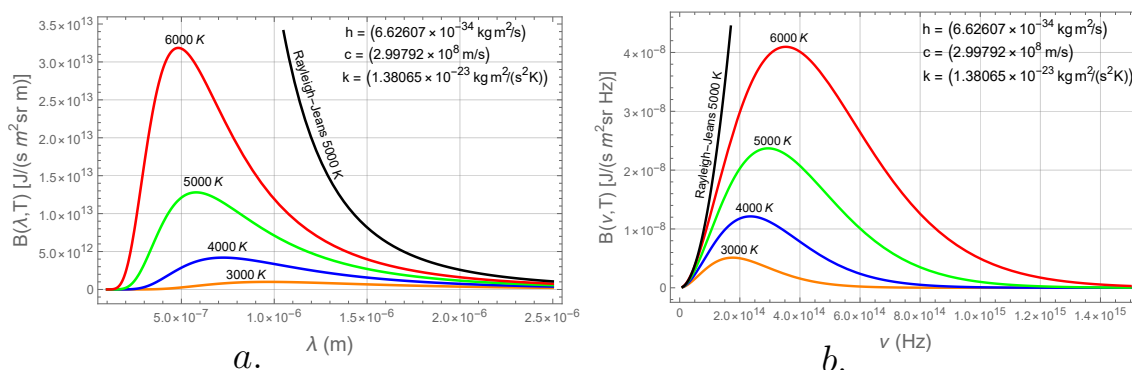


Figura 1.4: Energie EM emisă în unitatea de timp, de unitatea de suprafață a corpului negru, în unitatea de unghi solid și pe unitatea de lungime de undă $B(\lambda, T)$ (a) sau pe unitatea de frecvență $B(\nu, T)$ (b) după Planck (1.33), comparativ cu relațiile corespunzătoare Rayleigh-Jeans (1.25) ($B(\lambda, T) = 2ckT/\lambda^4$ sau $B(\nu, T) = 2\nu^2 kT/c^2$ pentru $T=5000$ K).

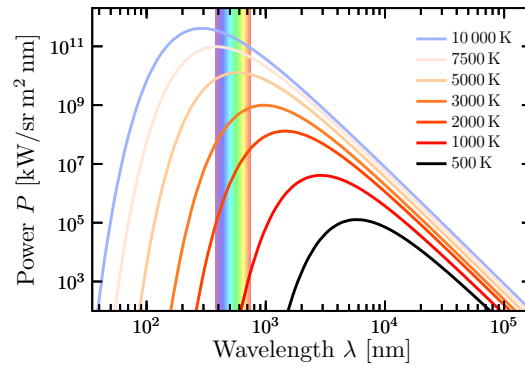


Figura 1.5: Distribuții Planck log/log de intensitate $B(\lambda, T)$, ca energia radiației emisă în unitatea de timp (puterea), de unitatea de suprafață, în unitatea de unghi solid, pe unitatea de lungime de undă λ pentru diferite temperaturi.

1.5 Rezumat

Numărul de moduri de oscilație (grade de libertate) permise, funcție de ν sau λ , din cutia de latura L .	$N_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} L^3 \quad (1.19)$	$N_\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} L^3 \quad (1.18)$
Ipoteza Rayleigh-Jeans - Energia medie pe grad de libertate este: $\bar{E} = kT$		
Densitatea spectrală R-J de energie EM: $u_i = \frac{N_i}{L^3} \bar{E}$	$u_\nu = \frac{N_\nu}{L^3} kT = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$	$u_\lambda = \frac{N_\lambda}{L^3} kT = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT \quad (1.21)$
Distribuția Boltzmann după energia E_n a modurilor de oscilație (gradele de libertate), aflate în echilibru termic la temperatura T :	$P_n = \frac{e^{-E_n/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/kT}} \quad (1.26)$	
<u>Ipoteza Planck</u> - Energia modurilor de oscilație este cuantificată: $E_n = n h\nu$, iar energia medie pe grad de libertate este:	$\bar{E} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (1.30)$	
Densitatea spectrală Planck de energie EM: $u_i = \frac{N_i}{L^3} \bar{E}$	$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$	$u_\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{hc/\lambda}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1} \quad (1.32)$